

KONČNI AVTOMATI

Definicija: Končni avtomat je $A = (A, Q, E, I, F)$, kjer so:

- A - končna abeceda
- Q - končna množica stanj (states)
- $E \subseteq Q \times A \times Q$ množica povezav/prehodov (transitions)
- $I \subseteq Q$ - množica začetnih stanj (initial states)
- $F \subseteq Q$ - množica končnih stanj (final states)

Primer: $A = \{A, Q, E, I, F\}$

$$A = \{a, b\}$$

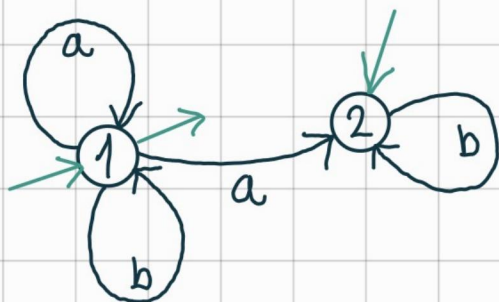
$$Q = \{1, 2\}$$

$$I = \{1, 2\}$$

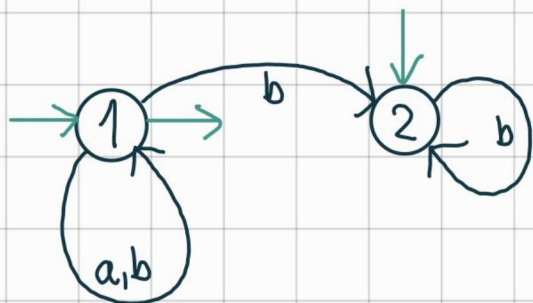
$$F = \{1\}$$

$$E = \{(1, a, 1), (1, b, 1), (1, a, 2), (2, b, 2)\}$$

Grafično:



Kompaktno:



Vseh končnih stanj označimo ①.

Definicija: (x, a, y) in (u, b, v) sta zaporedni, če je $u = y$:



Definicija: Pot v A je zaporedje zaporednih povezav:



Definicija: Prazna pot v Q je $(q, 1, q)$.

Definicija: Pot p je začetna, če je $q_0 \in I$.

Pot p je končna, če je $q_n \in F$.

Pot p je uspešna, če je hkrati začetna in končna, torej $q_0 \in I$ in $q_n \in F$.

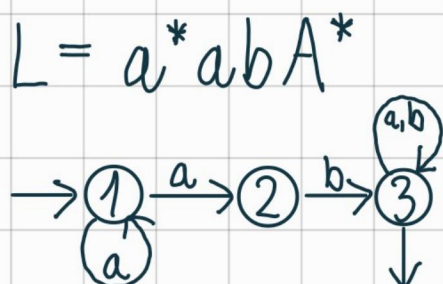
Definicija: Oznaka poti p je $l(p) := a_1 a_2 \dots a_n \in A^*$.

Definicija: Naj bo $u = a_1 \dots a_n \in A^*$. Automat A sprejme besedo u , če obstaja uspešna pot, katere oznaka je p .

Definicija: Naj bo $L(A) = \{u \in A^* ; A \text{ sprejme } u\}$ jezik, ki ga sprejme/prepozna A .

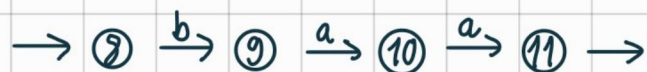
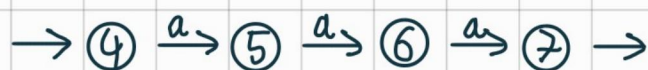
Definicija: Naj bo $L \subseteq A^*$ jezik. L je prepoznaven (recognisable), če obstaja končni avtomat A , da je $L = L(A)$.

Primer: Jezik $A = \{a, b\}$ je prepoznaven:



$$\Rightarrow L = L(A)$$

Primer: Jezik $L = \{ab, aaa, baa\}$ je prepoznaven:



$$\Rightarrow L = L(A)$$

Vsak končen jezik je prepoznaven.

Definicija: Stanje $q \in Q$ je dosegljivo (accessible), če obstaja pot iz nekoga začetnega stanja do q .

Stanje $q \in Q$ je kodosegljivo (coaccessible), če obstaja pot iz q v neko končno stanje.

Automat A je obrezan (trimmed), če je vsako stanje dosegljivo in kodosegljivo.

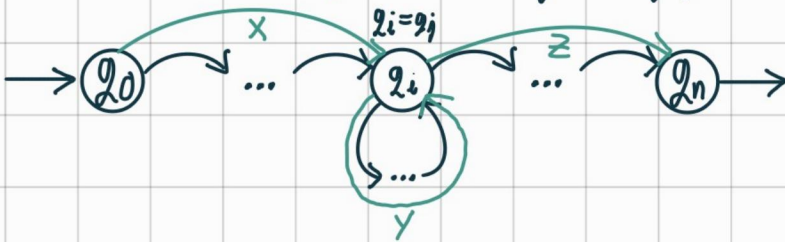
Automata A in B sta ekvivalentna, če je $L(A) = L(B)$.

Če je $A = (A, Q, E, I, F)$ in odstranimo le stanja, ki so dosegljiva in kodosegljiva, dobimo obrezan avtomat $A' = (A, Q', E', I, F)$, kjer je $L(A) = L(A')$.

Predpostavimo, da je $L \subseteq A^*$ prepoznaven in ga sprejme avtomat, ki ima n stanj. Naj bo p uspešna pot v A in $|p| \geq n$.



$$\Rightarrow \exists 0 \leq i < j \leq n : q_i = q_j$$



$$l(p) = xyz$$

$$l(x) = a_1 \dots a_i$$

$$l(y) = a_{i+1} \dots a_j$$

$$l(z) = a_{j+1} \dots a_n$$

$$\Rightarrow xy^n z \in L(A) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Trditev (lema o črpanju / pumping lemma):

Naj bo L prepoznaven jezik. Potem obstaja $n \in \mathbb{N}$, da za vsak $u \in L$ z dolžino $|u| \geq n$ obstaja zapis $u = xyz$, kjer $|xy| \leq n$ in $|y| \geq 1$, tako da $xy^kz \in L$ za vsak $k \in \mathbb{N}_0$.

