SCHWARTZOVE FUNKCIJE

Definicija: Naj bosta $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ in $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Schwartzova polnorma je definirana kot:

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial^\beta f)(x)|$$

Kjer označimo:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$
$$\partial^\beta f := \partial_{x_1}^{\beta_1} \circ \ldots \circ \partial_{x_n}^{\beta_n} f$$

Velja:

- $\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$
- $\rho(\lambda f) = |\lambda| \cdot \rho(f)$

Definicija: Schwartzov razred je definiran kot:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,;\, \rho_{\alpha,\beta}(f) < \infty \ \forall \alpha, \beta\}$$

Velja:

- $C_c^\infty \subseteq \mathcal{S} \subseteq C^\infty$
- $\forall f \in C^\infty: \quad f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n : \forall N \in \mathbb{N}:$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N\cdot|(\partial^\beta f)(x)|<\infty$$

Za $g\in\mathcal{S}$, $m\in\mathbb{N}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$ definiramo:

$$V^m_{\alpha,\beta}(g):=\{f\in\mathcal{S}\ ;\ \rho_{\alpha,\beta}(f-g)<\tfrac{1}{m}\}$$

Velja:

- $f_k\to f$ v $\mathcal{S}$ $\Leftrightarrow$ $\rho_{\alpha,\beta}(f_k-f)\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ $\forall\alpha,\beta$

FOURIERJEVA TRANSFORMACIJA

Za $x,\xi\in\mathbb{R}^n$ označimo $x\cdot\xi=\langle x,\xi\rangle=x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n$.

Definicija: Za $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiramo:

$$\hat{f}(\xi):=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx$$

Funkcijo $\hat{f}$ imenujemo Fourierjeva transformiranka funkcije f, preslikavo $\mathcal{F}:f\mapsto\hat{f}$ pa imenujemo Fourierjeva transformacija.

Oznake:

- Translacije/premiki τ^y: $(\tau^y)(x)=f(x-y)$, $y\in\mathbb{R}^n$
- Dilatacije/raztegi δ^t: $(\delta^t)(x)=f(tx)$, $t>0$
- Inverzija: $\tilde{f}(x)=f(-x)$
- $(\mathcal{N}_y f)(x)=e^{2\pi i\langle x,y\rangle}f(x)$

Izrek: Naj bosta $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Naj bodo $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ in $t > 0$. Potem velja:

1) $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$: $\sup|\hat{f}| \leq \int |f|$

2) $\mathcal{F}$ je linearen operator na $\mathcal{S}$

3) $\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}}$

4) $\hat{\bar{f}} = \overline{\tilde{\hat{f}}}$

5) $\widehat{\tau^y f}(\xi) = e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} \hat{f}(\xi)$

6) $\widehat{e^{2\pi i \langle x, y \rangle} f(x)}(\xi) = (\tau^y \hat{f})(\xi)$ oziroma $\widehat{\tau^y f} = \mu_{-y} \hat{f}$

7) $\widehat{\delta^t f} = t^{-n} \delta^{t^{-1}} \hat{f}$

8) $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$!

9) $(\partial^\alpha \hat{f})(\xi) = \widehat{(-2\pi i x)^\alpha f}(\xi)$

10) $\hat{f} \in \mathcal{S}$!

11) $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$, $(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$ konvolucija !

12) $\widehat{f \circ A} = \hat{f} \circ A$ za poljubno ortogonalno matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\mathcal{F} \circ M_A = M_A \circ \mathcal{F}$ za $M_A g := g \circ A$

13) $f(x) = e^{-\pi |x|^2} \Rightarrow \hat{f} = f$

14) $\mathcal{F}$ slika radialne funkcije v radialne

Radialna funkcija:

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \wedge |x_1| = |x_2| \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Dokaz: DN

Označimo: $\check{f}(x) := \hat{f}(-x)$

To je inverzna Fourierjeva transformiranka. Utemeljitev:

Izrek: Za $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ velja:

1) $\int f \hat{g} = \int \hat{f} g$

2) $(\hat{f})^\vee = (\check{f})^\wedge = f$

(inverzna formula)

3) $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ za $\langle \varphi, \psi \rangle := \int \varphi \overline{\psi}$

(Parsevalova enakost)

4) $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|\check{f}\|_2$

(Plancheverlova identiteta)

5) $\int f g = \int \hat{f} \check{g}$

Dokaz opustimo.

