4) Naj bosta $X \sim Poiss(\lambda)$, $Y \sim Poiss(\mu)$, $\lambda, \mu > 0$. Pokažite s pomočjo rodovnih funkcij, da če sta X in Y neodvisni, potem $X+Y \sim Poiss(\lambda+\mu)$.

Splošno, če je Z slučajna spremenljivka, $Z: \Omega \to \mathbb{N}_0$, potem velja:

- $G_Z(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z=k) \cdot s^k$
- X, Y neodvisni $\Rightarrow G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$

$X \sim Poiss(\lambda) \Rightarrow G_X(s) = e^{-\lambda(1-s)}$

$G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s) = e^{-\lambda(1-s)} \cdot e^{-\mu(1-s)} = e^{-(\lambda-\mu)(1-s)}$

$\rightsquigarrow$ Rodovna funkcija za $Poiss(\lambda+\mu)$ zaradi enoličnosti

---

5) Skupina divjih puranov ima N samic, ki izležejo jajca, $N \sim Poiss(\lambda)$. Vsaka od N samic izleže n jajc, n fiksno število. Naj bo X_i število puranočkov, ki se izvalijo, $X_i \sim Bin(n,p)$, $i \in \{1, \dots, N\}$.

Naj bo $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ število puranočkov.

$X_1, \dots, X_N$ neodvisni
N, X_i neodvisna za vse i

a) Določi rodovno funkcijo $G_X(s)$.

Opomba: Za ustrezne pogoje za nefiksno vsoto velja $G_X(s) = G_N(G_{X_i}(s))$.

$G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$

$G_{X_i}(s) = (1-p+ps)^n$

$\Rightarrow G_N(G_{X_i}(s)) = G_N((1-p-ps)^n) = e^{\lambda((1-p-ps)^n-1)}$

basbkjasfijbafičBEFhebfčibfĆOUEFhćQihćQEFBćef ćfnpčakf
mlaqvida je najbl zakonj fj

ghjhvlnvida je najbl kul osba akr se da. Ćalč ne zna tipkati. :)
fjbsekfbifjslrjkqo

j x ćććććććććććć

b) Ali je $X \sim \text{Poiss}(\text{nekaj})$?

Ne, ker če je $n \geq 1$, nima prave oblike za $G_X(s) = e^{\xi(s-1)}$.

c) Kaj je $\text{var}(X)$?

Lahko uporabimo "law of total variants":

Če sta X in Y slučajni spremenljivki na istem verjetnostnem prostoru, in če je $\text{var}(X) < \infty$, sledi:

$$\text{var}(Y) = E[\text{var}(Y|X)] + \text{var}[E(Y|X)]$$

Naj bo zdaj $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ kot prej.

$$\text{var}(X) = E[N]\,\text{var}(X_1) + \text{var}(N)\,E(X_1)^2$$

Vemo:

- $N \sim Poiss(\lambda)$: $E(N) = \lambda = var(N)$

- $X_1 \sim Binom(n,p)$: $E(X_1) = np$, $var(X_1) = np(1-p)$

Sledi:

$$var(X) = \lambda[np(1-p)] + \lambda(np)^2$$

$$= \lambda np(1-p) + \lambda n^2 p^2$$

$$= \lambda np(1-p+np)$$