AMORTIZIRANA ČASOVNA ZAHTEVNOST

1) Razširite sklad z operacijo multipop(k), ki odstrani zgornjih k elementov in ima časovno zahtevnost O(1). Dokažite, da je časovna zahtevnost vseh operacij na skladu (push, pop, multipop) še vedno O(1).

Implementirajmo multipop tako, da samo zmanjša indeks prostega elementa.

Iz predavanj vemo, da imajo vse operacije zahtevnost O(1).

2a) $T(a_i) = \begin{cases} i & ; \; i \text{ oblike } 2^k \text{ za nek } k \in \mathbb{N} \\ 1 & ; \; \text{sicer} \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{n} T(a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} 1 + 1 + 2 + \dots + 2^{\lfloor \log n \rfloor}$$

$$\leq n + 2 \cdot 2^{\lfloor \log n \rfloor}$$

$$\leq n + 2n = 3n$$

$\Rightarrow C = 1 \implies O(1)$

Po računovodski metodi plačamo 3:

- En zase
- Dva za naslednjega oblike 2^i

2b) $T(a_i) = \begin{cases} \log i & ; \ i \text{ sod} \\ 1 & ; \ \text{sicer} \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{n} T(a_i) \leq \sum_{i=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \log(2i) + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$= \sum_{i=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \log i + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil (1 + \underbrace{\log 2}_{=1})$$

$$= \log\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil !\right) + n + 1$$

$$\leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \log \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + n + 1$$

$$\Rightarrow \sum \dots = n \cdot C(n)$$

$$\Rightarrow C(n) = \frac{1}{2} \log \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \qquad \Rightarrow \qquad O(\log n)$$

Lih plača $\frac{1}{2} \log \frac{n+1}{2} + 1$

Sod plača $\frac{1}{2} \log \frac{n}{2} + 1$

2c) $T(a_i) = \begin{cases} 2^{k^2} & ; \ i \text{ oblike } 2^k \text{ za nek } k \in \mathbb{Z} \\ 1 & ; \ \text{sicer} \end{cases}$

$$i = 2^k \longrightarrow 2^{k^2} = 2^{k \cdot k} = i^k$$

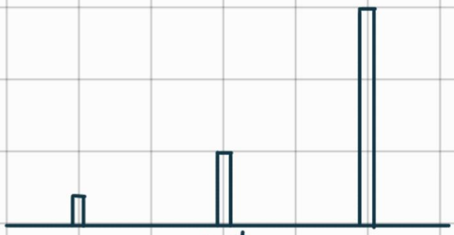
$$\sum_{i=1}^{n} T(a_i) \leq n + \sum_{k=0}^{\log n} 2^{k^2}$$

$$\sum (2^k)^k \leq \left(\sum 2^k\right)^{\log n} \leq (2n-1)^{\log n} \leq (2n)^{\log n} = n n^{\log n} = n^{\log n + 1}$$

$$\sum 2^k = \frac{1 - 2^{\log n + 1}}{1-2} = \frac{1-2n}{-1} = 2n - 1$$

Računovodska metoda:

$[2^{k-1}, 2^k]$, $n = 2^k$



$n = 2^k$

$$2^{k-1} \cdot \tilde{C}(k) = 2^{k^2}$$

$$\tilde{C}(k) = 2^{k^2-k+1}$$

$$\Rightarrow O(1 + 2^{k^2-k+1})$$

$$k = \lceil \log_2 i \rceil$$

$\Rightarrow$ Agregacijska: $C = \frac{2}{n} \cdot 2^{(\log n)^2}$

Računovodska: $C = 2^{(\log n)^2}$

Lažja ampak slabša ocena:

$$\sum_{i=1}^{n} T(a_i) \overset{n=2^l}{\leq} n + \underbrace{\sum_{i=1}^{l} 2^{i^2}}_{O(2^{l^2}) = O(2^{(\log_2 n)^2}) = O(2^{\log_2 n \cdot \log_2 n}) = O(n^{\log_2 n})}$$

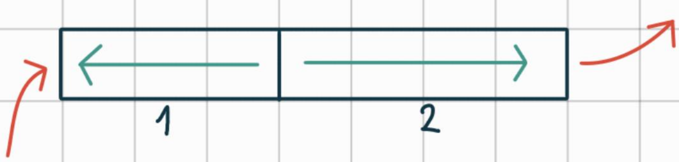
27.1.

Potencialna metoda:

$$\phi(s_0) = 0$$
$$\phi(s) \geq \phi(s_0) = 0$$
$$\hat{c}_i = c_i + \phi(i) - \phi(i-1)$$

---

3) Kakšna je amortizirana časovna zahtevnost vrste, implementirane z dvema skladoma?



inqueue: Dodaj element na prvi sklad.

dequeue: Če je drugi sklad prazen, prestavimo vse iz prvega na drugega, (pri čemer se vrstni red obrne). Poberemo vrhnji element iz drugega sklada.

Agregacijska:

$\sum D \leq \sum I$

Računovodska:

in: $+2$ $\quad -1$ push na S1

de: -1 pop iz S_1 $\quad -1$ push na S2
-1 pop iz S1

Potencialna:

$$\hat{c}_i = c_i + \phi(i) - \phi(i-1)$$

$$\phi(i) = \cancel{|S_1| + |S_2| \leq i} \qquad 2 \cdot |S_1|$$

$$\sum \hat{c}_i = \sum c_i + \phi(n) - \cancel{\phi(0)}^{0}$$

$$I: \hat{c}_i = 1+1 = 2$$

$$D: \hat{c}_i = \begin{cases} 1-0=1 & ; \quad S_2 \text{ ni prazen} \\ 2|S_1|+1+0-2|S_1| & ; \quad S_2 \text{ je prazen} \end{cases}$$

---

1) Razširjen sklad ...

push: $\hat{c}_i = 1+1 = 2$

pop: $\hat{c}_i = 1-1 = 0$

multipop: $\hat{c}_i = \min\{\#el, k\} - \min\{\#el, k\} = 0$

$\Rightarrow \hat{c}_i = O(2)$

BENTLEY-SAXOVA STRUKTURA

Statična struktura

$\downarrow$

Poldinamična struktura (z vstavljanjem)

- Statične strukture v slojih
- Združimo rezultate z $\oplus$

$\downarrow$

Dinamična struktura (z vstavljanjem in brisanjem)

- Vsebovani elementi: Poldinamična
- Izbrisani elementi: Poldinamična

Paziti moramo, da je $O(P(n))$:

- Spravimo izbrisane elemente npr. v set, da je vsebovanost v $O(1)$
- Ko je $|\text{izbrisani}| > \frac{|\text{vsebovani}|}{2}$, popravimo strukturo:

- Novi vstavljeni : Samo neizbrisani

- Novi izbrisani : Prazno