Izrek: $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ je homeomorfizem.

Predbaza/podbaza za topologijo:

$$V^n_{\alpha,\beta}(g) := \rho^{-1}_{\alpha,\beta}([0,\tfrac{1}{m}]) + g$$

Dokaz: Bijektivnost:

Že vemo.

Zveznost:

Naj za $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ velja $g_k \to 0$ v $\mathcal{S}$.

Želimo pokazati $\hat{g}_k \to 0$ v $\mathcal{S}$.

To pomeni, da za vsak $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ velja:

$$\rho_{\alpha,\beta}(\hat{g}_k) \longrightarrow 0 \text{ za } k \to \infty$$

Računamo:

$$|\xi^\alpha(\partial^\beta \hat{g}_k)(\xi)| \overset{(9)}{=} (2\pi)^{|\beta|}\,|\xi^\alpha \widehat{x^\beta g_k}(\xi)|$$

$$\overset{(8)}{=} (2\pi)^{|\beta|} \cdot |\widehat{\partial^\alpha(x^\beta g_k)}(\xi)|$$

$$\Rightarrow \rho_{\alpha,\beta}(\hat{g}_k) = (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}\,\|\widehat{\partial^\alpha(x^\beta g_k)}\|_\infty$$

$$\overset{(1)}{\le} (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}\,\underbrace{\|\partial^\alpha(x^\beta g_k)\|_1}_{\overset{(DN)}{\le} C_n \sum_{|\gamma|\le n+1} \rho_{\gamma,\alpha}(x^\beta g_k)}$$

Radi bi se znebili x^β.

Velja: $\rho_{\gamma,\alpha}(x^\beta g_k) = \|x^\gamma \underbrace{\partial^\alpha (x^\beta g_k)}_{\text{turbo Leibnizova formula}}\|_\infty$

To je linearna kombinacija elementov oblike $x^\sigma(\partial^\varepsilon g_k)$.

Torej lahko $\rho_{\alpha,\beta}(\hat{g}_k)$ majoriziramo s (končno) linearno kombinacijo izrazov oblike $\rho_{A,B}(g_k)$, kjer so A, B neodvisni od k.

$$\rho_{\alpha,\beta}(\hat{g}_k) \leq \sum_{j=1}^{M} \underbrace{\rho_{A_j,B_j}(g_k)}_{\xrightarrow{k\to 0}\, 0}$$

Dokazali smo zveznost.

Zveznost inverza:

Podobno:

Opomba: Ne velja $\mathcal{F}: C_c^\infty \to C_c^\infty$!

Izrek (Riemman-Lebesguova lema):

Za poljuben $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ je $\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

Dokaz: Če je $f \in \mathcal{S}$, je tudi $\hat{f} \in \mathcal{S}$, zato sklep velja:

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

$$|\hat{f}(\xi)| = \frac{\overbrace{|\xi_i \hat{f}(\xi)|}^{\hat{f}\in\mathcal{S} \Rightarrow \text{omejena}}}{|\xi_i|} \xrightarrow[|\xi_i|\to\infty]{} 0$$

Sedaj vzemimo $f \in L^1$.

Velja:

- $\mathcal{C}_c^\infty \subseteq \mathcal{S} \subseteq L^1$
- $\mathcal{C}_c^\infty$ gosta v L^1

Sledi: $\mathcal{S}$ gosta v L^1

Vzemimo $g \in \mathcal{C}_c^\infty$.

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)|$$
$$\leq \|\widehat{f-g}\|_{L^1} + |\hat{g}(\xi)|$$

Vzemimo $\varepsilon > 0$. Izberimo tak $g \in \mathcal{C}_c^\infty$, da je $\|f-g\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Za tak g izberimo $M > 0$, da za vse $|\xi| > M$ velja $|\hat{g}(\xi)| < \varepsilon$.

Trditev sledi.

Razširitev $\mathcal{F}$ na L^p, $1 < p \leq 2$:

Plancherevetova identiteta: $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ za $f \in \mathcal{S}$

Ker je $\mathcal{S}$ gosta tudi v L^2, s tem $\mathcal{F}$ razširimo do izometrije na L^2:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}\, dx$$

Vzemimo $g \in L^2$.

