PARAMETRIČNE KRIVULJE

$p : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$

$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_d \end{bmatrix}$

- Opis zapletenih krivulj kot grafov $p(I)$
- Opis gibanja objekta $p(t)$ po času

Krivulja p je zvezna/gladka, če je p zvezna/gladka na intervalu I.

Krivulja je regularna, če $p'(t) \neq 0$ za vsak $t \in I$.

Definicija: Reparametrizacija krivulje p je preslikava $q = p \circ \varphi$, kjer je $\varphi : J \to I$, $J \subseteq \mathbb{R}$, $\varphi'(u) > 0$ za vse $u \in J$, $\varphi(J) = I$.

φ bijekcija, $p(I) = q(J) \Rightarrow$ Krivulji enaki kot množici točk

$p(t) = q(u) = p(\varphi(u))$

Katere lastnosti se ohranjajo z reparametrizacijo?

1) Dolžina:

$$L = \int_a^b \|p'(t)\| \, dt$$

2) Enotski tangentni vektor:

$p'(t)$ hitrost

$\frac{p'(t)}{\|p'(t)\|}$ enotska hitrost

3) Ukrivljenost:

$\kappa(t) = \frac{p'(t) \times p''(t)}{\|p'(t)\|_2^3}$ fleksijska ukrivljenost v 2D

kjer je $u \times v = \det([u \ v]) = u_1 v_2 - u_2 v_1$ planarni vektorski produkt

za $u = [u_1, u_2]^T$, $v = [v_1, v_2]^T$

BÉZIERJEVE KRIVULJE

- Parametrične polinomske krivulje
- Zelo primerne za intuitivno geometrijsko grafično oblikovanje
- Namesto običajne potenčne baze konstrukcija sloni na Bernsteinovih polinomih
- Uporabne v računalniški grafiki, avtomobilski in letalski industriji ...
- Obliko krivulje določamo s premiki kontrolnih točk

Primer: Dane so kontrolne točke $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$ in $t \in [0,1]$.

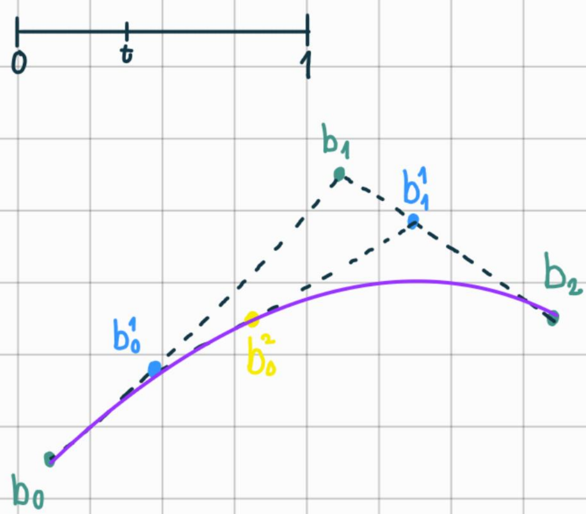
Izračun točke na krivulji pri parametru t dobimo z de Casteljau-jevim algoritmom:

$$b_0^1(t) := (1-t)\cdot b_0 + t\cdot b_1$$

$$b_1^1(t) := (1-t)\cdot b_1 + t\cdot b_2$$

$$b_0^2(t) := (1-t)\cdot b_0^1(t) + t\cdot b_1^1(t)$$

Na primer, naj bo $t=\frac{1}{3}$.



Potem je $b_0^2(t)$ točka na krivulji pri parametru t.

