

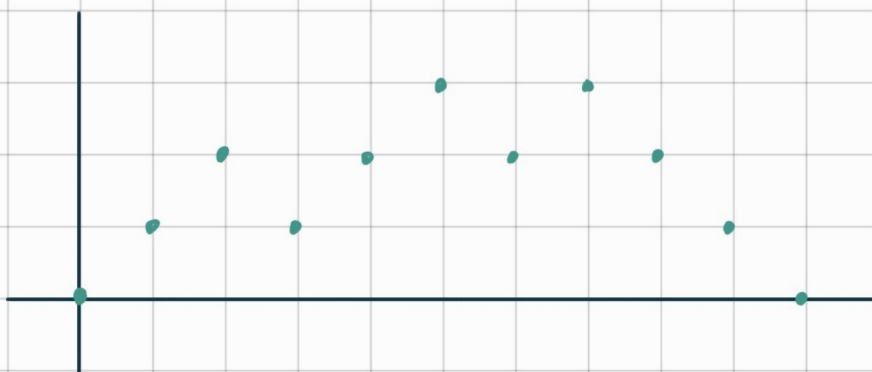
1) Beseda u nad $A = \{a, b\}$ se imenuje Dycksonova beseda, če je $|u|_a = |u|_b$ in $|v|_a \geq |v|_b$ za vsako predpono v besede u .
 ↖ število a -jev v u

Pokaži, da jezik vseh Dycksonovih besed ni prepoznaven.

Lema o črpanju:

Naj bo $L \subseteq A^*$ prepoznaven jezik. Potem obstaja $n \in \mathbb{N}$, da za vsak $u \in L$, $|u| \geq n$, lahko napišemo $u = xyz$, $x, y, z \in A^*$, $|xy| \leq n$, $y \neq 1$, in je $xy^kz \in L$ za vsak $k \geq 0$.

Dycksonove besede: $a^n b^n$, $(ab)^n$, $ab a^{n-1} b^{n-1}$, ...



Denimo, da obstaja tak $n \in \mathbb{N}$.

$$u := a^n b^n$$

$$x = a^m$$

$$y = a^l$$

$$z = a^{n-m-l} b^n$$

$$m+l \leq n, l \geq 1$$

$$\Rightarrow u = xyz$$

$$k := 2$$

$$w := xy^kz$$

$$\begin{aligned} |w|_a &> |u|_a \\ |w|_b &= |u|_b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |w|_a \neq |w|_b$$

2) Z uporabo leme o črpanju dokaži, da naslednji jeziki nad abecedo $A = \{a, b\}$ niso prepoznavni:

a) $\{u \in A^* ; |u|_a = |u|_b\}$

Enako protiprimer kot v prejšnji nalogi ...

b) $\{a^l b^m ; l, m \geq 0, l = 2m\}$

Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Iščemo $l, m \dots$

$$\begin{aligned} m &:= n \\ l &= 2n \end{aligned}$$

$$u = a^{2n} b^n$$

$$\begin{aligned} x &= a^\sigma \\ y &= a^p \\ z &= a^{2n-\sigma-p} b^n \end{aligned}$$

$$k := 2$$

$$|xy^2z|_a = \sigma + 2p + 2n - \sigma - p = 2n + p$$

$$|xy^2z|_b = n$$

c) $\{u \in A^* ; u \text{ palindrom}\}$

$aba, a^n b^n a^n, ababa, \dots$

Fiksiramo $n \dots$

$$u = a^n b^n a^n$$

$$x = a^l$$

$$y = a^m$$

$$z = a^{n-l-m} b a^n$$

$$l+m \leq n, m \neq 0$$

$$k := 2$$

$$xy^2z = a^l a^{2m} a^{n-l-m} b a^n = a^{n+m} b a^n$$

To pa ni palindrom!

d) $\{u \in A^* ; |u| \text{ praštevil}\}$

Fiksiramo $n \dots$

$$u = a^m \text{ za neko praštevil } m \geq n$$

$$x = a^l$$

$$y = a^k, k \geq 1$$

$$z = a^{m-l-k}$$

$$u = xyz$$

$$xy^p z = a^l (a^k)^p a^{m-l-k}$$

$$|xy^p z| = m + k \cdot (p-1)$$

$$p = m : |xy^p z| = m + (k-1) \cdot m = m \cdot k \text{ ni praštevilo}$$

3) Dokaži, da jezik $L = \{a^p b^q ; p \neq q\}$ ni prepoznaven.