Obstaja tako $(g_n)_n \subseteq \mathcal{S}$, da velja $g_n \to g$ v L^2.

$\Rightarrow$ $(g_n)_n$ Cauchyjevo v L^2

Plancherel

$\Rightarrow (\hat{g}_n)_n$ Cauchyjevo v L^2

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \hat{g}_n =: \hat{g}$ v L^2

Če je $f \in L^p$, $p \in (1,2)$, pišemo:

$f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L_1$, $f_2 \in L_2$

$\|f\|_p^p = \int |f|^p$

Vpeljemo:

$f_1 := f \cdot \chi_{\{|f|>1\}}$

$f_2 := f \cdot \chi_{\{|f|\leq 1\}}$

$\Rightarrow t \leq t^p$, $t^2 \leq t^p$

($p \mapsto t^p$ za vsak $t \in (0,\infty)$)

Definiramo:

$\hat{f} := \hat{f}_1 + \hat{f}_2$

po definiciji z integralom

z razširitvijo

Ta definicija je dobra.

Izrek (Hausdorff-Young):

Za poljubna $p \in [1,2]$ in $f \in L^p$ velja:

$$\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p \quad ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Izrek (Beckner, 1975):

Za poljubna $p \in [1,2]$ in $f \in L^p$ velja:

$$\|\hat{f}\|_q \leq \left(\frac{p^{1/p}}{q^{1/q}}\right)^{n/2} \cdot \|f\|_p \quad ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

To je natančna ocena. Ekstremalne so Gaussove funkcije.

UMIRJENE DISTRIBUCIJE

(angl. tempered distributions)

Označimo: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) :=$ dual $\mathcal{S}$, prostor zveznih linearnih funkcionalov na $\mathcal{S}$

Pripadajoča šibko*-topologija:

Če so $T_k, T \in \mathcal{S}$, tedaj velja:

$$T_k \to T \text{ v } \mathcal{S}' \Leftrightarrow T_k f \to Tf \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

Trditev: Naj bo $\Lambda : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ linearna. Tedaj velja:

$$\Lambda \in \mathcal{S}' \Leftrightarrow \exists C > 0 : \exists k, m \in \mathbb{N} :$$

$$|\Lambda f| \leq C \cdot \sum_{\substack{|\alpha| \leq n \\ |\beta| \leq k}} \rho_{\alpha,\beta}(f)$$

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{y} |y^\alpha (\partial^\beta f)(y)|$$

Primer: Diracova distribucija (evaluacija v točki 0):

$$\delta(f) := f(0)$$

$$\rho_{0,0}(f) = \sup_{y} |f(y)| = \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow |\delta(f)| \leq \rho_{0,0}(f)$$

Primer: Vsak $g \in L^p$ identificiramo z linearnim funkcionalom $\Lambda_g : f \mapsto \int fg$.

Ta Λ_g je umirjena distribucija:

Vzemimo $m \in \mathbb{N}$, da velja $(1+|x|^2)^{-m} \in L^q$.

Za $f \in \mathcal{S}$ velja:

$$|\Lambda_g(f)| = \left|\int fg\right| = \left|\int \underbrace{f(x)(1+|x|^2)^m}_{\substack{|\cdot| \leq \sum_{|\alpha|\leq 2m} \rho_{\alpha,0}(f) < \infty \\ (\text{saj } f \in \mathcal{S})}} \cdot (1+|x|^2)^{-m} g(x)\, dx\right| \leq *$$

Hölderjeva neenakost:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int |\varphi\psi| \leq \left(\int |\varphi|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int |\psi|^q\right)^{1/q}$$

$$\|\varphi\psi\|_1 \leq \|\varphi\|_p \cdot \|\psi\|_q$$

$$\forall \varphi \in L^p \ \forall \psi \in L^q$$

$$* \overset{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{|\alpha| \leq 2m} \rho_{\alpha,0}(f) \cdot \|(1+|x|^2)^{-m}\|_q \, \|g\|_q \quad < \infty \qquad (\text{ker } g \in L^p)$$

Torej je res $\Lambda_g \in \mathcal{S}'$.