Če vstavimo zgornja dva izraza v spodnjega, dobimo:

$$b_0^2(t) := (1-t)^2 b_0 + 2t(1-t)b_1 + t^2 b_2$$

Torej dobimo parametrični polinom stopnje 2.

de Casteljau-jev algoritem:

Vhod:

Kontrolne točke b_i^0, $i=0,1,\dots,n$
Parameter $t \in [0,1]$

Algoritem:

for $k = 0, 1, \dots, n$:
  for $i = 0, 1, \dots, n-k$:
    $b_i^k = (1-t)\, b_i^{k-1} + t \cdot b_{i+1}^{k-1}$

Izhod:

Točka b_0^n na krivulji

Računamo jih lahko po trikotni shemi:

$$
\begin{tikzcd}
b_0^0 \arrow[dr, "(1-t)\cdot"] & & \\
b_1^0 \arrow[r, "t\cdot"] \arrow[dr, "(1-t)\cdot"] & b_0^1 \arrow[dddr, dotted, no head] & \\
b_2^0 \arrow[r, "t\cdot"] \arrow[dr, "(1-t)\cdot"] & b_1^1 & \\
\vdots \arrow[dr, "(1-t)\cdot"] & \vdots & \\
b_n^0 \arrow[r, "t\cdot"] & b_{n-1}^1 \arrow[r, dashed, no head] & b_0^n
\end{tikzcd}
$$

BERNSTEINOVA OBLIKA BÉZIERJEVIH KRIVULJ

Bernsteinovi polinomi stopnje n:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$
$t \in [0, 1]$

Lastnosti:

- Tvorijo bazo prostora polinomov stopnje največ n
- $B_i^n(t) \geq 0$ (za $t \in [0,1]$)
- $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$
- Tvorijo razčlenitev enote $\left(1 \equiv \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\right)$:

$$1 = 1^n = (t+(1-t))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)$$

- $B_i^n(t)$ ima natanko en ekstrem (max) pri $t = \frac{i}{n}$

- Velja rekurzivna zveza:

$$B_i^n(t) = (1-t) \cdot B_i^{n-1}(t) + t \cdot B_{i-1}^{n-1}(t)$$

(kjer $B_i^{n-1} \equiv 0$ za $i<0$)

- Velja zveza za odvod:

$$\frac{d\, B_i^n(t)}{dt} = n \cdot \left(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\right)$$

(kjer $B_i^{n-1} \equiv 0$ za $i<0$)

Bézierjevo krivuljo b^n s kontrolnimi točkami b_i, $i = 0,1,\ldots,n$, zapišemo v Bernsteinovi bazi kot:

$$b^n(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot B_i^n(t)$$

LASTNOSTI BÉZIERJEVIH KRIVULJ

1) Afina invariantnost:

Če preslikamo kontrolne točke Bézierjeve krivulje z afino preslikavo in na afinih točkah konstruiramo novo Bézierjevo krivuljo, dobimo isto obliko, če vse točke originalne Bézierjeve krivulje preslikamo z isto afino preslikavo.

$$\overset{\text{linearna}}{A} \cdot b^n(t) + \overset{\text{premik}}{c} = A \cdot \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot B_i^n(t) + c$$

$$= \sum_{i=0}^{n} A \cdot b_i \cdot B_i^n(t) + \sum_{i=0}^{n} c \cdot B_i^n(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (A b_i + c)\, B_i^n(t)$$

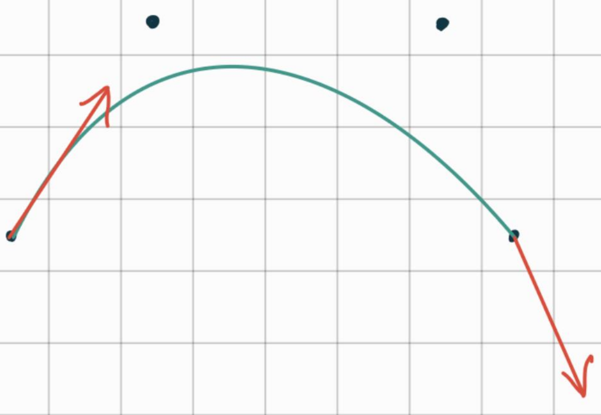
2) Interpolacija krajišč:

Krivulja interpolira krajiščni kontrolni točki.