Denimo: L prepoznaven

$\Rightarrow L^c$ prepoznaven

Želimo: $L^c \cap M = \{a^p b^p ; p \geq 0\}$

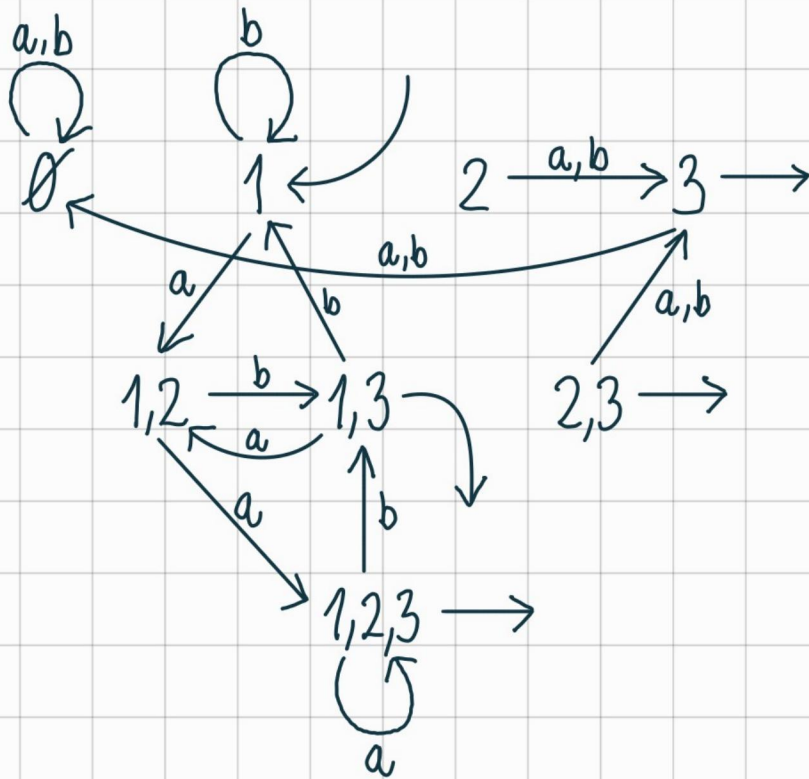
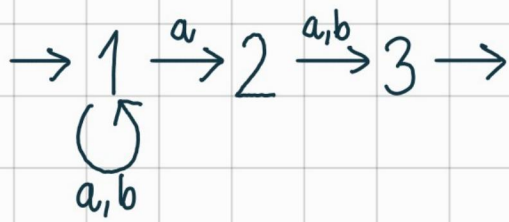
$$M = \{a^p b^q ; p, q \geq 0\} = a^* b^*$$

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ prepoznaven} \Rightarrow a^* \text{ prepoznaven} \\ b \text{ prepoznaven} \Rightarrow b^* \text{ prepoznaven} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{produkt } a^* b^* \text{ prepoznaven}$$

$$\left. \begin{array}{l} L^c \text{ prepoznaven} \\ M \text{ prepoznaven} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{preseka } L^c \cap M \text{ prepoznaven}$$

~~—~~ (iz predavanj vemo, da $L^c \cap M = \{a^p b^p\}$ ni prepoznaven)

4) S konstrukcijo potenčne množice nariši determinističen in ohranjen avtomat, ekvivalenten naslednjemu avtomatu:



$$\emptyset \cdot a = \emptyset$$

$$\emptyset \cdot b = \emptyset$$

$$\{1\} \cdot a = \{1,2\}$$

$$\{1\} \cdot b = \{1\}$$

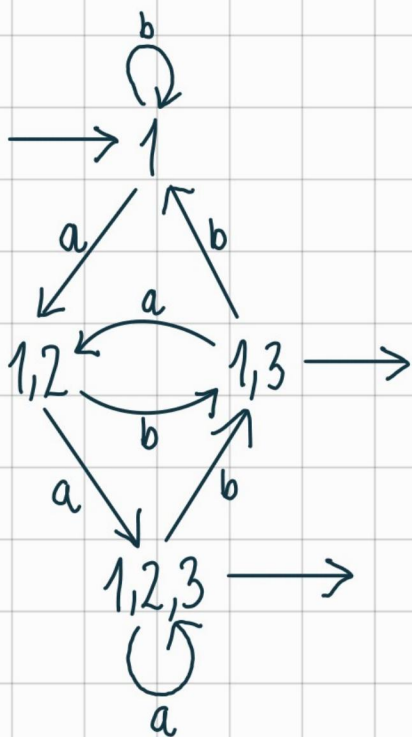
⋮

$$\{1,2\} a = \{1,2,3\}$$

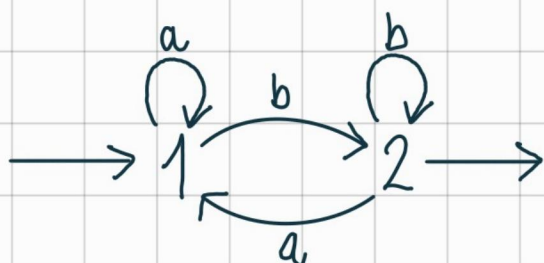
$$\{1,2\} b = \{1,3\}$$

⋮

Obrezan:

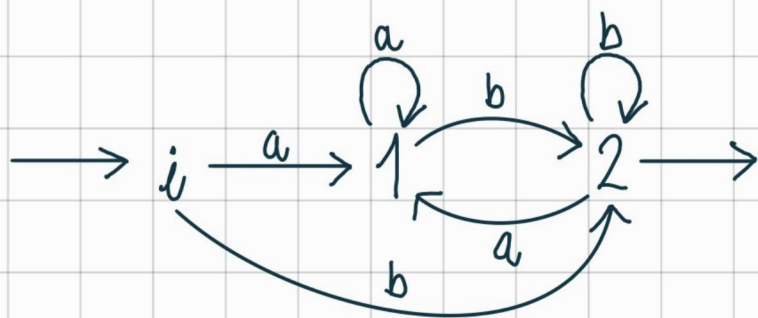


5a) Določí racionalni izraz za L_1 , prepoznan 2 avtomatom:



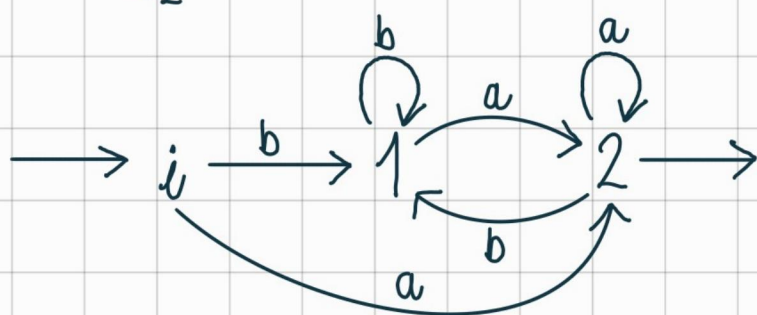
$$(a+b)^*b$$

5b) Nariši standarden determinističen avtomat, ekvivalenten zgornjemu.