Primer: Jezik $L = \{a^n b^n ; n \geq 1\}$ ni prepoznaven:

Če je prepoznaven, obstaja n iz leme.

Vzemimo $u = a^n b^n$.

Obstaja $u = \underline{xyz}$, $|xy| \leq n$, $|y| \geq 1$, da je $xy^kz \in L$ za vsak $k \in \mathbb{N}_0$.

$$x = a^l$$

$$y = a^t$$

$$t \geq 1$$

$$k = 2n$$

$$z = a^s b^n$$

$$xy^kz = \underline{a^l a^{2nt} a^s} b^n \notin L$$

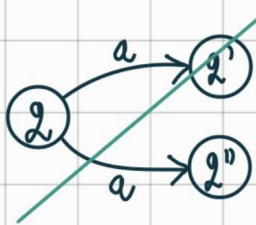
$$l + 2nt + s > n$$

DETERMINISTIČNI AVTOMATI

Definicija: Avtomat $A = (Q, A, E, I, F)$ je determinističen, če za vsak $q \in Q$ in $a \in A$ obstaja največ ena povezava, (q, a, q') .

Pišemo $q \cdot a = q'$, če taka povezava obstaja.

Zahtevamo še, da ima A eno začetno stanje.



Trditev: Vsak končen avtomat je ekvivalenten determinističnem končnem avtomatu.

Vemo: $A \sim A' :\Leftrightarrow L(A) = L(A')$

Dokaz: Naj bo $A = (Q, A, E, I, F)$ avtomat in $L = L(A)$.

Definirajmo $A' = (\underbrace{\mathcal{P}(Q)}_{\text{potenčna množica}}, A, \underbrace{E'}_{\text{element potenčne množice}}, I, F')$.

Naj bo $P \subseteq Q$ in $a \in A$.

$$P \cdot a = \{ q \in Q ; \exists (p, a, q) \in E, p \in P \}$$

$$P \begin{cases} p_1 \xrightarrow{a} \cdot \\ \vdots \\ p_n \xrightarrow{a} \cdot \end{cases}$$

$$E' := \{ (P, a, P \cdot a) ; P \in \mathcal{P}(Q), a \in A \}$$

$$F' := \{ P \in \mathcal{P}(Q) ; P \cap F \neq \emptyset \}$$

Tak A' je **kompleten** avtomat:

$$\forall P \in \mathcal{P}(Q) : \forall a \in A : \exists (P, a, P \cdot a)$$

Seveda je tudi determinističen.

Pokažimo zdaj, da je $L(A') = L(A)$:

$$\underline{L(A)} \subseteq \underline{L(A')}$$

Naj bo $u \in L(A)$.

$$u = a_1 \cdots a_n$$

Obstaja pot $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} q_n$ v A , kjer $q_0 \in I$, $q_n \in F$.

Po definiciji A' vsebuje:

$$I \xrightarrow{a_1} I \cdot a_1 \xrightarrow{a_2} (I \cdot a_1) \cdot a_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_n} (I \cdot a_1) \cdots a_n$$

Ker je $q_0 \in I$, $q_1 \in I \cdot a_1$, velja $q_2 \in (I \cdot a_1) \cdot a_2$.
Nadaljujemo da $q_n \in (I \cdot a_1) \cdots a_n$.

Dobili smo pot z oznako u v A' .

Ker je $q_n \in (I \cdot a_1) \cdots a_n =: P$ in $P \cap F \neq \emptyset$,
je $P \in F'$.

Torej je ta pot v A' uspešna.

Če pa je $u = 1$, $q_0 \in F$, pa ker je $I \cap F \neq \emptyset$
in $I \in F'$, velja $u \in L(A')$.

$$\underline{L(A')} \subseteq \underline{L(A)}$$

Naj bo $u \in L(A')$.

Če je $u = 1$, je $I \in F'$. Torej $I \cap F \neq \emptyset$.
Naj bo $q \in I \cap F$. Potem je $1 \in L(A)$.

$\rightarrow I \rightarrow$

$\rightarrow q \rightarrow$

Naj bo $u = a_1 a_2 \dots a_n$, $n \geq 1$.

V A' obstaja uspešna pot:

$\rightarrow I \xrightarrow{a_1} P_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} P_{n-1} \xrightarrow{a_n} P_n \rightarrow$

Kjer je $P_n \in F'$.

Ker je $P_n \in F'$, je $P_n \cap F \neq \emptyset$. Zato obstaja $q_n \in P_n \cap F$.

Ker $q_n \in P_n$, v A obstaja povezava (q_{n-1}, a_n, q_n) .

Ker $q_{n-1} \in P_{n-1}$, v A obstaja povezava $(q_{n-2}, a_{n-1}, q_{n-1})$.

Nadaljujemo in v A dobimo pot:

$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n \rightarrow$

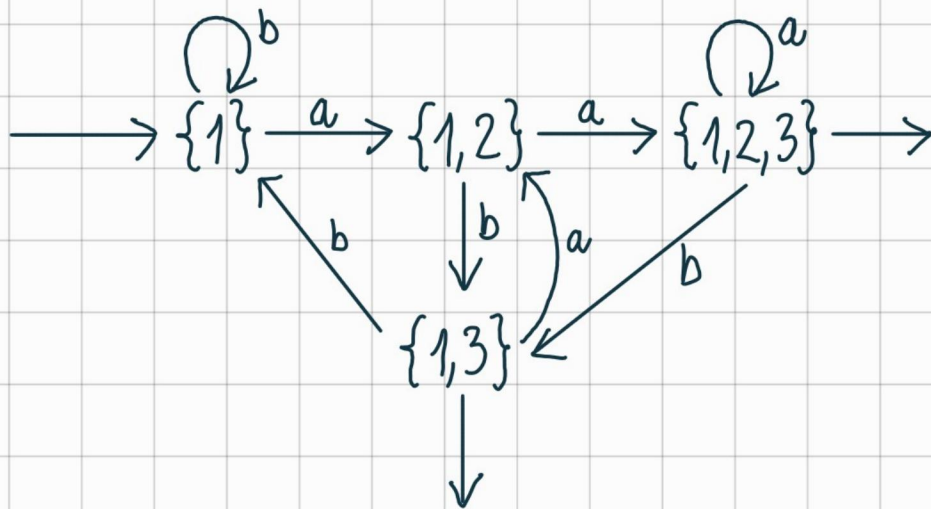
Ker je $q_0 \in P_0 = I$, sledi, da je q_0 začetno stanje v A .