$$b^n(0) = b_0$$
$$b^n(1) = b_n$$

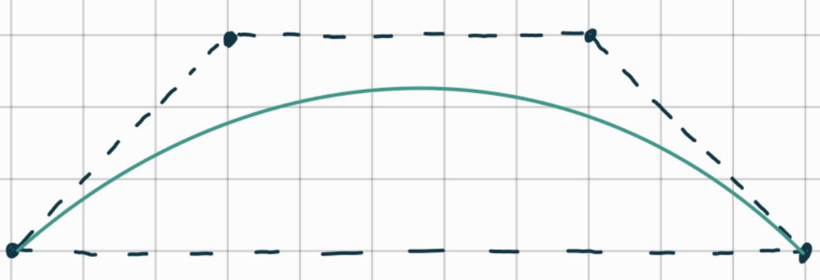
3) Krajiščna tangentna vektorja:

Tangentni vektor Bézierjeve krivulje v točki b_0 $(t=0)$ kaže v smeri $b_1 - b_0$ in je enak $n \cdot (b_1 - b_0)$, v točki b_1 $(t=1)$ pa kaže v smeri $b_n - b_{n-1}$ in je enak $n \cdot (b_n - b_{n-1})$.

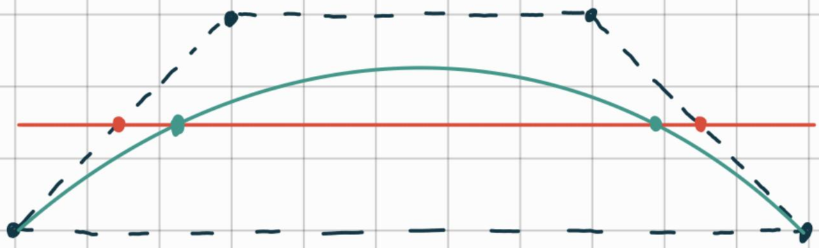


4) Omejenost in nadzor oblike:

Bézierjeva krivulja leži v konveksni ovojnici kontrolnih točk.



Vsaka hiperravnina v $\mathbb{R}^n$ seka krivuljo kvečjemu tolikokrat, kot seka rob poligona $b_0 \to b_1 \to \dots \to b_n \to b_0$.



5) Simetrija:

$$\sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} b_{n-i} \cdot B_{n-i}^n(1-t)$$

6) Višji odvodi:

$$\frac{d^r b^n}{dt^r}(t) = \overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)}^{\text{nove kontrolne točke}} \cdot \sum_{i=0}^{n-r} \overbrace{\Delta^r b_i}^{} \, B_i^{n-r}(t)$$

