DISKRETNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

V verjetnosti nastopajo slučajna števila. Po Kolmogorovu razumemo, da slučajno število nastane tako, da naključno izberemo $\omega \in \Omega$ in uporabimo funkcijo $X: \Omega \to \mathbb{R}$.

Definicija: *Slučajna spremenljivka* X je funkcija $X: \Omega \to \mathbb{R}$ z lastnostjo da je $X^{-1}((a,b])$ dogodek za vsak interval $(a,b]$.

Definicija: Slučajna spremenljivka X je *diskretna*, če je zaloga vrednosti $R(X)$ diskretna množica (končna ali števna).

Opomba: Vzeli smo polodprte intervale po ISO standardih. Lahko bi vzeli tudi zaprte ali odprte in dobili enako.

Opomba: Po naših definicijah so dogodki σ-algebra. Če vzamemo $\mathcal{B} = \{ u \in \mathbb{R} \,;\, X^{-1}(u) \in \mathcal{F} \}$, je $\mathcal{B}$ σ-algebra. Ta σ-algebra vsebuje vse intervale $(a,b]$. Lahko vzamemo najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje vse take intervale, in dobimo *Borelove množice* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Opomba: Za diskretne slučajne spremenljivke je ekvivalentna zahteva, da je $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$ za vse $x \in R(X)$.

Opomba: V verjetnosti bomo namesto $X^{-1}(B)$ pisali $\{X \in B\}$.

Pri slučajnih spremenljivkah, recimo diskretnih, nas zanimajo verjetnosti $P(X^{-1}(\{x\}))$ za vse $x \in R(X)$. Te verjetnosti se seštejejo v 1. Verjetnost 1 je porazdeljena med vse možne izide.

Definicija: Porazdelitev slučajne spremenljivke (diskretne) X je dana z naborom verjetnosti $P(X^{-1}(\{x\}))$ za vse $x \in R(X)$.

Opomba: Namesto $P(X^{-1}(\{x\}))$ pišemo $P(X=x)$.

Definicija: Porazdelitev slučajne spremenljivke X je dana z naborom verjetnosti $P(X \in (a,b))$ za vse $a<b$.

Opomba: Če vemo $P(X \in (a,b))$ za vse $a<b$, vemo $P(X \in B)$ za vse $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

OSNOVNI PRIMERI DISKRETNIH PORAZDELITEV

HIPER-GEOMETRIJSKA PORAZDELITEV

Imamo posodo z B belimi in R rdečimi kroglicami. Naključno izberemo $n \leq B+R$ kroglic, tako da so vsi izbori n kroglic enako verjetni. Naj bo X število belih kroglic med izbranimi.

Možne vrednosti za X so k z mejami:

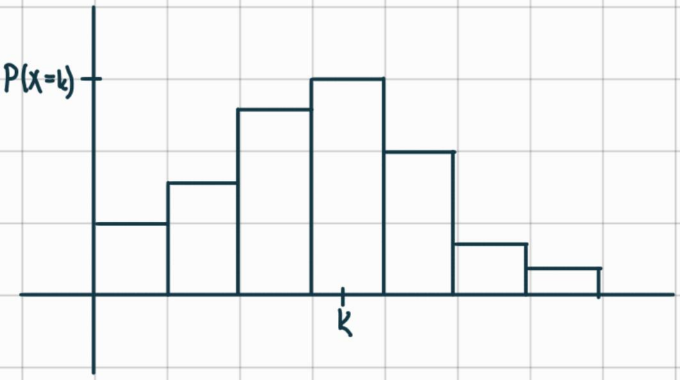
$$\max(0, n-R) \leq k \leq \min(n, B)$$

Označimo $N = B+R$.