Primer: $A: \rightarrow 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{a,b} 3 \rightarrow$


Avtomat A ni determinističen, ker $(1, a, 2), (1, a, 1) \in E$.

Določimo determinističen A'' .

Začetno stanje je $\{1\}$.



$$F' = \{P \subseteq \{1,2,3\} ; 3 \in P\}$$

Zgornji avtomat je obrezan avtomat potenčnega avtomata $\mathcal{A}'$ iz dokaza.

"Manjkajoča" stanja: $\emptyset$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2,3\}$

Tak avtomat je determinističen. V splošnem pa ni nujno več kompleten (v tem primeru sicer je).

DN: Dokaži, da je vsak determinističen avtomat ekvivalenten obrezanem determinističnem.

STANDARDNI AVTOMATI

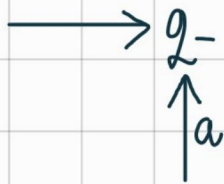
Definicija: Avtomat $\mathcal{A}$ je **standardni**, če nobena povezava nima konca v začetnem stanju.

Trditev: Poljuken determinističen avtomat je ekvivalenten standardnemu determinističnem.

Predpostavka: $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$

Dokaz: Naj bo $\mathcal{A} = (Q, A, \cdot, \overset{\text{začetno stanje}}{q_-}, F)$ determinističen avtomat.

Predpostavimo, da $\mathcal{A}$ ni standardni:



$$p \notin Q$$

Definirajmo $\mathcal{A}' = (Q \cup \{p\}, A, \circ, p, F)$

Naj bodo E povezave v $\mathcal{A}$.

$$E' := E \cup \{(p, a, q) ; (q_-, a, q) \in E, a \in A\}$$

$$F' := \begin{cases} F & ; q_- \notin F \\ F \cup \{p\} & ; q_- \in F \end{cases}$$

Potem je $\mathcal{A}'$ determinističen in standarden:

Za vsak $q \in Q$ in vsak $a \in A$ obstaja kvečjemu ena povezava (q, a, r) .

Za p , če bi imeli (p, a, r) in (p, a, r') , bi imeli (q_-, a, r) in (q_-, a, r') , kar je prepovedano.

Pokažimo še $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$:

$$(\subseteq) u \in L(\mathcal{A})$$

$$\bullet u = 1$$

$$\Rightarrow q_- \in F$$

$$p \in F'$$

$$\Rightarrow 1 \in L(\mathcal{A}')$$

$$\cdot u \neq 1$$

$$u = a_1 \dots a_n, n \geq 1$$

$$\rightarrow q_- \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} q_n \rightarrow \text{pot } v \mathcal{A} \quad (*)$$

$$\text{Torej: } \rightarrow p \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} q_n \rightarrow \text{pot } v \mathcal{A}' \quad (**)$$

$$\text{Zato: } u \in L(\mathcal{A}')$$

$$(\supseteq) u \in L(\mathcal{A}')$$

$$\cdot u = 1$$

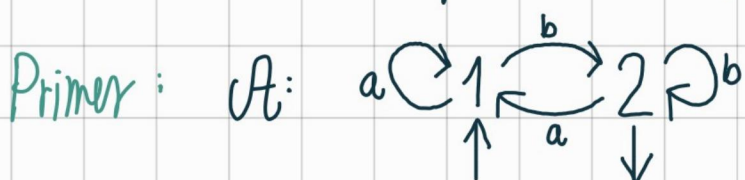
Podobno

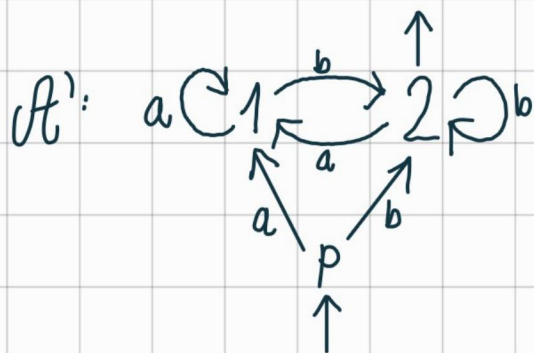
$$\cdot u \neq 1$$

$$u = a_1 \dots a_n, n \geq 1$$

$$\forall \mathcal{A}' \text{ obstaja } (**)$$

$$\text{Torej } v \mathcal{A} \text{ obstaja } (*)$$





OPERACIJE NAD PREPOZNAVNI MI JEZIKI

Cilj: Kleenejev izrek:

Jezik $L \subseteq A^*$ je racionalen

$\Leftrightarrow$ Jezik L je prepoznaven

PRESEK

Trditev: Če sta $L_1, L_2 \subseteq A^*$ prepoznavna, potem je $L_1 \cap L_2$ prepoznaven.

Dokaz: Naj bo $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$, $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$.

$$\mathcal{A}_1 = (Q_1, A, E_1, I_1, F_1)$$

$$\mathcal{A}_2 = (Q_2, A, E_2, I_2, F_2)$$

Definirajmo avtomat $\mathcal{B} = (Q_1 \times Q_2, A, E, I_1 \times I_2, F_1 \times F_2)$.