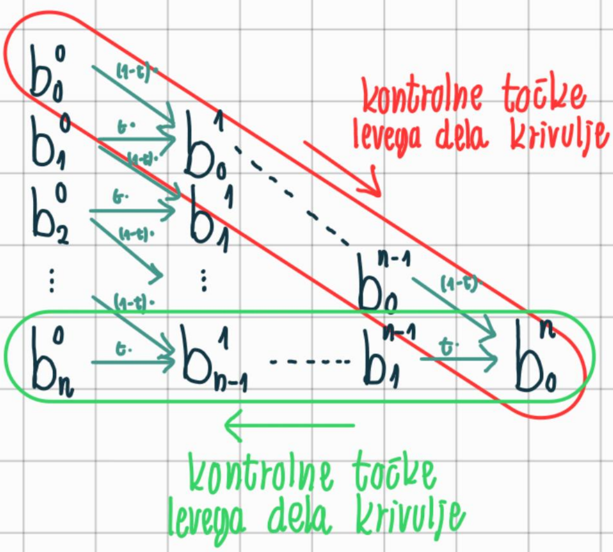
$$\Delta^1 b_i := b_{i+1} - b_i$$

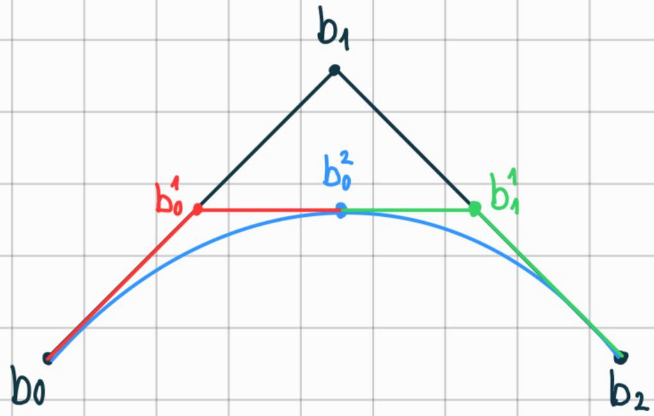
$$\Delta^r b_i := \Delta^1(\Delta^{r-1} b_i) \quad , \quad r > 1$$

$$r = 1: \quad \frac{db^n}{dt}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{n(b_{i+1} - b_i)}^{\text{nove kontrolne točke}} B_i^{n-1}(t)$$

SUBDIVIZIJE BÉZIERJEVIH KRIVULJ

de Casteljaujev algoritem:





ZLEPKI BÉZIERJEVIH KRIVULJ

Lepimo krivulji:

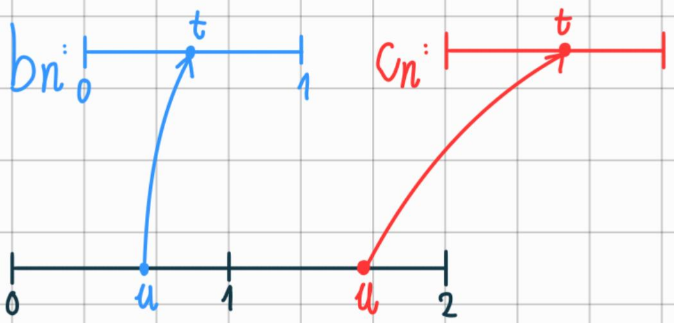
- b^n (s točkami $b_0, b_1, \dots, b_n$)
- c^n (s točkami $c_0, c_1, \dots, c_n$)

Krivulji naj bosta iste stopnje.

Naj bo $u \in [0,2]$ globalni parameter za zlepek:

$$s : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$s|_{[0,1]} = b^n$$
$$s|_{[1,2]} = c^n$$



1) C^0 zveznost:

$$c_0 = b_n$$

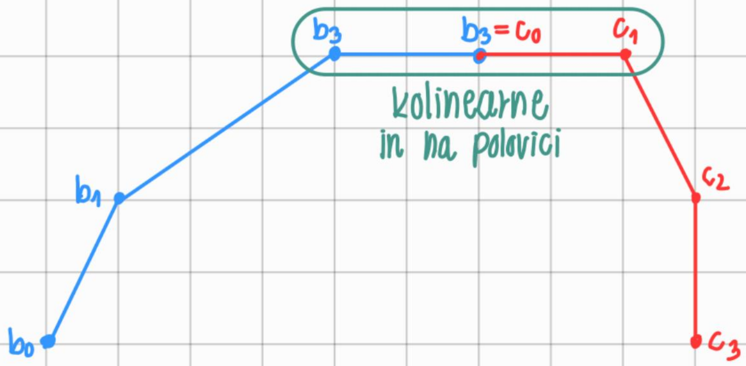
2) C^1 zveznost:

$$\frac{db^n}{dt}(t=1) = \frac{dc^n}{dt}(t=0)$$

$$n(b_n - b_{n-1}) = n(c_1 - c_0)$$

$$\underline{c_1 = c_0 + b_n - b_{n-1}}$$

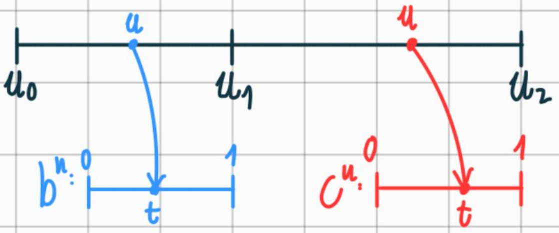
($+ C^0$ zveznost)



