

JEZIKI

Naj bo končna neprazna množica A abeceda.

Jezik nad A je podmnožica množice A^* (množica vseh besed iz A).

Poznamo prazno besedo λ ali 1 .

A^* je monoid za operacijo konkatencije (stika) besed.

A^* je celo prosti monoid nad A :

Če je S za A generiran monoid, potem se preslikava $c: A \rightarrow S$ razširi do homomorfizma $A^* \rightarrow S$.

$a \mapsto a$

Primer:

$$\begin{array}{l} a \mapsto a \\ b \mapsto b \end{array}$$

$\forall S$ se lahko zgodi $a^2b = baab \dots$

OPERACIJE NAD JEZIKI

Booleve operacije:

- Presek $\cap$

- Unija $\cup$
- Komplement ^{c}
- Razlika $L_1 - L_2 := L_1 \cap L_2^c$
- Simetrična razlika

Produkt:

$$L_1, L_2 \subseteq A^*$$

$$L_1 L_2 := \{ uv \mid u \in L_1, v \in L_2 \}$$

Potenciranje:

$$L^0 := \{ \lambda \}$$

$$L^1 := L$$

$$L^{n+1} := L^n L$$

Zvezda in plus:

$$L \subseteq A^*$$

$$L^* := \bigcup_{n \geq 0} L^n = \lambda \cup L \cup L^2 \cup \dots$$

$$L^+ := \bigcup_{n \geq 1} L^n$$

(Dogovor: $\lambda = \{ \lambda \}$)

LASTNOSTI OPERACIJ

1) Produkt je asociativen, λ je enota za množenje:

$$(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3)$$

2) Produkt je distributiven z unijo:

$$L \cdot (L_1 \cup L_2) = L \cdot L_1 \cup L \cdot L_2$$

$$(L_1 \cup L_2) \cdot L = L_1 \cdot L \cup L_2 \cdot L$$

Trditev: Množica jezikov nad A tvori polkoleban glede na $\cup$ kot vsoto in $\cdot$ kot produkt.

Polkoleban $(K, +, \cdot)$ je množica, kjer velja:

1) $(K, +)$ je komutativen monoid z enoto 0 .

2) $(K, \cdot)$ je monoid z enoto 1 .

3) Distributivnost:

$$a(b+c) = ab+ac, \quad (a+b)c = ac+bc \quad \forall a, b, c \in K$$

$$4) a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in K$$

Dokaz: $0 \sim \emptyset$
 $1 \sim \lambda$

Ni pa komutativen, saj $\{a\} \cdot \{b\} \quad \{b\} \cdot \{a\}$
 $\parallel \quad \parallel$
 $\{ab\} \neq \{ba\}$

Včasih namesto $L_1 \cup L_2$ pišemo $L_1 + L_2$.

Primer: Polkolobarji:

1) $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$

2) Jeziki nad A

3) Boolean polkolobar:

$$B = \{0, 1\}$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

$$0 + 0 = 0$$

$$1 + 1 = 1$$

3) Min-plus polkolobar:

$$U = (\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \underset{\text{seštevanje}}{\min}, \underset{\text{množenje}}{+})$$

Enota za $\min$ je ∞

Enota za $+$ je 0

4) $(\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, +, \cdot)$

$$a + \infty = \infty + a = \infty$$

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \quad \forall a \neq 0$$

ŠE VEČ OPERACIJ NAD JEZIKI

Levi in desni kvocient:

$L \subseteq A^*$ jezik
 $u \in A^*$ beseda

$$u^{-1}L := \{v ; uv \in L\} \quad \text{levi kvocient}$$

$$Lu^{-1} := \{v ; vu \in L\} \quad \text{desni kvocient}$$

Trditve: 1) $(uv)^{-1}L = v^{-1}(u^{-1}L)$

$$L(uv)^{-1} = (Lv^{-1})u^{-1}$$

$$2) u^{-1}(L_1 + L_2) = u^{-1}L_1 + u^{-1}L_2$$

$$3) u^{-1}(L_1 \cap L_2) = u^{-1}L_1 \cap u^{-1}L_2$$

$$4) u^{-1}(L_1 - L_2) = u^{-1}L_1 - u^{-1}L_2$$

5) $a \in A$:

$$a^{-1}(L_1 L_2) = \begin{cases} (a^{-1}L_1)L_2 & ; \lambda \notin L_1 \\ (a^{-1}L_1)L_2 + a^{-1}L_2 & ; \lambda \in L_1 \end{cases}$$

6) $a \in A$:

$$\underline{a^{-1}A^* = a^{-1}L(L^*)}$$

$$a^{-1}(\lambda + L^+) = a^{-1} \cdot L \cdot L^*$$

$$= \begin{cases} (a^{-1}L)L^* & ; \lambda \notin \lambda \\ (a^{-1}L)L^* + a^{-1}L^* & ; \lambda \in \lambda \end{cases}$$

(1) ✓

$$(2) a^{-1}L^+ + a^{-1}L^* = a^{-1}(L^+ + L^*) = a^{-1}L^*$$

Primer: Produkt ni distributiven glede na presež:

$$(L_1 \cap L_2) \cdot L \neq L_1 L \cap L_2 L$$

$$\underbrace{(\{b\} \cap \{ba\})}_{=\emptyset} \cdot \underbrace{\{a, aa\}}_{=\emptyset} \neq \underbrace{\{b\} \cdot \{a, aa\}}_{=\{ba, baa\}} \cap \underbrace{\{ba\} \cdot \{a, aa\}}_{=\{baa, baaa\}}$$