Povezave v $\mathcal{B}$:

$$((q_1, q_2), a, (r_1, r_2)) \in E \Leftrightarrow \begin{matrix} (q_1, a, r_1) \in E_1 \wedge \\ (q_2, a, r_2) \in E_2 \end{matrix}$$

Naj bo $(q_1, q_2) \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} (r_1, r_2)$ uspešna pot v $\mathcal{B}$.

To pomeni:

$$\begin{aligned} (q_1, q_2) \in I_1 \times I_2 &\Leftrightarrow q_1 \in I_1 \wedge q_2 \in I_2 \\ (r_1, r_2) \in F_1 \times F_2 &\Leftrightarrow r_1 \in F_1 \wedge r_2 \in F_2 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{A}_1$ in $\mathcal{A}_2$ imamo uspešni poti:

$$\rightarrow q_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} q_n \rightarrow \forall \mathcal{A}_1$$

$$\rightarrow r_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} r_n \rightarrow \forall \mathcal{A}_2$$

To pomeni:

$$u \in L(\mathcal{B}) \Leftrightarrow u \in L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$$

Torej:

$$L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$$

Tudi:

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ deterministična $\Rightarrow \mathcal{B}$ determinističen

UNION

Trditev: Če sta L_1 in L_2 prepoznavna, je $L_1 \cup L_2$ prepoznaven.

Dokaz: Če $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$ in $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$, naj bo $\mathcal{B} := \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$.

Pomanjkljivost: $\mathcal{B}$ ni determinističen, četudi $\mathcal{A}_1$ in $\mathcal{A}_2$ sta, ker ima dve začetni stanji.

Boljša konstrukcija:

$$\mathcal{B} := (Q_1 \times Q_2, A, E, (\overset{\text{zač. st. } \mathcal{A}_1}{\downarrow} i, \overset{\text{zač. st. } \mathcal{A}_2}{\downarrow} i'), F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2 \}$$

$$(q_1, q_2) \xrightarrow{a} (r_1, r_2) \iff \begin{matrix} \vee \mathcal{A}_1 \text{ obstaja } q_1 \xrightarrow{a} r_1 \text{ in} \\ \vee \mathcal{A}_2 \text{ obstaja } q_2 \xrightarrow{a} r_2 \end{matrix}$$

$$(q_1, q_2) \cdot a = (q_1 \cdot a, q_2 \cdot a)$$

Uspesna pot v $\mathcal{B}$:

$$\longrightarrow (i, i') \xrightarrow{a_1} (q_1, q_2) \longrightarrow \dots \xrightarrow{a_n} (r_1, r_2) \longrightarrow$$

$\vee \mathcal{A}_1$ obstaja:

$$\longrightarrow i \xrightarrow{a_1} q_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{a_n} r_1 \quad (1)$$

$\vee \mathcal{A}_2$ obstaja:

$$\longrightarrow i' \xrightarrow{a_1} q_2 \longrightarrow \dots \xrightarrow{a_n} r_2 \quad (2)$$

$$(r_1, r_2) \in F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$$

$$\iff r_1 \in F_1 \vee r_2 \in F_2$$

$$\iff \text{Uspesna bodisi (1) bodisi (2)}$$

$$\Rightarrow L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2)$$

KOMPLEMENT

Trditev: Če je L prepoznaven, je $L^c = A^* \setminus L$ prepoznaven.

Dokaz: Naj bo $L = L(\mathcal{A})$, kjer je $\mathcal{A}$ kompleten determinističen.

$$\mathcal{A} = (Q, A, E, i, F)$$

$$\mathcal{A}' := (Q, A, E, i, Q \setminus F)$$

PRODUKT

Trditev: Če sta L_1 in L_2 prepoznavna, je $L_1 L_2$ prepoznaven.

Dokaz: Naj bosta $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$ in $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$, kjer je $\mathcal{A}_2$ standardni deterministični.

$$\mathcal{A}_1 = (Q_1, A, E_1, I_1, F_1)$$

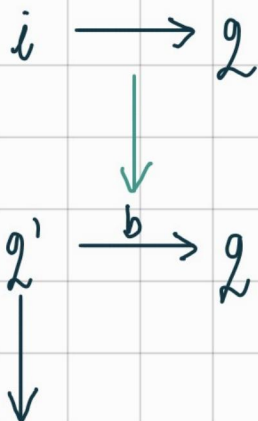
$$\mathcal{A}_2 = (Q_2, A, E_2, i, F_2)$$

Definirajmo $\mathcal{A} := (Q, A, E, I_1, F)$, kjer so:

$$Q := Q_1 \cup (Q_2 \setminus \{i\})$$

$$E := E_1 \cup (E_2 \setminus \{(i, a, q) \in E_2\}) \cup \{(q', a, q) \mid q' \in F_1, q \in Q_2, (i, a, q) \in E_2\}$$

$$F := \begin{cases} F_1 \cup (F_2 \setminus \{i\}) & ; \quad i \in F_2 \\ F_2 & ; \quad i \notin F_2 \end{cases}$$



Pokažimo $L(\mathcal{A}) = L_1 L_2$.

$$1) \underline{L_1 L_2 \subseteq L(\mathcal{A})}$$

Naj bo $u_1 u_2 \in L_1 L_2$.

$$\begin{aligned} u_1 &\in L_1 \\ u_2 &\in L_2 \end{aligned}$$

i) Naj bo $u_2 = 1$.

$$\Rightarrow i \in F_2$$

$$u_1 u_2 = u_1$$

$$u_1 \in L(A_1) \Rightarrow u_1 \in L(A) \Rightarrow u_1 u_2 \in L(A)$$

ii) Naj bo $u_2 \neq 1$.

$$u_1 \in L(A_1) \Rightarrow \begin{array}{c} i_1 \\ i_1 \in F_1 \end{array} \xrightarrow[\dots]{u_1} \begin{array}{c} q_1 \\ q_1 \in F_1 \end{array} \text{ uspešna v } A_1$$

$$u_2 = a \cdot u_2', \quad a \in A$$

$$u_2 \in L(A_2) \Rightarrow i \xrightarrow{a} q \xrightarrow[\dots]{u_2'} q' \text{ uspešna v } A_2$$