Za porazdelitev moramo izračunati $P(X=k)$ za vse možne k.

$$P(X=k) = \frac{\binom{B}{k}\binom{R}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Porazdelitev si ponazorimo s histogramom:



Izračunamo:

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{B-k+1}{k}\cdot\frac{n-k+1}{R-n+k}$$

Iz tega ugotovimo:

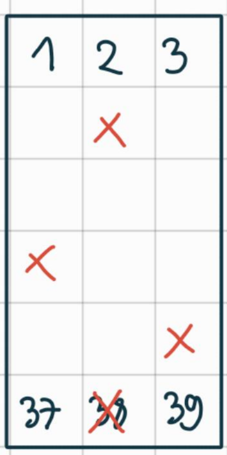
Če je $k < \frac{(B+1)(n+1)}{N+2}$, je $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} > 1$.

i) Če $\frac{(B+1)(n+1)}{N+2}$ ni celo število, obstaja najvišji stolpec pri $\left\lfloor \frac{(B+1)(n+1)}{N+2} \right\rfloor$. Levo stolpci naraščajo, desno padajo.

ii) Če je $\frac{(B+1)(n+1)}{N+2}$ celo število, sta najvišja stolpca dva pri $k = \frac{(B+1)(n+1)}{N+2}$ in $k-1$. Levo stolpci naraščajo, desno padajo.

Oznaka: $X \sim \mathrm{HipGeom}(B, R, n)$

Primer: Pri loterijskem listku imamo 39 števil razporejenih v tri stolpce:



Izberemo od $m = 8$ do $n = 11$ števil. Izžrebanih je 7 števil. Dobitek je odvisen od števila pravilnih števil na listku.

Ideja: Moja izbrana števila pustim bela, ostale pobarvamo rdeče. Kot igralca me zanima število belih med izžrebanimi kroglicami, kar označimo z X.

Vemo: $X \sim \text{HiperGeom}(7, m, 39)$

Zanima nas $P(X=7)$

BINOMSKA PORAZDELITEV

Kovanec mečemo n-krat. Meti so neodvisni. Verjetnost grba je p. Naj bo X število grbov v n metih. Možne vrednosti za X so $k=0,\dots,n$.

Za porazdelitev moramo izračunati $P(X=k)$ za vse možne k.

Vemo: $\Omega = \{G, \bar{G}\}^n$

Predpostavka neodvisnosti implicira:

$$P(\{\omega\}) = p^{\text{št. grbov v nizu } \omega} \cdot (1-p)^{\text{št. cifer v nizu } \omega}$$

V našem primeru:

$X(\omega) =$ št. grbov v nizu k

$$P(X=k) = P(\{\omega \,;\, \omega \text{ vsebuje natanko } k \text{ grbov}\})$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n$$

Rečemo, da ima X binomsko porazdelitev s parametroma n, p.

Oznaka: $X \sim \text{Bin}(n,p)$

Za histogram izračunamo $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}$. Dobimo, da je kvocient večji od 1, če je $k < (n+1)p$.

i) Če $(n+1)p$ ni celo število, je najvišji stolpec pri $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$.

ii) Če je $(n+1)p$ celo število, sta najvišja stolpca dva pri $k = (n+1)p$ in $k-1$.

Naj bo $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. Radi bi ocenili $P(\frac{1}{n}X \geq p+\varepsilon)$.

$$P(\tfrac{1}{n}X \geq p+\varepsilon) = \sum_{k \geq n(p+\varepsilon)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad q := 1-p$$

$$\leq \sum_{k \geq n(p+\varepsilon)} e^{\lambda(k-n(p+\varepsilon))} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda n\varepsilon} \sum_{k \geq n(p+\varepsilon)} \binom{n}{k} (pe^{\lambda q})^k (qe^{-\lambda p})^{n-k}$$

$$\leq e^{-\lambda n\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{\lambda q})^k (qe^{-\lambda p})^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda n\varepsilon} (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$$

$$\leq e^{-\lambda n\varepsilon} \left(p(\cancel{\lambda q +} e^{\lambda^2 q^2}) + q(\cancel{-\lambda p +} e^{\lambda^2 p^2}) \right)^n$$

$$\leq e^{-\lambda n\varepsilon} (pe^{\lambda^2} + qe^{\lambda^2})^n$$

$$= e^{-\lambda n\varepsilon} e^{n\lambda^2}$$

Neenačba velja za $\lambda > 0$. Izberemo λ, kjer izraz doseže minimum. Minimum je dosežen pri $\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon$.

