VEČRAZSEŽNA NORMALNA PORAZDELITEV

Opomba: $N(\mu, \sigma^2)$ ima gosto $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$X \sim N(\mu, 0) \iff P(X=\mu)=1$

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX+b \sim N(a+b\mu, b^2\sigma^2)$

$Z \sim N(0,1) \Rightarrow \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

Kaj bi si želeli?

1) Če so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ porazdeljene normalno in neodvisne, naj bo tudi $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ porazdeljen večrazsežno normalno.

2) Če je $\underline{X}$ večrazsežen normalni vektor, $\underline{a}$ deterministični vektor, $\underline{\underline{B}}$ pa deterministična matrika, vse kompatibilnih dimenzij, naj bo $\underline{a} + \underline{\underline{B}}\,\underline{X}$ spet večrazsežni normalni vektor.

Definicija: Standardna n-razsežna normalna porazdelitev je porazdelitev slučajnega vektorja $\begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}$, kjer so $Z_1, \ldots, Z_n$ standardne normalne slučajne spremenljivke.

Opazka 7.1: To je porazdelitev z gostoto $\phi_n(z_1, \ldots, z_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{z_1^2 + \ldots + z_n^2}{2}}$ oziroma $\phi_n(\underline{z}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\|\underline{z}\|^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\underline{z}^T\underline{z}}$.

Definicija: Večrazsežna normalna porazdelitev je taka, ki je enaka porazdelitvi slučajnega vektorja $\underline{\underline{A}}\,\underline{Z} + \underline{\mu}$, kjer je $\underline{\underline{A}}$ deterministična matrika, $\underline{\mu}$ deterministični vektor, $\underline{Z}$ pa standardni večrazsežni slučajni vektor, vse kompatibilnih dimenzij.

Opazka 7.2: Zgoraj definirana družina dimenzij je najmanjša družina, ki zadošča zgornjima zahtevama:

Če je $\begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix}$ bločni slučajni vektor z blokoma, ki sta neodvisna in porazdeljena večrazsežno normalno, velja $\underline{X}_1 \overset{d}{=} \underline{\underline{A}}_1 \underline{Z}_1 + \underline{\mu}_1$ in $\underline{X}_2 \overset{d}{=} \underline{\underline{A}}_2 \underline{Z}_2 + \underline{\mu}_2$, kjer sta $\underline{Z}_1$ in $\underline{Z}_2$ neodvisna standardna normalna vektorja.

Tedaj je $\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$ spet standardni slučajni večrazsežni normalni vektor in velja $\begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_1 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{A}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}$, torej je to večrazsežni normalni vektor.

Opazka 7.3: Če je $\underline{Z}$ večrazsežni standardni normalni slučajni vektor in $\underline{X} = \underline{\underline{A}}\,\underline{Z} + \underline{\mu}$, velja:

$$E(\underline{X}) = \underline{\mu}$$

$$\mathrm{var}(\underline{X}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^T$$

Opazka 7.4: Naj bo $\underline{\underline{A}}$ neizrojena kvadratna matrika, $\underline{Z}$ in $\underline{\mu}$ pa kot prej. Tedaj ima $\underline{X} = \underline{\underline{A}}\,\underline{Z} + \underline{\mu}$ gostoto:

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = f_{\underline{Z}}(\underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})) \cdot |\det \underline{\underline{A}}^{-1}|$$

$$= \frac{1}{|\det A|} \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\|\underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})\|^2}$$

$$\|\underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})\|^2 = (\underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}))^T (\underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu}))$$

$$= (\underline{x}-\underline{\mu})^T \underline{\underline{A}}^{-T} \underline{\underline{A}}^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu})$$

$$= (\underline{x}-\underline{\mu})^T (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^T)^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu})$$

Če torej označimo $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^T$, velja:

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \left(\det(2\pi \underline{\underline{\Sigma}})\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu})}$$

Porazdelitev takega slučajnega vektorja $\underline{X}$ je torej enolično določena s pričakovano vrednostjo in kovariančno matriko.

Izrek 7.5: Porazdelitev poljubnega večrazsežnega normalnega slučajnega vektorja je enolično določena z njegovo pričakovano vrednostjo in kovariančno matriko.

Dokaz opustimo.

Opazka 7.6: Za vsak $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^n$ in matriko $\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ki je simetrična in pozitivno semidefinitna, obstaja slučajni vektor $\underline{X}$, za katerega je $E(\underline{X}) = \underline{\mu}$ in $\mathrm{var}(\underline{X}) = \underline{\underline{\Sigma}}$. To je recimo $\underline{X} = \underline{\underline{\Sigma}}^{-1/2} \underline{Z} + \underline{\mu}$.

Definicija: Za $\underline{\mu}$ in $\underline{\underline{\Sigma}}$ kot prej definiramo $N(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}})$ kot večrazsežno normalno porazdelitev s pričakovano vrednostjo $\underline{\mu}$ in kovariančno matriko $\underline{\underline{\Sigma}}$.

$$(\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{\underline{\mu}}, \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^{n\times n} \\ \text{simetrična} \\ \text{pozitivno} \\ \text{semidefintna}}}{\underline{\underline{\Sigma}}}) \longleftrightarrow N(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}})$$

Posledica 7.7: Na enorazsežnih slučajnih spremenljivkah se tu definirani koncept večrazsežne normalne porazdelitve ujema s klasičnim konceptom enorazsežne slučajne spremenljivke.