Dovolj je, da je g polinomsko omejena: $|g| \lesssim (1+|x|)^k$

Primer: $\log|x| \in \mathcal{S}'$

$$\Lambda f := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\log|x|\,dx \quad ; \ f \in \mathcal{S}'$$

Utemeljitev:

$$\int_{\mathbb{R}^n} = \int_{\{|x|\le 1\}} + \int_{\{|x|>1\}} = I + II$$

II: V redu, saj je $\log|x| \le |x|$.

I: Ocenimo $|f(x)| \le \|f\|_\infty$. Ostane $\int \log|x| < \infty$.

Ugotovitev:

h integrabilna v okolici 0 in polinomsko omejena sicer

$\Rightarrow h \equiv \Lambda_h \in \mathcal{S}'$

OPERACIJE NA DISTRIBUCIJAH

Model so operacije na funkcijah, vzamemo $g \equiv \Lambda_g$.

ODVAJANJE

Vzamemo $T \in \mathcal{S}'$, kaj je $\partial^\alpha T$?

Če je $T = \Lambda_g$, tedaj vzamemo:

$$\int \partial^\alpha g \cdot \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int g \cdot \partial^\alpha \varphi = \Lambda_g(\partial^\alpha \varphi) \cdot (-1)^{|\alpha|}$$

$\Rightarrow$ Definiramo $(\partial^\alpha T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}\, T(\partial^\alpha \varphi)$

Zveznost:

$$\varphi_k \to \varphi \quad v \ \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow \partial^\alpha \varphi_k \to \varphi^\alpha \varphi \quad v \ \mathcal{S}$$

T zvezna

$$\Rightarrow T(\partial^\alpha \varphi_k) \to T(\partial^\alpha \varphi)$$

Oziroma: $(\partial^\alpha T)(\varphi_k) \to (\partial^\alpha T)(\alpha)$

Če je f funkcija, tedaj $\partial^\alpha f$ imenujemo distribucijski odvod za f.

Opomba: Prostori Soboljeva na $\mathbb{R}^n$:

integrabilnost

$$W^{k,p} := \{\text{funkcije, katerih distribucijski odvodi obstajajo do reda } k \text{ in ležijo v } L^p\}$$

odvedljivost

FOURIERJEVA TRANSFORMACIJA

Za $f, g \in \mathcal{S}$ je $\int f\hat{g} = \int \hat{f} g$.

Vzamemo $T \in \mathcal{S}'$, kaj naj bo $\hat{T}$?

Definiramo: $\hat{T}(\varphi) := T(\hat{\varphi})$

(Model: $T = \Lambda_g$ za $g \in \mathcal{S}'$)

$$\hat{\Lambda}_g(\varphi) = \Lambda_{\hat{g}}(\varphi) = \int \varphi \hat{g} = \int g \hat{\varphi} = \Lambda_g(\hat{\varphi}) \quad \checkmark$$

Primer: Fourierjeva transformiranka Diracove distribucije $\delta = \delta_0$:

$$\delta(f) := f(0)$$

$$\hat{\delta}(\varphi) := \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)\, e^{-2\pi i \langle x, 0 \rangle} dx$$

$$= \int \varphi = \int \varphi \cdot 1 = \underbrace{\Lambda_1(\varphi)}_{\substack{\text{delovanje umirjene} \\ \text{distribucije, ki pripada} \\ \text{konstantni funkciji } 1 \\ \text{na testni funkciji } \varphi}}$$

$$\Rightarrow \hat{\delta} \equiv 1$$

Natančneje: $\hat{\delta} \equiv \Lambda_1$

TRANSLACIJE, DILATACIJE, ...

$$(\tau^y T)(\varphi) := T(\tau^{-y} \varphi)$$

$$(\delta^t T)(\varphi) := T(t^{-n} \delta^{1/t} \varphi)$$

$$\tilde{T}(\varphi) := T(\tilde{\varphi})$$

$$(f \cdot T)(\varphi) := T(f \cdot \varphi) \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

$$(T * f)(\varphi) := T(\tilde{f} * \varphi)$$

Izrek: Če je $T \in \mathcal{S}'$, $f \in \mathcal{S}$, tedaj je $T * f$ gladka (C^∞) funkcija, podana z $(T*f)(x) := T(\tau^x \tilde{f})$.