Sklep: $P(\frac{1}{n}X \geq p+\varepsilon) \leq e^{-\frac{1}{4}n\varepsilon^2}$

Opomba: Ideja za oceno je iz teorije velikih odklonov.

Predstavljamo si, da kovanec mečemo v neskončnost.

$A_n := \{$po n metih je relativna frekvenca dogodkov $\geq p+\varepsilon\}$

Vemo, da je $P(A_n) \leq e^{-\frac{1}{4}n\varepsilon^2}$. Torej je $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.

Prva Borel-Cantellijeva lema pravi, da se zgodi le končno mnogo A_n. Če označimo število grbov po n metih z X_n, to pomeni:

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} \geq p+\varepsilon\right) = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Enako dobimo:

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} \leq p-\varepsilon\right) = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Sklep: Z naraščanjem števila metov bo relativna frekvenca grbov konvergirala proti p z verjetnostjo 1.

NEGATIVNA BINOMSKA PORAZDELITEV, GEOMETRIJSKA PORAZDELITEV

Naj bo m fiksno celo število. Kovanec mečemo, dokler ne vidimo m grbov. Meti so neodvisni. Verjetnost grba je $p \in [0,1]$. X je potrebno število metov.

Primer: Naj bo $m=3$. Zanima nas porazdelitev X. Možne vrednosti so $k = m, m+1, \ldots$

$$P(X=k) = P(\underbrace{* * \cdots *}_{\text{vmes mora biti } m-1 \text{ grbov}} G)$$

$$\overset{\text{neodv.}}{=} P(\text{natanko } m-1 \text{ grbov v } k-1 \text{ metih}) \cdot p$$

$$\overset{\text{bin.pr.}}{=} \binom{k-1}{m-1} p^{m-1} q^{k-m} \cdot p$$

$$= \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m} \quad , \quad k = m, m+1, \ldots$$

Rečemo, da ima X negativno binomsko porazdelitev s parametroma m in p.

Oznaka: $X \sim NegBin(m,p)$

Preverimo, da smo res izpeljali porazdelitev. Newtonova formula pravi:

$$\forall |x| < 1 : \quad (1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad , \quad \binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$$

Vstavimo $a := -m$ in $x := -x$:

$$(1-x)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-k+1)}{k!} (-x)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m+1)\cdots(m+k-1)\cdot(m-1)!}{k!\cdot(m-1)!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{m-1} x^k$$

S skoraj enakim računom sledi:

$$(1-x)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k$$

Definicija: Pochammerjev simbol je definiran s predpisom:

$$(a)_0 = 1$$
$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$$

Oziroma:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

Naj bo $X \sim NegBin(m,p)$.

$$\sum_{k=m}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m-1} p^m q^k = p^m (1-q)^{-m} = 1$$

Opomba: V množici $\Omega = \{G, \overline{S}\}^{\mathbb{N}}$ obstajajo tudi izidi, ki ne vsebujejo m grbov. Množica teh izidov ima verjetnost 0. Za njih X ni dobro definirana. V verjetnosti in teoriji mere te primere ignoriramo.

Primer: Banachov problem z vžigalicami:

Banach je bil verižni kadilec. V vsak žep plašča je dal škatlico z n vžigalicami. Vsakič, ko je prižgal cigareto, je naključno segel v en žep in vzel vžigalico iz škatle. Nekoč bo Banach iz žepa potegnil prazno škatlico. Naj bo X število vžigalic v drugi škatlici v tem trenutku. Možne vrednosti X so $k = 0, 1, \ldots, n$. Zanima nas porazdelitev X.

Predstavljajmo si dogodek:

$A_L = \{$v drugi škatlici je k vžigalic, Banach je iz levega žepa potegnil prazno škatlico$\}$

V tem trenutku si Banach prižiga $(n-k)+n-1$ – to cigareto. Pri tej cigareti Banach točno $(n+1)$-ič seže v levi žep.