$q' \in F_2$

$$\text{Torej: } q_1 \xrightarrow{a} q \xrightarrow[\dots]{u_2'} q' \text{ v } A$$

ni stanja i

Zakaj $q' \neq i$? Ker je A_2 standardni, torej $q' \in F_2 \setminus \{i\} \subseteq F$.

$$\text{Sledi: } u_1 u_2 \in L(A)$$

$$2) \underline{L(A)} \subseteq \underline{L_1 L_2}$$

Naj bo $u \in L(A)$.

$$q_1 \xrightarrow{u \dots} q_2$$

$\in I$ $\in F$

$$i) i \in F_2 \Leftrightarrow F = F_2 \cup (F_2 \setminus \{i\})$$

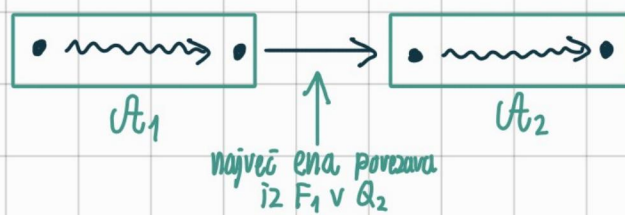
$$I) q_2 \in F_1$$

$$u = u \cdot 1$$

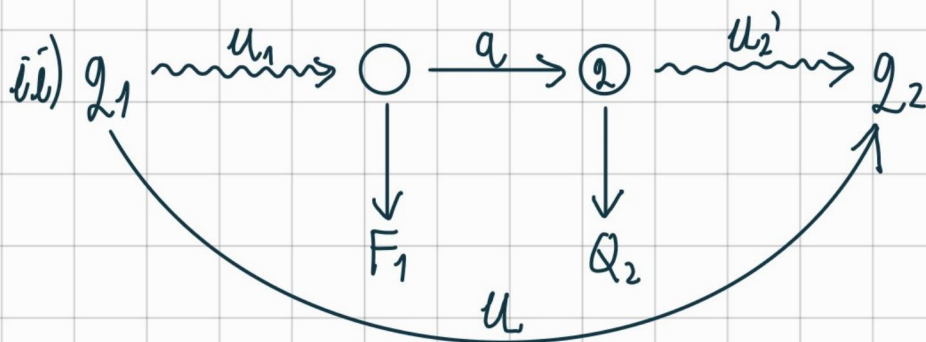
$$u \in L_1$$

$$1 \in L_2$$

Vsaka uspešna pot v A je oblike:



II) Enako kot (ii) ...



Potem: $u = u_1 a u_2'$, kjer $u_1 \in L_1$

V $\mathcal{A}_2$ imamo uspešno pot $i \xrightarrow{a} q \xrightarrow{u_2'} q_2$.

$$a u_2' \in L_2$$

$$\Rightarrow u \in L_1 L_2$$

ZVEZDA

Trditev: Naj bo L prepoznaven. Potem je tudi L^* prepoznaven.

Dokaz: $L^* = 1 + L + L^2 + \dots$

Naj bo $L = L(A)$, kjer je A končni avtomat, ki naj bo determinističen in standarden.

$$A = (Q, A, E, i, F)$$

Definirajmo avtomat A' , kjer je:

$$A' := (Q, A, E', i, F \cup \{i\})$$

$$\text{Želimo } i \rightsquigarrow \bullet \rightsquigarrow q' \xrightarrow{a} \underset{\in F}{q''}$$

$$\text{Dodamo } q' \xrightarrow{a} i$$

$$E' := E \cup \{(q', a, i) ; (q', a, q'') \in E, q'' \in F\}$$

$$\text{Pokažimo } L(A') = L^*.$$

$$1) \underline{L^*} \subseteq \underline{L(A')}$$

$$u \in L^*$$

$$i) u = 1$$

$$i \in F$$

$$\Rightarrow u \in L(A')$$

ii) $u = u_1 \cdots u_n, \quad n \geq 1$

$$u_n \in L(A)$$

$$u_i \neq 1$$

$$u_i = u_i' a_i$$

V A imamo pot:



$u_i = u_i' a_i$ oznacza że pot $i \rightsquigarrow i$

Podobno za $u_2, \dots, u_{n-1}$

Torej lahko sprejmemo po poti $i \xrightarrow{a_n'} q' \xrightarrow{a_n} q''$.

$$2) \underline{L(A')} \subseteq \underline{L^*}$$

$$u \in L(A')$$

i) $u = 1$

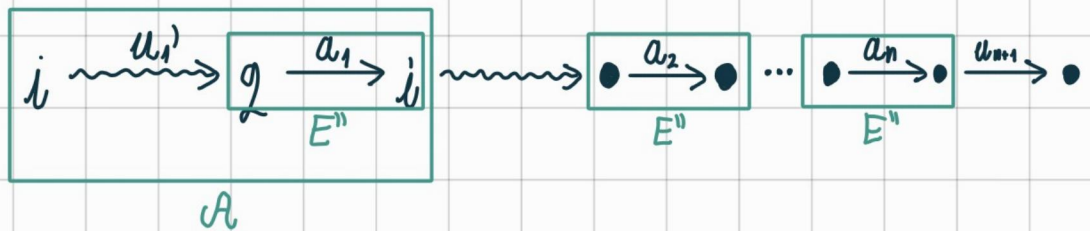
$$\rightarrow i \rightarrow \iff i \in F$$

$$1 \in L^*$$

$$\Rightarrow u \in L^k$$

ii) $u \neq 1$

V A^* imamo uspešno pot:



Če ni nobene povezave iz E'' , je pot u v A oblike:

$$i \rightsquigarrow q \quad \text{Futis}$$

Ker je A standarden in $q \neq i$, je $u \in L(A)$.

