Model:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Y slučajen (opažen) n-razsežni slučajni vektor
X deterministična $n \times m$ matrika
β determinističen neznan m-razsežni vektor
ε neznan n-razsežni slučajni vektor (šum/rezidual)

Predpostavimo: $E(\varepsilon) = 0$, $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I$

Običajno iščemo β.

Izrek Gauss-Markova:

NNLC za β je $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

---

6) Na realni osi imamo točke p_1, p_2, p_3. Izmerimo razdalje p_1, p_2, p_3, $p_1 - p_2$, $p_2 - p_3$, $p_1 - p_3$.

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= p_1 + \varepsilon_1 \\
Y_2 &= p_2 + \varepsilon_2 \\
Y_3 &= p_3 + \varepsilon_3 \\
Y_4 &= p_1 - p_2 + \varepsilon_4 \\
Y_5 &= p_2 - p_3 + \varepsilon_5 \\
Y_6 &= p_1 - p_2 + \varepsilon_6
\end{aligned}
$$

$$\beta = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & -1 & \\ & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_6 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + y_5 + y_6 \end{bmatrix}$$

Velja: $\operatorname{Var} \hat{\beta} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$

Naj bo še $\hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y - X\beta\|^2}{n-m}$ nepristranska cenilka za σ^2.

Če je model Gaussov $(\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I))$, velja še:

- $\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma} \sim N(0, (X^T X)^{-1})$
- $\frac{(n-m)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m)$