Če seganje v levi žep definiramo kot uspeh, to ustreza negativni binomski porazdelitvi.

$$P(A_L) = \binom{(2n-k+1)-1}{(n+1)-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(2n-k+1)-(n+1)}$$

$$= \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}$$

$$P(X=k) = P(A_L) + P(A_D) = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Če je $m = 1$, dobimo $P(X=k) = q^{k-1} \cdot p$, $k = 1, 2, \ldots$ Rečemo, da ima X geometrijsko porazdelitev s parametrom p.

Oznaka: $X \sim \text{Geom}(p)$

POISSONOVA PORAZDELITEV

Kovanec mečemo n-krat in hkrati zmanjšujemo verjetnost za grb. Vzemimo $p=\frac{\lambda}{n}$. Fiksirajmo $k \geq 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\cdot n^k}\cdot \lambda^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$$

Če velja $P(X=k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ za $k=0,1,\ldots$, rečemo, da ima X Poissonovo porazdelitev s parametrom $\lambda > 0$.

Oznaka: $X \sim Po(\lambda)$

Opomba: Očitno je $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = 1$.

ZVEZNO PORAZDELJENE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

Lahko si predstavljamo slučajne spremenljivke, ki zavzemajo zvezne vrednosti, npr. v $\mathbb{R}$, (a,b), $[a,b]$, ... Matematična formalizacija je še vedno ta, da so slučajne spremenljivke funkcije na množici izidov Ω. Še vedno zahtevamo, da je $X^{-1}((a,b])$ dogodek za vse $a<b$. Še vedno je porazdelitev X dana z vsemi verjetnostmi $P(X\in(a,b])$ za vse $a<b$.

Definicija: Slučajna spremenljivka X je zvezno porazdeljena, če obstaja nenegativna funkcija $f_X : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, da za vsaka $a<b$ velja:

$$P(X\in(a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

Funkciji f_X rečemo gostota porazdelitve.

Opomba: Definicija je ista, če vzamemo zaprte intervale $[a,b]$.

Opomba: Privzamemo, da je f_X Riemannovo integrabilna na $[a,b]$, mogoče v izlimitiranem smislu, za vsak interval $[a,b]$.

Opomba: Gostot porazdelitev je lahko več, ampak so si med seboj enake skoraj povsod (razlikujejo se kvečjemu na množici z mero 0).

Opomba: Pogosto bomo rekli zvezna slučajna spremenljivka in mislili zvezno porazdeljeno slučajno spremenljivko.

OSNOVNI PRIMERI ZVEZNIH PORAZDELITEV

NORMALNA PORAZDELITEV

Če ima slučajna spremenljivka X gostoto

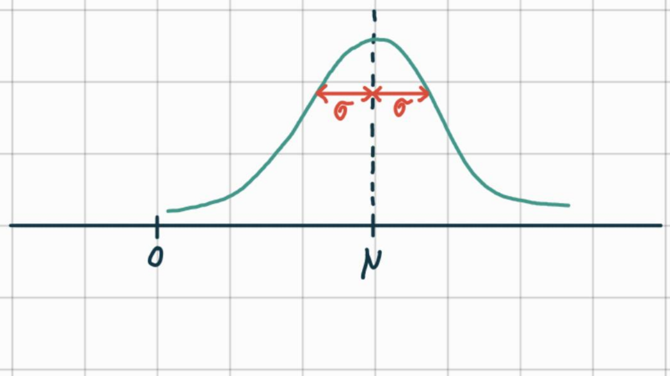
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

rečemo, da je X normalno porazdeljena s parametroma μ in σ.

Oznaka: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Vemo: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$



Rečemo ji tudi Gaussova porazdelitev.