Sicer pa:

$$u_1' a_1 \in L(A) = L$$

$$u_2' a_2 \in L(A) = L$$

$\vdots$

$$u_n' a_n \in L(A) = L$$

$$u_{n+1}: i \rightsquigarrow q, q \in F$$

$$u_{n+1} \in L(A)$$

$$\Rightarrow u = (u_1' a_1) \cdots (u_n' a_n) u_{n+1} \in L^*$$

KVOCIENT

Ponovimo:

$$L \subseteq A^*, u \in A^*, K \subseteq A^*$$

$$u^{-1}L = \{v \in A^* ; uv \in L\}$$

$$Lu^{-1} = \{v \in A^* ; vu \in L\}$$

$$K^{-1}L = \{v \in A^* ; uv \in L \text{ za nek } u \in L\}$$

$$LK^{-1} = \{v \in A^* ; vu \in L \text{ za nek } u \in L\}$$

Trditev: Naj bo L prepoznaven jezik. Potem sta $K^{-1}L$ in LK^{-1} prepoznavna za vse $K \subseteq A^*$.

Dokaz: Naj bo $L = L(A)$ za $A = (Q, A, \cdot, q_-, F)$ deterministični avtomat.

Primer $u^{-1}L$:



Definiramo $A' = (Q, A, \cdot, q_- \cdot u, F)$:

$$v \in L(A') \Leftrightarrow (q_- \cdot u) \cdot v \in F \Leftrightarrow q_- \cdot uv \in F$$

$$\Leftrightarrow uv \in L(A) \Leftrightarrow v \in u^{-1}L(A)$$

Primer $K^{-1}L$:



$I' = \{q \in Q ; \text{ obstaja pot iz } q_- \text{ v } q, \text{ katere označa leži v } K\}$

$$A' = (Q, A, \cdot, I', F)$$

$$K^{-1}L = L(A')$$

Primer LK^{-1} :

$$F'' = \{q \in Q \mid \text{obstaja poti iz } q \text{ v stanje iz } F, \text{ katere oznaka leži v } K\}$$

$$A'' = (Q, A, \cdot, q_-, F'')$$

$$\begin{aligned} L(A'') &= \{v \in A^* \mid q_- \cdot v \in F'\} \\ &= \{v \in A^* \mid \exists u \in K: (q_- \cdot v) \cdot u \in F\} \\ &= L(A)K^{-1} \end{aligned}$$

MINIMIZACIJA IN NERODEOV AVTOMAT

Naj bo $L \subseteq A^*$ jezik.

Definirajmo $A = A(L) = (Q, A, \cdot, \overset{\text{začetno stanje}}{q_-}, F)$, kjer je $Q = \{u^{-1}L \mid u \in A^*\}$ in $F = \{u^{-1}L \mid u \in L\}$.

$$u^{-1}L \cdot a = a^{-1}u^{-1}L = (ua)^{-1}L$$

$$q_-^{-1}L \xrightarrow{a} (ua)^{-1}L$$

Avtomat $A(L)$ se imenuje **Nerodeov avtomat** jezika L .

V splošnem je $A(L)$ neskončen avtomat, torej Q ni nujno končna.

Je tudi determinističen, kompleten in dosegljiv.

Izrek (Myhill-Nerodeov izrek):

L je prepoznaven natanko tedaj ko je $\mathcal{A}(L)$ končen avtomat.

Če je L prepoznaven, potem $\mathcal{A}(L)$ prepozna L .

Dokaz: $(\Leftarrow)$ Predpostavimo, da je $\mathcal{A}(L)$ končen avtomat.

Torej je $Q = \{u^{-1}L \mid u \in A^*\}$ končna množica.

Pokažimo, da $\mathcal{A}(L)$ prepozna L , torej $L = L(\mathcal{A}(L))$.

$(\Leftarrow) u \in L$

$$L \xrightarrow{u} q$$

$$u = a_1 \cdots a_n$$

$$L \cdot u = (L \cdot a_1) \cdots a_n$$

$$= a_1^{-1}L \cdot (a_2 \cdots a_n)$$

$$= (a_1 a_2)^{-1}L \cdot (a_3 \cdots a_n)$$

$$= u^{-1}L \in F, \text{ saj } u \in L$$

$$u = 1 \Rightarrow L \cdot 1^{-1} = L$$

$$\Rightarrow u \in L(\mathcal{A}(L))$$

$(\Rightarrow) u \in L(\mathcal{A}(L))$

$$L \xrightarrow{u} q, q \in F$$

$$\Rightarrow L \cdot u \in F$$

$$\parallel$$

$$u^{-1}L \in F \Leftrightarrow u \in F$$

($\Rightarrow$) Naj bo L prepoznaven.

Torej $L = L(A)$ za nek končen determinističen A :

$$A = (Q, A, \cdot, q_-, F)$$

$$|Q| < \infty$$

Vemo: Za $u \in A^*$ $u^{-1}L$ prepozna $(Q, A, \cdot, q_-, u, F)$.

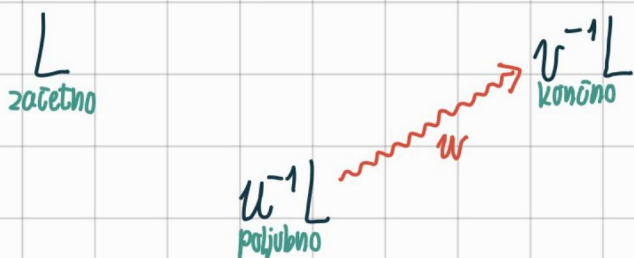
Ker je končno mnogo stanj $q_- \cdot u \in Q$, je končno mnogo kvocientov $u^{-1}L$.

Če $u^{-1}L$ in $v^{-1}L$ prepozna $(Q, A, \cdot, q_-, u = v, F)$,
je $u^{-1}L = v^{-1}L$.

Torej je $A(L)$ končen automat.

Opomba: Tudi, če je $A(L)$ neskončen, $A(L)$ prepozna L .

