FUNDEMENTALNE REŠITVE

$$\underset{\text{diferencialni operator}}{L}u = \underset{\text{Diracova distribucija}}{\delta}$$

L ... linearni PDO na $\mathbb{R}^n$ s konstantnimi koeficienti

$$L := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$$

$a_\alpha \in \mathbb{R}$ konst.

Vzemimo $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

Rešujemo $Lu = f$

Primer: $L = \Delta$

$$\Rightarrow \Delta u = f$$

$Lw = \delta$: $\delta = \delta_0(f) = f(0)$

Spomnimo: Če je w fundementalna rešitev, tedaj je $L(w * f) = f$.

Poanta: Za rešitev problema $Lu=f$ zadošča najti fundementalno rešitev, torej rešiti problem $Lu=\delta$.

$$(\omega * f)(x) = \int \omega(x-y) f(y)\, dy$$

$$\underset{\text{odvodi po } x}{L}(\omega * f) = \int L_x[\dots] = \dots = \int (L\omega)(x-y) f(y)\, dy$$

$\Rightarrow$ Pričakujemo $L(\omega * f) = (\underbrace{L\omega}_{=\delta}) * f = \delta * f$

$$x \mapsto \int f(y) \underbrace{\delta(x-y)}_{\text{za } x\neq y \text{ je } 0} dy$$

$$\Rightarrow L(\omega * f) = f$$

Kaj je fundementalna rešitev za $L=\Delta$?

Poskusimo s "singularnimi" rešitvami v 0 za $\Delta\omega = 0$.

Naš ω iščemo kot radialno funkcijo:

$$\omega(x) = \underset{\text{funkcija ene spremenljivke}}{\psi}(|x-y|^2)$$

Če je $y=0$, je $\omega(x) = \psi(|x|^2)$.

Če je $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ in $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tedaj za $r=|x|$ velja:

$$\Delta[\varphi(r)] = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\cdot \varphi'(r)$$

$$\| $$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left[\varphi\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)\right]$$

$$n=1: \ \Delta(\varphi(r)) = \left[\varphi\left(\sqrt{x^2}\right)\right]''$$

$$n=2: \ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2} = \frac{x_j}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}$$

$\Rightarrow \Delta\left[\Psi(|x|^2)\right] = \Psi''(|x|^2)\cdot 4|x|^2 + 2n\Psi'(|x|^2)$

Pomen: Če iščemo fundementalno rešitev w z radialnim nastavkom, se problem prevede na navadno diferencialno enačbo $\varphi'' + (n-1)\cdot\frac{\varphi'}{r} = 0$.

Vzemimo $\eta = \varphi'$ in dobimo $\eta' + (n-1)\cdot\frac{\eta}{r} = 0$.

$\Rightarrow \eta(r) = C\cdot r^{1-n}$

$\Rightarrow \varphi(r) = D + C\cdot\begin{cases} r^{2-n} & ; n \neq 2 \\ \log r & ; n = 2 \end{cases}$

Motivacija: Če w zadošča $Lw = \delta$, potem $w * f$ reši $Lu = f$.

Naj bo zdaj $n = 2$, $M \subseteq \mathbb{R}^2$ omejeno odprto povezano območje z gladkim robom ter $f: M \to \mathbb{R}$, $g: \partial M \to \mathbb{R}$ dani zvezni funkciji.

Iščemo $u: \overline{M} \to \mathbb{R}$, da bo veljalo:

- $\Delta u = f$ na M
- $u = g$ na ∂M
- u zvezna na $\overline{M}$

$k(z, y) := \Phi(z - y) = \frac{1}{2\pi}\log|z - y|$

Funkcija k je izven diagonale $z = y$ harmonična in lokalno integrabilna, sledi že celo v okolici izhodišča.

$\Gamma(f): M \to \mathbb{R} \;:\; \Gamma(f)(z) := \iint_M f(y)\, k(z, y)\, dA(y)$

$$= \iint_M f(y)\,\Phi(z - y)\, dA(y)$$

$$= \text{"}(f * \phi)(z)\text{"}$$

Izrek (Greenova reprezentacijska formula):

Če sta $u \in C^2(\overline{M})$ in $z \in M$, velja:

smerni odvod po zunanji enotski normali

krivuljni integral

$$\int_{\partial M} [u \cdot (\partial_n k)(z,\cdot) - (\partial_n u) \cdot k(z,\cdot)]\, ds$$

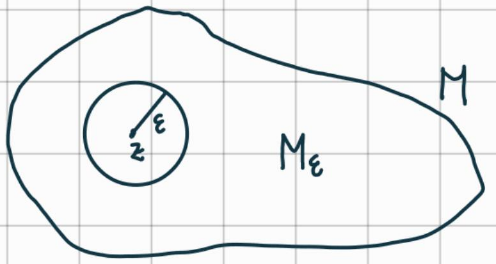
ploskovni integral

$$+ \underbrace{\iint_M k(z,\cdot) \cdot \Delta u \, dA}_{= \Gamma(\Delta u)(z) = \text{"}[(\Delta u) * \phi](z)\text{"}}$$

$$= u(z)$$

Dokaz: Izberemo $z \in M$ in tak $\varepsilon > 0$, da je $\overline{K(z,\varepsilon)} \subseteq M$.

Označimo $M_\varepsilon := \{w \in M \,;\, |z-w| > \varepsilon\} = M \setminus \overline{K(z,\varepsilon)}$.