Opomba: Večji σ $\Rightarrow$ Bolj sploščena

GAMA IN EKSPONENTNA PORAZDELITEV

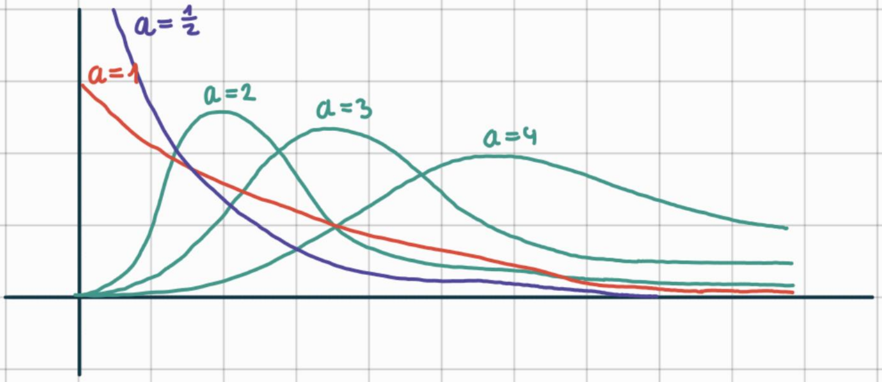
Če je gostota X dana z

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases},$$

rečemo, da ima X gama porazdelitev s parametroma $a, \lambda > 0$.

Oznaka: $X \sim \text{Gama}(a, \lambda)$

Iz definicije $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ in nove spremenljivke $\lambda x = u$ sledi, da se gostota integrira v 1.



Če je $a=1$, dobimo $f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ za $x > 0$. V tem primeru govorimo o eksponentni porazdelitvi s parametrom λ.

Oznaka: $X \sim \exp(\lambda)$

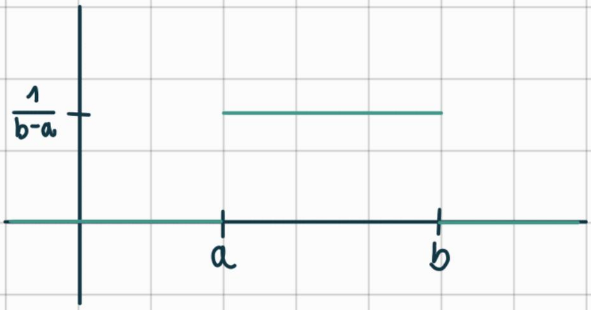
ENAKOMERNA IN BETA PORAZDELITEV

Če izbiramo x naključno na intervalu (a,b), mora biti gostota

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; a < x < b \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$

Rečemo, da ima X enakomerno porazdelitev na intervalu (a,b).

Oznaka: $X \sim U(a,b)$



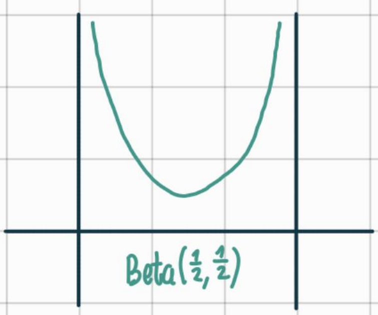
Če je gostota za $p,q > 0$ dana z

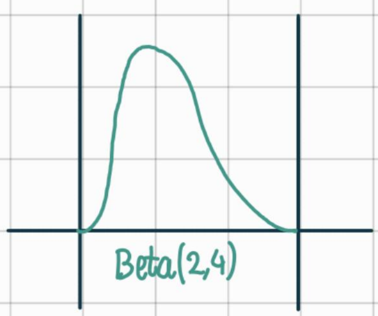
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} & ; \ 0 < x < 1, \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases}$$

rečemo, da ima X beta porazdelitev s parametroma p, q.

Oznaka: $X \sim \mathrm{Beta}(p,q)$

To, da je f_X gostota, izhaja iz definicije beta funkcije.





Pogosto bomo uporabili, da velja:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

FUNKCIJE SLUČAJNIH SPREMENLJIVK

Definicija: Naj bo X slučajna spremenljivka. Porazdelitvena funkcija F_X slučajne spremenljivke X definiramo kot $F_X(x) = P(X \leq x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

Primer: Če je X diskretna, ima F_X skoke velikosti $P(X = x_k)$ v x_k.