Ali je $A(L)$ kodosegljiv (in potem tudi obrezan)?



$$u^{-1}L \cdot u = (uu)^{-1}L = v^{-1}L$$

Torej:

$A(L)$ kodosegljiv $\Leftrightarrow \forall u \in A^* : \exists w \in A^* : uw \in L$

$\Leftrightarrow$ Vsaka beseda iz A^* je predpona neke besede iz L

$\Leftrightarrow \forall u \in A^* : u^{-1}L \neq \emptyset$

UREDITEV NA DETERMINISTIČNIH KONČNIH AVTOMATIH

$A = (Q, A, E, q_-, F)$

$A' = (Q', A, E', q_-, F')$

Definicija: Pravimo, da je $A' \leq A$, če obstaja preslikava $p: Q \rightarrow Q'$, da velja:

- $p(q_-) = q_-'$

- $p^{-1}(F') = F$

- $q_1 \xrightarrow[q_1 \cdot a = q_2]{a} q_2$ povezava v A

$$\Rightarrow p(q_1) \xrightarrow[p(q_1) \cdot a = p(q_2)]{a} p(q_2) \text{ povezava v } A'$$

Preslikava p je morfizem iz A v A' .

Ta urejenost je delna urejenost.

Izrek: Naj bo L prepoznaven jezik. Potem je $A(L)$ najmanjši dosegljiv determinističen kompleten avtomat, ki prepozna L . Natančneje, $A(L)$ je tak avtomat z najmanjšim možnim številom stanj.

Dokaz: Naj bo $\mathcal{A} = (Q, A, \cdot, q_-, F)$ končen avtomat, ki prepozna L in je dosegljiv, determinističen in kompleten.

$$L = L(\mathcal{A})$$

Za vsak $q \in Q$ naj bo L_q jezik, ki ga prepozna $\mathcal{A}_q = (Q, A, \cdot, q, F)$, in sicer $L = \mathcal{A}_{q_-}$.

Ker je $\mathcal{A}$ dosegljiv in determinističen, obstaja pot:

$$q_- \xrightarrow{u} q$$

$$q_- \cdot u = q$$

$$\text{Vemo: } L(\mathcal{A}_q) = u^{-1}L$$

Definiramo:

$$p: \begin{array}{l} Q \longrightarrow \{u^{-1}L; u \in A^*\} \\ q \longmapsto L(\mathcal{A}_q) \end{array}$$

Preslikava p je surjektivna:

$$u^{-1}L = p(q) = L(\mathcal{A}_q) \quad (\text{kompl.})$$

$$\Rightarrow \forall u \in A^*: u^{-1}L \in \text{im}(p)$$

Preslikava p je morfizem iz $\mathcal{A}$ v $\mathcal{A}(L)$:

$$p(q_-) = 1^{-1}L = L$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{Q}^1 \\ q_- \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 b^{-1}L_1 &= \underbrace{b^{-1}(a(ab)^*)^*}_{=\emptyset} + \underbrace{b^{-1}(ba)^*}_{=b^{-1}ba \cdot (ba)^*} \\
 &= a(ba)^* =: L_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^{-1}L_2 &= (a^{-1}(ab)^*)(a(ab)^*)^* + a^{-1}(a(ab)^*)^* \\
 &= b(ab)^*(a(ab)^*)^* + (ab)^*(a(ab)^*)^* \\
 &= bL_2 + L_2 =: L_4
 \end{aligned}$$

$$b^{-1}L_2 = \emptyset$$

$$a^{-1}L_3 = (ba)^* =: L_5$$

$$b^{-1}L_3 = \emptyset$$

$$a^{-1}L_4 = \underbrace{a^{-1}(bL_2)}_{=\emptyset} + a^{-1}L_2 = L_4$$

$$b^{-1}L_4 = b^{-1}(bL_2) + b^{-1}L_2 = L_2 + \emptyset = L_2$$

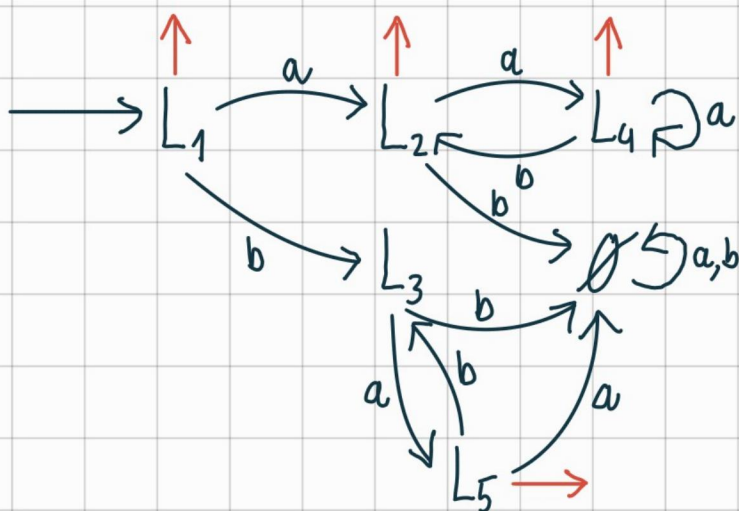
$$a^{-1}L_5 = a^{-1}(ba)(ba)^* = \emptyset$$

$$b^{-1}L_5 = b^{-1}(ba)(ba)^* = a(ba)^* = L_3$$

$$a^{-1}\emptyset = \emptyset$$

$$b^{-1}\emptyset = \emptyset$$

Narissimo:



$$1 \in L \Rightarrow L_1 = 1^{-1}L \in F$$

$$a \in L \Rightarrow L_2 = a^{-1}L \in F$$

$$b \notin L \Rightarrow L_3 = b^{-1}L \notin F$$

$$L_4 = a^{-1}L_2 = a^{-1}a^{-1}L = (a^2)^{-1}L \in F, \text{ saj } a^2 \in L$$

$$L_5 = a^{-1}L_3 = a^{-1}b^{-1}L = (ba)^{-1}L \in F, \text{ saj } ba \in L$$

Ni kodosegljiv

KLEENEJEV IZREK

Izrek: Jezik $L \subseteq A^*$ prepoznaven $\Leftrightarrow L$ racionalen

Dokaz: ($\Leftarrow$) Če je L racionalen ($\{a\}$, unija, produkt, zvezda), je prepoznaven po trditvah o operacijah od prej in ker je $\{a\}$ prepoznaven.