Posplošitev, ko $u_0 < u_1 < u_2$:

$$b^n: [u_0, u_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$c^n: [u_1, u_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$



$$t = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \in [0,1] \quad \text{za} \quad u \in [u_0, u_1]$$

$$t = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} \in [0,1] \quad \text{za} \quad u \in [u_1, u_2]$$

1) C^0 zveznost:

$$c_0 = b_n$$

2) C^1 zveznost:

$$\frac{ds}{du}(u_1^-) = \frac{ds}{du}(u_1^+)$$

$$\frac{db^n}{dt}(t=1)\cdot\frac{dt}{du}(u_1^-) = \frac{dc^n}{dt}(t=0)\cdot\frac{dt}{du}(u_1^+)$$

$$n(b_n - b_{n-1})\cdot\frac{1}{u_1-u_0} = n(c_1-c_0)\cdot\frac{1}{u_2-u_0}$$

$$c_1 = c_0 + \frac{u_2-u_1}{u_1-u_0}(b_n - b_{n-1})$$

(+ C^0 zveznost)

Poznamo tudi geometrijsko zveznost:

Graf mora izgledati gladek, neodvisno od parametrizacije.

1) G^0 zveznost = C^0 zveznost

2) G^1 zveznost:

$(c_1-c_0) \parallel (b_n - b_{n-1}) \quad \wedge \quad c_0 = b_n$ leži na daljici $\overline{b_{n-1}c_1}$

($\overrightarrow{b_{n-1}b_n}$ in $\overrightarrow{c_0c_1}$ kažeta v isto smer)

(+ G^0 zveznost)

APROKSIMACIJA KROŽNEGA LOKA

Krožnega loka ne moremo točno parametrizirati s parametričnim polinomom:

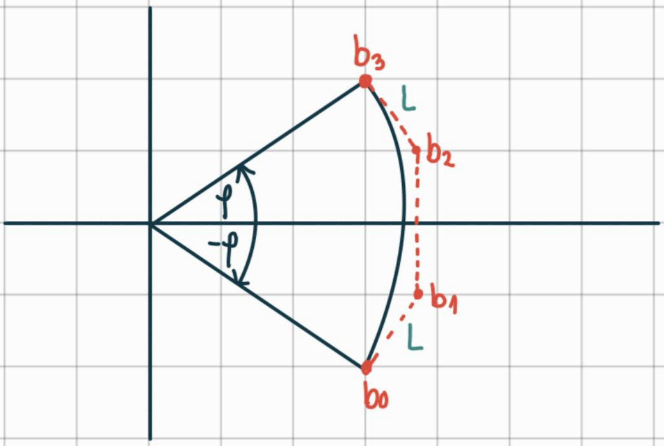
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow p_m(t)^2 + q_n(t)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\underset{\neq 0}{c_m} t^m + \ldots + c_0)^2 + (\underset{\neq 0}{d_n} t^n + \ldots + d_0)^2 = 1$$

Edina možnost je, ko sta p_m in q_n konstantna, kar pa ni parametrizacija krožnega loka.

Krožni lok aproksimirajmo s kubično Bézierjevo krivuljo na sledeči način:



$$L = |b_1 - b_0| = |b_3 - b_2|$$

- Nastavimo b_0, b_3 tako, da interpoliramo krajišči krožnice.
- Nastavimo b_1, b_2 tako, da se krivulja ujema s krožnico v enotskih tangentah v b_0 in b_3 (Hermitova interpolacija).
- Nastavimo razdaljo L med b_0 in b_1 oziroma b_2 in b_3 tako, da pri $t = \frac{1}{2}$ interpoliramo točko $(1,0)$.