BINOMSKO DREVO

Binomsko drevo B_k je rekurzivno definirano:

1) B_0 je •

2) Za $k \geq 1$ je B_k sestavljeno iz dveh dreves B_{k-1}, kjer koren enega od teh dveh dreves postane najbolj levi otrok drugega drevesa.

Lastnosti B_k $(k \geq 0)$:

1) B_k ima 2^k točk

2) B_k ima višino k

3) B_k ima $\binom{k}{i}$ vozlišč globine i

4) Koren ima k otrok, ostale točke pa manj od k

5) $B_{k-1}, B_{k-2}, \dots, B_0$ $\qquad n = 2^k$

6) Največja stopnja je $\log_2 n = k$

BINOMSKA KOPICA

Množica dvojiških dreves, kjer velja:

1) Vsako vozlišče ima ključ

2) Nobeni dve drevesi nista enake velikosti

3) Urejenost kopice

Operacije na kopici:

1) Ustvari novo kopico: $O(1)$

2) Poišči najmanjši ključ: $O(\log n)$

3) Združi dve kopici: $O(\log n)$

4) Dodaj novo vozlišče: $O(\log n)$

5) Nastavi ključ: $O(\log n)$

6) Odstrani najmanjši ključ: $O(\log n)$

Velja: B_k je prisoten v kopici z n vozlišči
$\iff$ $k+1$-ti bit je enak 1 v dvojiškem zapisu n

FIBONACCIJEVE KOPICE

Poljubna točka v kopici ima kazalce na:

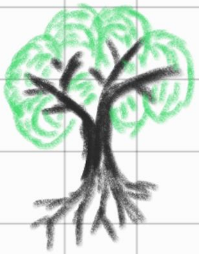
1) Očeta

2) Enega izmed svojih otrok

3) Levega in desnega brata

Ima tudi zabeležen stopnjo (degree, rank).

Potencial kopice: $\Phi(H) = \underbrace{t(H)}_{\text{število dreves}} + 2\underbrace{m(H)}_{\text{število markiranih vozlišč}}$



AMORTIZACIJSKA ANALIZA FIB. KOPICE

$$D_0 \xrightarrow[c_1]{o_1} D_1 \xrightarrow[c_2]{o_2} D_2 \xrightarrow[c_3]{o_3} \cdots \xrightarrow[c_s]{o_s} D_s$$

$\Phi : D_i \to \mathbb{R}$ potencial

c_i ... strošek operacije O_i

$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$ ... amortizirani strošek operacije O_i

$$\sum \hat{c}_i = \sum c_i + \underbrace{\Phi(D_s) - \Phi(D_0)}_{\geq 0}$$

$\Phi_0(H) = 0$, H null

$\Phi(H) = t(H) + 2m(H) \geq 0$

Amortizirani strošek zgornja meja za dejanski strošek.

Za Fibonaccijevo kopico velja:

1) Drevesa niso nujno binomska

2) min(H) kaže na drevo z najmanjšim ključem

3) Stopnje korenov niso nujno enolične

4) Vsako vozlišče ima atribut marked(x), ali je vozlišče x izgubilo otroka odkar je bilo nazadnje določeno kot otrok nekega drugega vozlišča

OPERACIJE NA FIBONACCIJEVI KOPICI

1) Vnos novega ključa:

$c_i = \hat{c}_i = O(1)$

2) Združevanje dveh kopic

$c_i = \hat{c}_i = O(1)$

3) Odstranjevanje najmanjšega ključa:

Dejanski strošek:

$c_i = O(t(H) + \Delta(H))$

Sprememba potenciala:

$\Phi(H) = t(H) + 2m(H)$

$\Delta\Phi = \Phi(H') - \Phi(H) \leq \Delta(H) + 1 - t(H)$

Amortiziran strošek:

$\hat{c}_i = c_i + \Delta\Phi = O(\Delta(H)) + O(t(H)) - t(H) = O(\Delta(H))$

4) Posodobitev kopice

5) Zmanjševanje ključa:

Če po zmanjšanju ključa pri x kopična urejenost ni kršena, potem smo končali.

Sicer odrežemo drevo pri x in ga dodamo v seznam korenov in ga odznačimo, označimo pa očeta od x.

Da ohranimo košatost drevesa, takoj ko neko vozlišče ima drugega odrezanega otroka, tudi njega odrežemo in dodamo v seznam korenov.

Dejanski strošek:

$c_i = O(C)$, C število kaskadnih rezov

Sprememba potenciala:

$\Delta\Phi = \Phi(H') - \Phi(H)$

$t(H') = t(H) + C$

$m(H') \leq m(H) - (C-2)$

$\Rightarrow \Delta\Phi = C + 2(-C+2) = 4 - C$

Amortiziran strošek:

$\hat{c}_i = c_i + \Delta\Phi = 4 - C + O(C) = O(1)$

Velja: $\Delta(H) \leq \log_\varphi n$

$$\Delta(n) := \max_{\substack{H \\ \text{na } n \text{ točkah}}} \Delta(H)$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Trditev: Naj bo x poljubno vozlišče v Fibonaccijevi kopici in predpostavimo $\text{degree}(x) = k$. Naj bodo $y_1, \dots, y_k$ otroci x, našteti v vrstnem redu, v katerem so bili pripeti na x. Potem velja $\text{degree}(y_1) \geq 0$ in $\text{degree}(y_i) \geq i-2$ za $i = 2, \dots, k$.

Lema 4: $F_{k+2} = 1 + \sum_{i=0}^{k} F_i$ za $k \geq 0$

Lema 5: $F_{k+2} \geq \varphi^k$ za $k \geq 0$

Dokaz: $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \geq \varphi^{k-1} + \varphi^{k-2} = \varphi^{k-2}(\underbrace{\varphi + 1}_{=\varphi^2}) = \varphi^k$

Lema 6: x poljubno vozlišče v Fib. kopici na n točkah

$$\Rightarrow \text{size}(x) \geq F_{k+2} \geq \varphi^k$$

$$(|T_x| = \text{size}(x))$$

Dokaz: Naj bo S_k najmanjša možna velikost poddrevesa vozlišča stopnje k v Fib. kopici.

$$S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots$$

Dokažimo z indukcijo na k:

Naj bo z stopnje k in naj bo $\text{size}(z) = S_k$.

$$\mathrm{size}(y_i) \geq S_{\deg(y_i)}$$

Velja: $S_K = F_{K+2}$

$$\mathrm{size}(z) = S_k = \underbrace{1}_{z} + \underbrace{1}_{y_1} + \sum_{i=2}^{k} S_{\deg(y_i)} \geq 2 + \sum_{i=2}^{k} S_{i-2} \geq$$

$$\geq 2 + \sum_{i=2}^{k} F_i \overset{L4}{\geq} 1 + \sum_{i=1}^{k} F_i \overset{L5}{=} F_{k+2} \geq \varphi^k$$

Posledica: Največja stopnja $\Delta(u)$ poljubnega vozlišča u v Fib. kopici z n elementi je $O(\log n)$.

Dokaz: x točka v kopici stopnje k

$$n \geq \mathrm{size}(x) \geq \varphi^k$$

$$\log_\varphi n \geq k$$