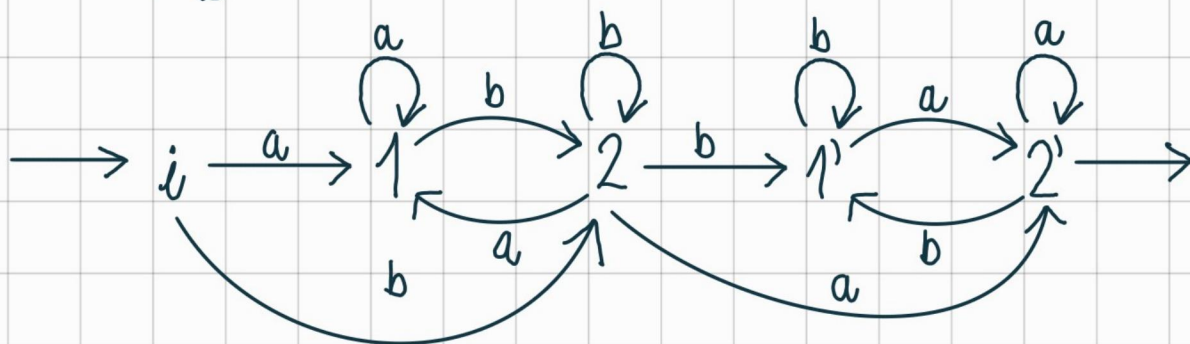


5c) Naj bo $L_2 = (a+b)^*a$. Nariši standarden determinističen avtomat, ki prepozna L_2 , in avtomat, ki prepozna L_1L_2 .

Za L_2 :



2a $L_1 L_2$:



5d) Narisi avtomat, ki prepozna $L_1^+ L_2$:

$$L_1^+ L_2 = A^+ B$$

A B

22.10.

$$1) A = \{a, b, c\}$$

$$L = \{(ab)^n c^n; n > 0\} + A^* b^2 A^* + A^* c^2 A^*$$

L_1 L_2 L_3

Pokaži, da L zadošča lemi o črpanju, ampak ni prepoznaven.

i) $u \in L_1$

$$u = \overbrace{abab \dots ab}^{\text{cikel}} c c \dots c$$

$$x = a$$

$$y = b$$

$$z = \dots$$

$$xy^k z \in \begin{cases} L_1 & ; k=1 \\ L_2 & ; k \geq 2 \\ L_3 & ; k=0 \end{cases}$$

za $|u| \geq 4$

ii) $u \in L_2$

$$u = _ b b _$$

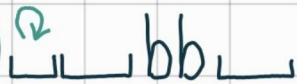
I) bb 

$$x = bb$$

$$y \in \{a, b, c\}$$

$$z = \text{ostalo}$$

$$xy^kz \in L_2$$

II)  bb

$$x = 1$$

$$y = \text{prva črka}$$

$$z = \text{ostalo}$$

$$\text{za } |u| \geq 3$$

$$\text{iii) } u \in L_3$$

Podobno

Torej L zadošča lemi o črpanju za $|u| \geq 4$

Nerodejev avtomat: $Q = \{u^{-1}L \mid u \in A^*\}$

$$((ab)^n)^{-1}L \ni (ab)^0 c^n = c^n$$

$$\underline{((ab)^m)^{-1}L \not\supseteq c^n \text{ za } n \neq m}$$

$$\text{i) } ((ab)^m)^{-1}L_1:$$

$$((ab)^m)^{-1}L_1 = \{(ab)^{k-m} c^k \mid k \in \mathbb{N}\} \not\supseteq c^n, \text{ ker } n \neq m$$

$$ii) ((ab)^m)^{-1} L_2 :$$

$$bb \notin (ab)^m \quad (bb \text{ ne moremo pokrajšati})$$

$$\Rightarrow \forall u \in ((ab)^m)^{-1} : b \in u \quad (\text{ostane vsaj en } b)$$

$$\Rightarrow c^n \notin ((ab)^m)^{-1} L_2 \quad (c^n \text{ ne more biti v } ((ab)^m)^{-1} L_2)$$

$$iii) ((ab)^m)^{-1} L_3 :$$

Podobno ...

$$\Rightarrow \forall n \neq m : ((ab)^n)^{-1} L \neq ((ab)^m)^{-1} L$$

$$\Rightarrow \text{imamo neskončno stanj}$$

$$\Rightarrow \text{Ni prepoznaven jezik}$$

2) Dokaži, da je $L_n = \{u \in \{a,b\}^* ; |u|_a = |u|_b \pmod{n}\}$ prepoznaven za vsak $n \in \mathbb{N}$ in izračunaj minimalni avtomat.

