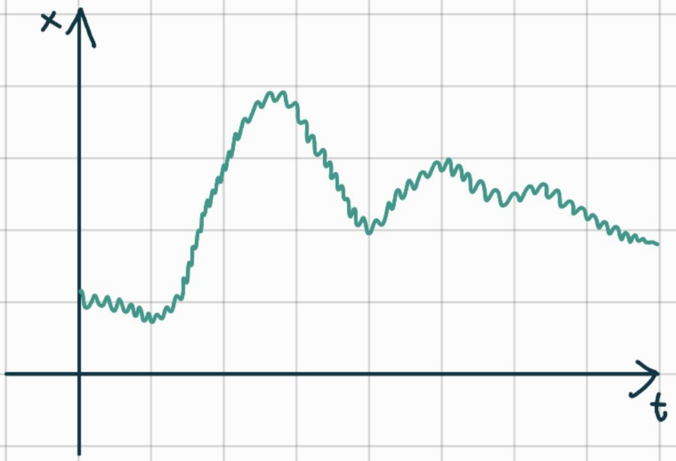
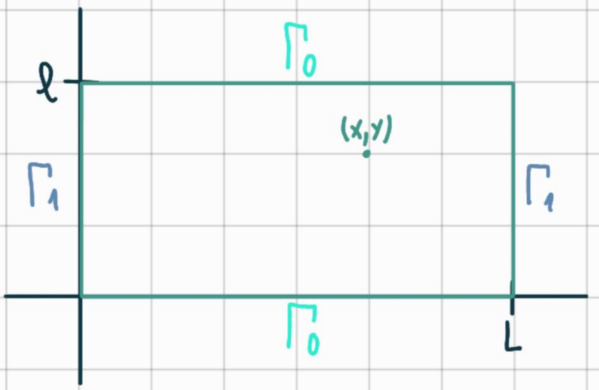
NAKLJUČNO GIBANJE DELCA V PRAVOKOTNIKU

Brownovo gibanje: Naključno zvezno premikanje delca v poljubni smeri



(Funkcija, ki je zvezna, a nikjer odvedljiva)

$\Omega = (0,L) \times (0,\ell)$



$u(x,y)$ ... verjetnost, da bo delec, ki se je začel premikati iz začetne točke (x,y), prvič zapustil pravokotnik preko roba Γ_1

Preden pride delec do roba, se prvič dotakne tudi krožnice $K((x,y), r) =: K$ za dovolj majhen r.

Velja: $u(x,y) = E(u(K)) = \frac{1}{|K|}\int_K u(\tilde{x},\tilde{y})\, d(\tilde{x},\tilde{y})$

Torej je vrednost $u(x,y)$ enaka povprečju vrednosti na krožnici.

Torej je u harmonična funkcija, torej zadošča $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Torej moramo rešiti naslednjo PDE:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{na } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_0 \\ u &= 1 \quad \text{na } \Gamma_1 \end{aligned}\right\} \text{Dirichletovi robni pogoji}$$

Naš problem je tesno povezan z reševanjem toplotne enačbe $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$. Iščemo stacionarno stanje, torej porazdelitev v notranjosti, ko se temperatura v času ne spreminja več, torej $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Rešimo najprej analitično preko Fourierjeve vrste.

Separacija spremenljivk: $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \cdot w_n(y) \quad / \Delta$

$$\Rightarrow \Delta u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta(v_n(x) \cdot w_n(y)) = 0$$

Izkaže se, da lahko zahtevamo, da je $\Delta(v_n(x) \cdot w_n(y)) = 0$ za vsak $n = 0, 1, \ldots$

$$\Delta(v_n(x) \cdot w_n(y)) = v_n''(x) \cdot w_n(y) + v_n(x) \cdot w_n''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v_n''}{v_n}(x) = -\frac{w_n''}{w_n}(y) = C_n \overset{\text{BŠS}}{>} 0$$

Leva stran: $v_n'' = C_n v_n$

Desna stran: $w_n'' = -C_n w_n$

Nastavek:

$v_n(x) = \gamma_n \sinh(\sqrt{c_n}\, x) + \delta_n \cosh(\sqrt{c_n}\, x)$

$w_n(y) = \alpha_n \sin(\sqrt{c_n}\, y) + \beta_n \cos(\sqrt{c_n}\, y)$

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n = ?$

Ničelna robna pogoja:

- $u(x,0) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \cdot \overbrace{w_n(0)}^{\beta_n}$

  $\Rightarrow \forall n: \beta_n = 0$

  (ker so funkcije sinh, cosh lin. neodvisne za različne konstante c_n)

- $u(x,\ell) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \cdot w_n(\ell)$

  $= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \cdot \alpha_n \sin(\sqrt{c_n}\, \ell)$

  $\Rightarrow \sqrt{c_n}\, \ell = n\pi$

  $\Rightarrow c_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$

Iskana rešitev je torej oblike:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \sinh\left(\tfrac{n\pi}{\ell} x\right) + B_n \cosh\left(\tfrac{n\pi}{\ell} x\right)\right) \cdot \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell} y\right)$$

Enasta robna pogoja:

- $u(0,y) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell} y\right)$

  Pomnožimo z $\sin\left(\frac{k\pi}{\ell} y\right)$, $k \in \mathbb{N}$, in integriramo

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_0^{\ell} \underbrace{\sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell} y\right) \sin\left(\tfrac{k\pi}{\ell} y\right)}_{\substack{\text{ortogonalni funkciji} \\ = \begin{cases} 0 \,;\, k \neq \ell \\ \frac{1}{2} \,;\, k = \ell \end{cases}}} dy = \int_0^{\ell} \sin\left(\tfrac{k\pi}{\ell} y\right) dy$$

k sod: desna stran $0 \Rightarrow \frac{1}{2} B_k = 0 \Rightarrow B_k = 0$

k lih: $\frac{1}{2} B_k \overset{DN}{=} \frac{2}{k\pi} \Rightarrow B_k = \frac{4}{k\pi}$

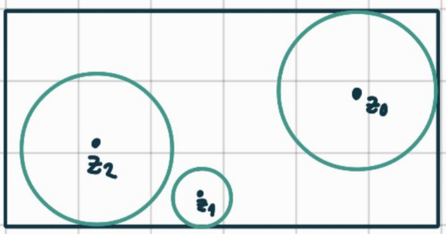
- $u(L,y) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \sinh\left(\tfrac{n\pi}{\ell} L\right) + B_n \cosh\left(\tfrac{n\pi}{\ell} L\right)\right) \sin\left(\tfrac{n\pi}{\ell} y\right)$

Podobno izračunamo A_n ...

k sod: $A_k = 0$

k lih: $A_k = \dfrac{\frac{4}{k\pi}\left(1 - \cosh\left(\frac{k\pi}{\ell} L\right)\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{\ell} L\right)}$

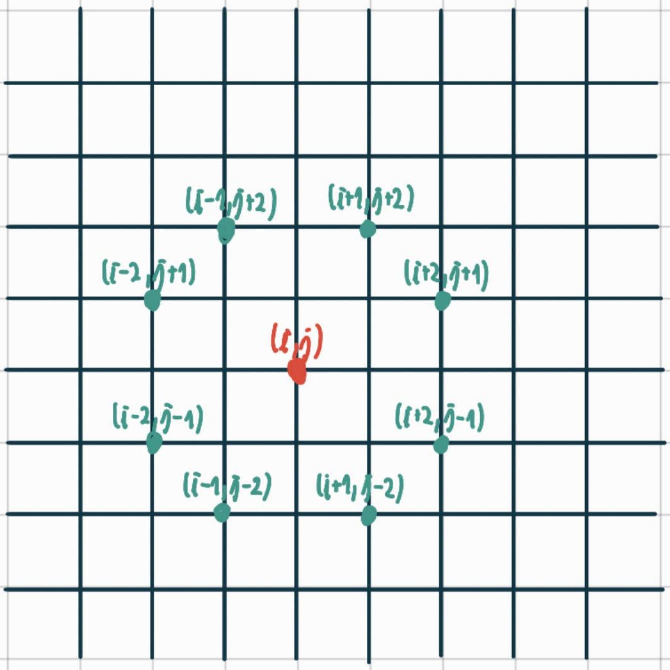
Diskretna verzija:



Končamo, ko je z_n dovolj blizu spodnjega roba.

GIBANJE SKAKAČA PO ŠAHOVNICI

Na šahovnici velikosti 8×8 premikamo skakača z veljavnimi premiki (L). Zanima nas porazdelitvena funkcija za skakača po veliko korakih.