Opazka 7.8: Če sta $\underline{X}_1 \sim N(\underline{\mu}_1, \underline{\underline{\Sigma}}_1)$ in $\underline{X}_2 \sim N(\underline{\mu}_2, \underline{\underline{\Sigma}}_2)$ neodvisna, potem velja:

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Sigma}}_1 & \\ & \underline{\underline{\Sigma}}_2 \end{bmatrix} \right)$$

Trditev 7.9: Če je bločni slučajni vektor $\begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix}$ porazdeljen večrazsežno normalno in sta njegova bloka nekorelirana, sta tudi neodvisna.

Dokaz: Če vzamemo neodvisna slučajna vektorja $\underline{X}_1' \overset{d}{=} \underline{X}_1$ in $\underline{X}_2' \overset{d}{=} \underline{X}_2$, vemo, da je $\begin{bmatrix} \underline{X}_1' \\ \underline{X}_2' \end{bmatrix}$ prav tako porazdeljen večrazsežno normalno in ima enako pričakovano vrednost in kovariančno matriko kot $\begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix}$. Rezultat sledi iz izreka 7.5.

Opazka 7.10: $\underline{Z} \sim N(\underline{0}_n, \underline{\underline{I}}_n) \Rightarrow \|\underline{Z}\|^2 \sim \chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\underline{W} \sim N\left(\begin{bmatrix} \underline{0}_p \\ \underline{0}_{n-p} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}}_p & 0 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{0}_{n-p} \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \|\underline{W}\|^2 \sim \chi^2(p)$$

Trditev 7.11: Če je $\underline{\underline{H}}$ ortogonalni projektor ranga p in $\underline{X} \sim N(\underline{0}, \underline{\underline{H}})$, je $\|\underline{X}\|^2 \sim \chi^2(p)$.

Dokaz: Obstaja ortogonalna preslikava $\underline{\underline{Q}}$, ki deluje kot:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\operatorname{Im}\underline{\underline{H}} \longrightarrow \mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$$
$$(\operatorname{Im}\underline{\underline{H}})^\perp \longrightarrow \{0\}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$$

$$\|\underline{X}\|^2 = \|\underline{\underline{Q}}\,\underline{X}\|^2$$

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{X} \sim N(\underline{0}, \underbrace{\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{Q}}^T}_{= \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}}_p & 0 \\ 0 & \underline{\underline{0}}_{n-p} \end{bmatrix}})$$

Vemo: $\underline{\underline{H}}$ ortogonalni projektor ranga p, $\underline{X} \sim N(0, \underline{\underline{H}})$

$$\Rightarrow \|\underline{X}\|^2 \sim \chi^2(p)$$

Primer 7.12: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ neodvisne

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim ?$$

Vemo: $Y_i := X_i - \mu$, $\overline{Y} = \overline{X} - \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y}) = \left\| \begin{matrix} Y_1 - \overline{Y} \\ \vdots \\ Y_n - \overline{Y} \end{matrix} \right\|^2 = \|\underline{Y} - \underline{1}_n \overline{Y}\|^2$$

$$= \|\underline{Y} - \underline{1}_n \cdot \tfrac{1}{n} \underline{1}_n^T \underline{Y}\|^2 = \|\underline{\underline{H}}\,\underline{Y}\|^2$$

$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}}_n - \frac{1}{n}\underline{1}_n \underline{1}_n^T$ ortogonalni projektor ranga $n-1$

$$\frac{1}{\sigma}\underline{Y} \sim N(0, \underline{\underline{I}}_n)$$

$$\frac{1}{\sigma}\underline{\underline{H}}\,\underline{Y} \sim N(0, \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{H}}^T) = N(0, \underline{\underline{H}})$$

$$\left\|\frac{1}{\sigma}\underline{\underline{H}}\,\underline{Y}\right\|^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

STUDENTOVA PORAZDELITEV

(William Sealy Gosset, 1876–1937)

Definicija: Studentova porazdelitev s p prostostnimi stopnjami je porazdelitev slučajne spremenljivke $\frac{Z}{\sqrt{G}}$, kjer sta $Z \sim N(0,1)$ in $G \sim \Gamma(\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ neodvisni.

Opazka 7.13: $pG \sim \Gamma(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(p)$

Primer 7.14: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ neodvisne

Vemo: $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Kaj pa $\frac{\overline{X}-\mu}{\hat{\sigma}_+}\sqrt{n}$, kjer je $\hat{\sigma}_+ = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$?

$$\frac{\underbrace{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_+^2}{\sigma^2}}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\hat{\sigma}_+^2}{\sigma^2} = \frac{1}{(n-1)\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{(n-1)\sigma^2}{2\sigma^2}\right) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$

Neodvisnost $\overline{X}$ in $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, ker sta $\overline{X}$ in $\underline{H}\,\underline{X}$ nekorelirana. Podrobnosti na vajah.

Torej: $\frac{\overline{X}-\mu}{\hat{\sigma}_+}\sqrt{n}$ ~ studentova z $n-1$ prostorskimi stopnjami