$$Q_0 = L_n$$

$$Q_1 = a^{-1} L_n = \{u \in \{a,b\}^* ; |u|_a + 1 = |u|_b \pmod{n}\}$$

$\vdots$

$$Q_{n-1} = (a^{n-1})^{-1} L_n = \{u \in \{a,b\}^* ; |u|_a + n - 1 = |u|_b \pmod{n}\}$$

$$(a^n)^{-1} L_n = L_n = Q_0$$

$$b^{-1} L_n = \{u \in \{a,b\}^* ; |u|_a - 1 = |u|_b \pmod{n}\} = Q_{n-1}$$

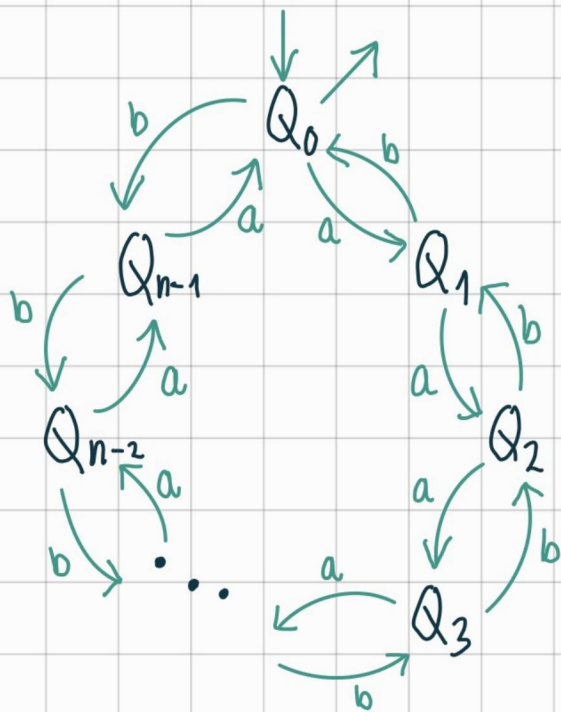
$$(b^2)^{-1} L_n = Q_{n-2}$$

⋮

$$(ab)^{-1} L_n = b^{-1}(a^{-1} L_n) = L_n$$

⋮

Imamo n stanj

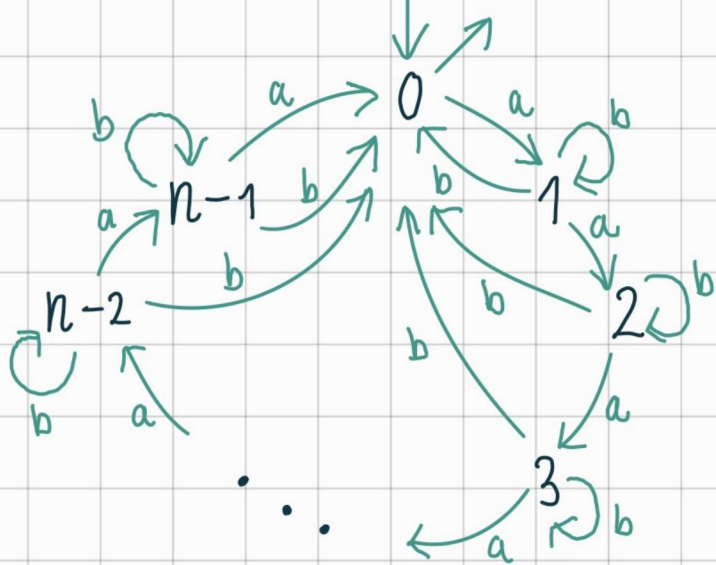


$u \in L_n : u^{-1} L_n = L_n$ za končna stanja

3) Pokaži, da ima vsak determinističen in dosegljiv avtomat, ekvivalenten A_n , vsaj 2^n stanj.

$$A_n = (\{0, 1, \dots, n-1\}, \{a, b\}, E_n, \{0\}, \{0\})$$

$$E_n = \{(i, a, i+1) ; 0 \leq i \leq n-2\} \cup \{(n-2, a, 0)\} \\ \cup \{(i, b, i) ; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(i, b, 0) ; 1 \leq i \leq n-1\}$$



Ideja: Naredimo konstrukcijo avtomata s potenčno množico (ima 2^n stanj) in želimo pokazati, da so vsa stanja dosegljiva in da je to minimalni avtomat. Če bodo avtomati z različnimi vhodnimi stanji definirali različne jezike, bo minimalni avtomat imel enako število stanj.