($\Rightarrow$) Predpostavimo, da je L prepoznaven:

$$L = L(A), \text{ } A \text{ determinističen}$$

1. konstrukcija:

Podan je jezik $L = L(A)$ za $A = (Q, A, \cdot, q_-, F)$.

Naj bo $A_2 = (Q, A, \cdot, q_-, F)$ in $L_2 = L(A_2)$.

Cilj: Sistem enačb z n neznankami, kjer je $n = |Q|$, katerega rešitve bodo $L_q, q \in Q$.

Oglejmo si enačbo $KX + L = X$, kjer sta $K, L \subseteq A^*$ jezika in X neznan jezik.

Najprej vmesna trditev ...

Trditev (Ardenova lema):

Predpostavimo $1 \notin K$. Potem ima enačba $KX + L = X$ samo eno rešitev, $X = K^*L$.

Dokaz: Pokažimo, da je K^*L rešitev:

$$K \cdot K^*L + L = K^*L$$

$$(KK^* + 1)L = K^*L$$

$$K \cdot (1 + K + K^2 + \dots) = K + K^2 + \dots = K^+$$

$$K^*L = K^*L \quad \checkmark$$

Predpostavimo, da sta X_1, X_2 rešitvi. Dovolj je pokazati, da je $X_1 \subseteq X_2$.

i) Naj bo $1 \in X_1$.

$$KX_1 + L = X_2$$

$$KX_1 + L = X_1$$

$$1 \in KX_1 + L$$

Ker $1 \notin K$, sledi $1 \in L$.

$$KX_2 + L = X_2$$

Ker $1 \in L$, je potem $1 \in X_2$.

ii) Naj bo $u \in X_2$, $u \neq 1$.

Predpostavimo, da za besede $v \in X_1$, kjer $|v| < |u|$, velja $v \in X_2$.

Pokažimo, da $u \in X_2$.

$$u = a \cdot v, \quad a \in A^+, \quad a \cdot v \in X_1$$

Po enačbi $KX_1 + L = X_1$ velja $av \in KX_1 + L$.

I) Če $av \in L$, ker je $X_2 = KX_2 + L$, sledi $av \in X_2$.

II) Če $av \in KX_1$, je $u = av = \overbrace{a_1 a_2 \dots a_t}^{K \quad X_2} \in KX_1$.

$$u = \overbrace{a}^{K} \cdot \underbrace{v}_{\substack{X_1 \\ \text{pripona}}}$$

Ker $|v| < |u|$, po l.p. velja $v \in X_2$.

Sledi $a \cdot v \in KX_2 \subseteq KX_2 + L$.

$$u = av \in KX_2 + L = X_2.$$

Trditev: Predpostavimo $1 \in K$. Potem so K^*M , $M \supseteq L$ natanko vse rešitve enačbe $KX + L = X$.

Dokaz: Vstavimo $X = K^*M$.

$$K \cdot K^*M + L = K^*M$$

$\parallel$

$$K^+M + L = K^*M$$

($\Rightarrow$) Očitno

$$(\subseteq) K^+M \subseteq K^*M$$

$$L \subseteq M \Rightarrow L \subseteq K^*M$$

$$\Rightarrow K^+M + L \subseteq K^*M$$

Naj bo X rešitev.

$$KX + L = X$$

$$X \supseteq KX + K^2X + \dots = K^+X = K^*X$$

$$K^*X = KK^*X + K^*L = K^*(X + L)$$

$$\text{Sledi } K^*L \subseteq K^*X = X$$

$$\text{Sledi } X = K^* \cdot M, \quad M \supseteq L$$

Oglejmo si sistem:

$$\left. \begin{array}{l} K_{11}X_1 + K_{12}X_2 + \dots + K_{1n}X_n + L_1 = X_1 \\ K_{21}X_1 + K_{22}X_2 + \dots + K_{2n}X_n + L_2 = X_2 \\ \vdots \\ K_{n1}X_1 + K_{n2}X_2 + \dots + K_{nn}X_n + L_n = X_n \end{array} \right\} (*)$$

Naj bo $1 \notin K_{ij}$ za $i, j \in \{1, \dots, n\}$ in $n \in \mathbb{N}$.

Trditev: Sistem (*) ima natanko eno rešitev $(R_1, \dots, R_n)$.

Dokaz: $n=1$:

Ardenova lema

$n \geq 2$:

Predpostavimo, da za vse $k < n$ obstaja natanko ena rešitev.

$$\underline{K_{n1}X_1 + K_{n2}X_2 + \dots + K_{nn}X_n} + \underline{L_n} = X_n$$

$$K_{nn}X_n + L' = X_n$$

$$L' = K_{n1}X_1 + \dots + K_{n,n-1}X_{n-1} + L_n$$

Ker $1 \notin K_{nn}$, obstaja ena rešitev $X_n = K_{nn}^*$.

Vstavimo ta izraz v ostale enačbe.

$$X_n = K_{nn}^* K_{n1}X_1 + \dots + K_{nn}^* K_{n,n-1}X_{n-1} + K_{nn}^* L_n$$

Dobimo sistem s podobno strukturo v spremenljivkah $X_1, \dots, X_{n-1}$, ki ima $n-1$ enačb.

Po I.P. ima ta sistem enolično rešitev.

Dobimo še X_n in imamo enolično rešitev začetnega sistema.

$$\mathcal{A} = (Q, A, E, I, F) \quad , \quad |Q| = n$$

$$\forall p, q \in Q: K_{p, q} = \{ a; (p, a, q) \in E \}$$

$$L_q = \begin{cases} 1 & ; q \in F \\ \emptyset & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Kaj je rezultat tega sistema?

R_q je jezik $L(A_q)$.