Primer: $A = \{a, b\}$

$L = A^* aba A^*$... besede, ki vsebujejo podbesedo aba

$$1^{-1}L = L$$

$$b^{-1}L = b^{-1} \underbrace{A^*}_{L_1} \underbrace{aba}_{L_2} A^* = \underbrace{b^{-1}A^*}_{A^*} aba A^* + \underbrace{b^{-1}(aba A^*)}_{=\emptyset} = L$$

$$a^{-1}L = (a^{-1}A^*) aba A^* + \underbrace{a^{-1}(aba A^*)}_{ba A^*}$$

$$(ab)^{-1}L = \underbrace{((ab)^{-1}A^*)}_{A^*} ab a A^* + \underbrace{(ab)^{-1}(aba A^*)}_{a A^*}$$

$$X \subseteq A^*$$

$$L \subseteq A^*$$

$$X^{-1}L := \bigcup_{u \in U} u^{-1}L \quad \text{levi kvocient } \geq X$$

$$LX^{-1} := \bigcup_{u \in U} L u^{-1} \quad \text{desni kvocient } \geq X$$

Primer: 1) $(X+Y)^{-1}L = X^{-1}L + Y^{-1}L$

$$2) (XY)^{-1}L = Y^{-1}(X^{-1}L)$$

$$3) (X^*)^{-1}L = L + (X^*)^{-1}(X^{-1}L)$$

PREDNOSTI OPERACIJ

$$1) L^*, L^+, L^c$$

$$2) L_1L_2, u^{-1}L, Lu^{-1}$$

$$3) L_1^+L_2, L_1 \cap L_2$$

Primer: $L_1L_2 \cap L_3 = (L_1L_2) \cap L_3$

RACIONALNI JEZIKI

Naj bo A končna neprazna abeceda.

Množica racionalnih jezikov $\mathcal{F}$ je najmanjša množica jezikov, ki zadoščajo:

$$1) \emptyset \in \mathcal{F}, \{a\} \in \mathcal{F} \quad \forall a \in A$$

2) $\mathcal{F}$ je zaprta za končne unije, produkt in $*$.

Množico vseh racionalnih jezikov nad A označimo $\text{Rat}(A^*)$.

Dobra definiranoost:

Vsi jeziki nad A zadoščajo (1) in (2).

Če $\mathcal{F}_i, i \in I$ zadoščajo (1) in (2), $\bigcap \mathcal{F}_i$ zadošča (1) in (2).

Sledi: $\mathcal{F}$ je presek vseh podmnožic A^* , ki zadoščajo (1) in (2).

Vsak končni jezik je racionalen.

$$L = \{a, bab, b^2\} = a + bab + b^2 = a + b \cdot a \cdot b + b \cdot b$$

Naj bo $\mathcal{F}_0$ množica vseh končnih jezikov.

Naj bo $n \geq 0$.

$\mathcal{F}_{n+1}$ je množica jezikov oblike $L_1^+ L_2$, $L_1 L_2$, L_1^* , kjer $L_1, L_2 \in \mathcal{F}_n$.

Dobimo: $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$

Označimo: $\mathcal{F} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$

Trditev: $\mathcal{F} = \text{Rat}(A^*)$

Dokaz: 1) $\mathcal{F}$ zadošča (1) in (2):

$$\begin{aligned} L_1, L_2 \in \mathcal{F} &\Rightarrow L_1 L_2 \in \mathcal{F}_{k+1} \Rightarrow L_1 L_2 \in \mathcal{F} \\ &\Rightarrow \mathcal{F} \supseteq \text{Rat}(A^*) \end{aligned}$$

2) Naj bo X množica jezikov, ki zadošča (1) in (2).

Ker veljata (1) in (2), je $X \supseteq \mathcal{F}_0$.

Ker velja (2), je $X \supseteq \mathcal{F}_1, \dots, X \supseteq \mathcal{F}_n \quad \forall n$.

Sledi $X \subseteq \mathcal{F}$.

$$\text{Torej } \text{Rat}(A^*) = F.$$

Primer: $A = \{a, b\}$

1) $L_1 = (a^+ab^+ba)^*$ zvezda končnega jezika

2) $L_2 = A^*uA^*, u \in A^*$

3) $L_3 = pA^*, p \in A^*$

4) Množica vseh besed sode dolžine: $(A^2)^*$

$$A^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$$

5) Množica vseh besed lihe dolžine: $A \cdot (A^2)^* = (A^2)^* \cdot A$

RACIONALNI IZRAZI

Racionalen izraz je formalen izraz, definiran kot:

1) 1 in 0 sta racionalna izraza

2) $\forall a \in A: a$ je racionalen izraz

3) Če sta e_1, e_2 racionalna izraza, sta $(e_1^+e_2)$ in (e_1e_2) racionalna izraza

4) Če je e racionalni izraz, je tudi (e^*) racionalni izraz

V praksi oklepajev ne pišemo, ko to ni potrebno.

Primer: $A = \{a, b\}$

$$(a^*(ba)^* + (bb^*))^*$$

Primer:

$$e_1 = (a+b)^*$$

$$e_2 = (a^*b)^*a^*$$

$$e_3 = 1 + (a+b)(a+b)^*$$

To so različni racionalni izrazi. Ampak definirajo isti jezik A^* ,
kjer je $A = \{a, b\}$.

Velja identiteta $(a+b)^* = (a^*b)^*a^*$.

Ni končne baze identitet.

(M. Jackson, 1995)