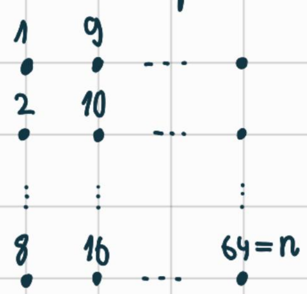
Markovska veriga (MV) je zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, X_3, \dots$ z vrednostmi v množici stanj, za katere velja Markovska lastnost:

$$P(X_{i+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_i = x_i) = P(X_{i+1} = x \mid X_i = x_i)$$

Tej verjetnosti pravimo prehodna verjetnost Markovske verige.

Verjetnost za prehod v naslednje stanje je odvisna le od trenutnega stanja, ne pa od ostalih prejšnjih stanj.

Zaradi enostavnosti zapisa vpeljemo zaporedno indeksiranje polj šahovnice po stolpcih:



$p_{ij} := P(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$ neodvisna od k

$P = [p_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ prehodna matrika MV

$$P = \begin{bmatrix} \sim\sim\sim\sim \end{bmatrix} \Sigma = 1$$

Matrika P je stohastična: Vsi elementi so večji ali enaki 0 ter manjši ali enaki 1, vsaka vrstica pa se sešteje v 1.

$\underline{p}^{(k)} = \begin{bmatrix} p_1^{(k)} \\ \vdots \\ p_n^{(k)} \end{bmatrix}$ porazdelitev po stanjih na k-tem koraku

$\left(p_i^{(k)} = P(X_k = i)\right)$

Primer: $\underline{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Na koraku $k=0$ se konjiček nahaja v stanju 1 (zgoraj levo).

Na $(k+1)$-tem koraku dobimo stanje:

$$\underline{p}^{(k+1)} = P^T \cdot \underline{p}^{(k)}$$

Primer:
$$\underset{P^T}{\begin{bmatrix} & \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \vdots \\ \frac{1}{8} \end{matrix}} & \end{bmatrix}} \underset{\underline{p}^{(0)}}{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \vdots \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Opomba: $\underline{p}^{(k+2)} = P^T \cdot P^T \cdot \underline{p}^{(k)}$

Porazdelitev $\underline{p}$ je limitna porazdelitev Markovske verige, če velja:

$$\underline{p} = \lim_{k \to \infty} \underline{p}^{(k)}$$

Velja: $\underline{p} = \lim_{k\to\infty} \underline{p}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \underline{p}^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} P^T \cdot \underline{p}^{(k)} = P^T \cdot \lim_{k\to\infty} \underline{p}^{(k)} = P^T \cdot \underline{p}$

Torej je $\underline{p}$ desni lastni vektor matrike P^T za lastno vrednost 1.

Če želimo določiti limitno porazdelitev, moramo samo izračunati desni lastni vektor in ga ustrezno skalirati.

Potenčna metoda:

$$
\begin{aligned}
&\underline{p}^{(0)} \\
&\text{for } k = 1, 2, \ldots: \\
&\quad \underline{p}^{(k)} = P^T \cdot \underline{p}^{(k-1)} \\
&\quad \underline{p}^{(k)} = \frac{\underline{p}^{(k)}}{\|\underline{p}^{(k)}\|_2}
\end{aligned}
$$

Po smeri $\underline{p}^{(k)}$ konvergira k $\underline{p}$, če pripada dominantni lastni vrednosti λ ($\forall$ l.vr. μ: $|\lambda| > |\mu|$).

Ali je 1 dominantna lastna vrednost?

- $P \cdot \underline{1} = \underline{1}$, $\underline{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

  $\Rightarrow$ 1 lastna vrednost za P in P^T

- Velja: $P \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x} \Rightarrow |\lambda| \leq 1$ (DN)
- Iz Perron-Frobeniusovega izreka sledi, da je 1 enostavna lastna vrednost.
- Tudi -1 je lastna vrednost, saj MV tvori povezan dvodelen graf.

Torej 1 ni dominantna lastna vrednost.

Zato za potenčno metodo namesto matrike P^T vzamemo matriko $P^T + \alpha \cdot I$, $\alpha > 0$. $P^T + \alpha I$ ima lastne vrednosti na intervalu $[-1+\alpha, 1+\alpha]$, torej bo $1+\alpha$ dominantna.