Iz $\{0\}$ v $\{i\}$ pridemo z a^i : $\{0\}a^i = \{i\}$.

Predpostavimo, da znamo priti iz $\{0\}$ do vseh m -elementnih množic.

Z indukcijo pokažimo, da znamo priti tudi do $m+1$ -elementnih množic.

$$|S'| = m$$

$$S = S' \cup \{x\}, \quad x \notin S'$$

$$x = 0: S = S' \cdot b$$

$$x \neq 0: S = S' \cdot a^{n-x} b a^x$$

Torej so vsa stanja dosegljiva.

Zdaj izberimo dve stanji $S_1 \neq S_2$.

$$\underline{L_{S_1}} \neq \underline{L_{S_2}}$$

Naj bo $x \in S_1$ in $x \notin S_2$.

$$S_1 \cdot a^{n-x} \text{ pride v sprejemno stanje} \Rightarrow a^{n-x} \in L_{S_1}$$

$S_2: a^{n-x}$ ne pride v sprejemno stanje $\Rightarrow a^{n-x} \notin L_{S_2}$

4) Izračunaj minimalni avtomat naslednjih jezikov:

$$D_0 = \{1\}$$

$$D_1 = (ab)^*$$

$$D_2 = (a(ab)^*b)^*$$

$$A = \{a, b\}$$

$D_0: 1 \rightarrow$ ni minimalen :-

$$Q_0 = D_0$$

$$a^{-1}D_0 = \emptyset = Q_1$$

$$b^{-1}D_0 = \emptyset$$

$$a^{-1}\emptyset = \emptyset$$

$$b^{-1}\emptyset = \emptyset$$

$$\rightarrow Q_0 \xrightarrow{a,b} Q_1 \hookrightarrow Q_0$$

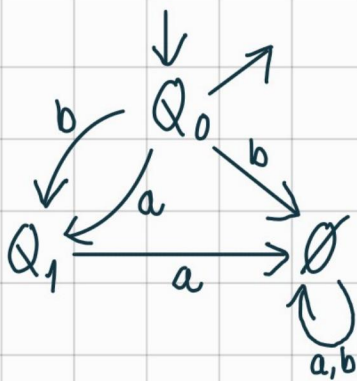
$$D_1: Q_0 = D_1$$

$$a^{-1}D_1 = b(ab)^* = Q_1$$

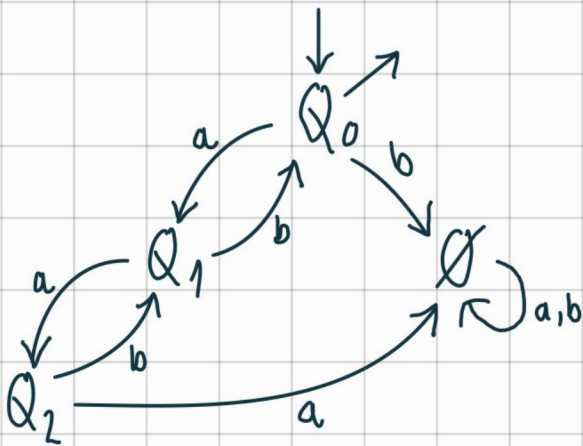
$$b^{-1}D_1 = \emptyset = Q_2$$

$$a^{-1}Q_1 = (a^2)^{-1}D_1 = \emptyset$$

$$b^{-1}Q_1 = b^{-1}(a^{-1}D_1) = (ab)^* = Q_0$$



$$\begin{aligned}
 D_2: Q_0 &= D_2 \\
 a^{-1}D_2 &= (ab)^*b(a(ab)^*b)^* = Q_1 \\
 b^{-1}D_2 &= \emptyset \\
 a^{-1}Q_1 &= b(ab)^*b(a(ab)^*b)^* = Q_2 \\
 b^{-1}Q_1 &= (a(ab)^*b)^* = Q_0 \\
 a^{-1}Q_2 &= \emptyset \\
 b^{-1}Q_2 &= (ab)^*b(a(ab)^*b)^* = Q_1
 \end{aligned}$$



$$D_n = (a D_n b)^*$$

Avtomat se podaljša ...