Primer: Če je X zvezna z gostoto $f_X(x)$, je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du$.

Izrek 2.1:

Naj bo F_X porazdelitvena funkcija X. Velja:

i) F_X je nepadajoča

ii) $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

iii) F je desno zvezna

Dokaz: i) Iz definicije sledi, da za $x < y$ velja:

$$0 \leq P(x < X < y) = F_X(y) - F_X(x)$$

ii) Definirajmo $A_n = \{X \leq n\}$. Velja $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Velja $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$

Po lemi 1.2 velja:

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = \lim_{n \to \infty} P(X \leq n) = \lim_{n \to \infty} F_X(n)$$

Trditev o limiti sledi iz dejstva, da je F_X nepadajoča.

Definirajmo $B_n = \{X \leq -n\}$. Velja $B_1 \supseteq B_n \supseteq \dots$ in $\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

Velja $0 = P(\emptyset) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(-n)$

iii) Naj bo $x_n \downarrow x$. Označimo $\{X \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\}$. Dogodki v preseku so padajoči.

Po lemi 1.2 sledi:

$$P(X \leq x) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n)$$

$$F_X(x) = \lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$$

To je ena izmed definicij desne zveznosti.

Opomba: Če je $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ za vse $x \in \mathbb{R}$, je f enolično določena do množice z mero 0 natančno. Ker velja $\int_x^y f(u)\,du = F(y) - F(x)$, poznamo intervale po vsakem intervalu $[a,b]$.

Funkcije slučajnih spremenljivk so tudi slučajne spremenljivke pod milimi predpostavkami: Formalno je $X : \Omega \to \mathbb{R}$, za katero je $X^{-1}(B)$ dogodek za vsako $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Če rečemo $Y = f \circ X$, je $Y^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B))$. Če predpostavljamo, da je $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (f je Borelovo merljiva), je kompozitum tudi slučajna spremenljivka.

Primer: Vse zvezne funkcije so Borelovo merljive.

Kako najdemo porazdelitev $Y = f(X)$?

Obravnavali bomo samo zvezni primer. Našli bomo $F_Y(y)$ in sklepali o porazdelitvi Y.

Definicija: Če je $X \sim N(0,1)$, rečemo, da ima X standardizirano normalno porazdelitev.

Porazdelitvena funkcija X ima oznako Φ.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Primer: Naj bo $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$.

Za $y \geq 0$ velja:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \overset{\text{soda}}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \overset{\substack{u^2 = v \\ 2u\,du = dv}}{=}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{y} e^{-\frac{v}{2}} \frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{y} \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-\frac{v}{2}} dv$$

Sklep: $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot e^{-y/2}$; $y > 0$

Opazimo: $Y \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Primer: Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ in $Y \sim aX + b$, $a > 0$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(X \leq \tfrac{y-b}{a}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du \overset{\substack{v = au+b \\ dv = a\,du}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(\frac{v-b}{a} - \sigma)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{dv}{a} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(v-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}} dv$$

Sklep: $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Med drugim je $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. Torej velja:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\tfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \tfrac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\tfrac{x-\mu}{\sigma})$$

Porazdelitveno funkcijo vseh normalnih porazdelitev lahko izrazimo s Φ.

Primer: Naj bo F_X zvezna. Naj bo $Y = F_X(X)$.

Za $y \in (0,1)$ velja:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) =$$

$$= P(X \leq \inf\{z ; F_X(z) > y\}) =$$

$$= F_X(\inf\{z ; F_X(z) > y\}) \overset{\text{zveznost}}{=} y$$

Sklep: Y ima enakomerno porazdelitev na $(0,1)$.

$Y \sim \mathcal{U}(0,1)$

Temu kompozitumu se v statistiki reče verjetnostna transformacija.

Opomba: Če je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$, je v točkah zveznosti $f(u)$ kar $F_X'(x) = f(x)$ zaradi osnovnega izreka analize.