Uporabimo 3. Greenovo identiteto:

$$\int_{\partial\Omega} (v \cdot \partial_n u - u \cdot \partial_n v)\, ds = \iint_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v)\, dA$$

In sicer za:

$\Omega = M_\varepsilon$

$v = k(z,\cdot) = \phi(\cdot - z)$

Velja:

- $\partial M_\varepsilon = \partial M \cup S(z,\varepsilon)$

- $\Delta\phi = 0$ na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

  Sledi: $\Delta v = \Delta k(z,\cdot) = 0$ na M_ε

- $\partial_n \psi$ v $\int_\gamma$ predstavlja zunanjo normalo na območje, ki ga krivulja γ oklepa.

  Sledi: $\int_{\partial M_\varepsilon} \alpha \cdot \partial_n \beta = \int_{\partial M} \alpha \cdot \partial_n \beta - \int_{S(z,\varepsilon)} \alpha \cdot \partial m \beta$

Dobimo:

$$\int_{\partial M} [\partial_n u \cdot k(z,\cdot) - u \cdot \partial_n k(z,\cdot)]\, ds$$

$$- \int_{S(z,\varepsilon)} [\underbrace{\partial_n u \cdot k(z,\cdot)}_{=\mathrm{I}} - \underbrace{u \cdot \partial_n k(z,\cdot)}_{=\mathrm{II}}]\, ds$$

$$= \underbrace{\iint_{M_\varepsilon} k(z,\cdot) \Delta u \, dA}_{=\mathrm{III}}$$

V integralih I, II in III želimo vzeti $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$:

I) Imamo:

- $\partial_n u = \langle \nabla u, \vec{n} \rangle$ je omejena funkcija na $K(z,\varepsilon)$, saj je $\nabla u \in C^1$.

- Za $w \in S(z,\varepsilon)$ je $k(z,w) = \frac{1}{2\pi} \log \varepsilon$.

$$\Rightarrow |\mathrm{I}| \lesssim \frac{|\log \varepsilon|}{2\pi} \cdot \int_{S(z,\varepsilon)} 1\, ds = \varepsilon \cdot |\log \varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0$$

II) Na $S(z,\varepsilon)$ velja:

- $\vec{n}(w) = \frac{w-z}{\varepsilon}$

- $\nabla_w \underbrace{\log|w-z|}_{\frac{1}{2}\log|w-z|^2} = \nabla_w \log\left[(w_1-z_1)^2+(w_2-z_2)^2\right]\cdot\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{|w-z|^2}\cdot(w_1-z_1, w_2-z_2) = \frac{w-z}{\varepsilon^2}$$

$\partial_n u = \langle \nabla u, \vec{n}\rangle$

Sledi: $\partial_n k(z,\cdot) = \langle \nabla k(z,\cdot), \vec{n}(\cdot)\rangle$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\langle \frac{w-z}{\varepsilon^2}, \frac{w-z}{\varepsilon}\right\rangle = \frac{1}{2\pi\varepsilon}$$

povprečje u na S

$$\Rightarrow II = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{S(z,\varepsilon)} u\, ds = \langle u\rangle_{S(z,\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} u(z)$$

III) Ker na M velja:

- Δu zvezna, zato omejena

- $k(z,\cdot)$ lokalno integrabilna

Sledi: $III = \iint_{M_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} \iint_M$

Torej je izrek dokazan.

Posledica: Če je $u \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$, tedaj je $u = \Gamma(\Delta u)$.

Eksplicitno: $u(z) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} (\Delta u)(\eta)\log|z-\eta|\, dA(\eta)$

Oziroma: $u = \phi * \Delta u$

Dokaz: To sledi, če za M vzamemo krog K, ki je dovolj velik, da zajame supp f.

Tedaj bo $u|_{\partial K} \equiv 0$, zato "robni členi" $\int_{\partial M}$ izginejo.

V tem smislu je Φ res fundementalna rešitev za operator Δ.

("$\Gamma = \Delta^{-1}$")

$\Rightarrow$ Fundementalna rešitev za Laplaceov operator je $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|$.

GREENOVE FUNKCIJE

Spomnimo se:

Nehomogeni Dirichletov problem:

Iščemo $u : \overline{M} \to \mathbb{R}$, da velja:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = f \\ \ \ u = g \\ u \text{ zvezna} \\ f, g \text{ podani} \end{array}\right\} (1)$$

$$u(z) = \int_{\partial M} [u \cdot (\partial_n k)(z,\cdot) - \overset{??}{\overbrace{(\partial_n u)}} \cdot k(z,\cdot)]\, ds + \iint_M k(z,\cdot) \cdot \Delta u \, dA \qquad (2)$$

$$k(z, y) := \frac{1}{2\pi} \log|z-y| = \Phi(z-y)$$

Poskusimo (1) rešiti s pomočjo (2).

Ideja: Namesto k vstavimo korekcijski faktor, torej namesto $k(z,\cdot)$ gledamo $k(z,\cdot) - h$ za primeren h, da člena z $\partial_n u$ ne bo več.

Denimo, da bi v dokazu (2) namesto $k(z,\cdot)$ vzeli neko funkcijo $h \in C^1(\overline{M}) \cap C^2(M)$, za katero velja $\Delta h \equiv 0$ na M. Potem bi isti dokaz pokazal:

$$\int_{\partial M} [u \cdot \partial_n h - \partial_n u \cdot h]\, ds + \iint_M h \cdot \Delta u \, dA = 0$$

Torej:

$$- 0$$

$$= \int_{\partial M} [u \cdot \partial_n k(z,\cdot) - \partial_n u \cdot k(z,\cdot)]\, ds + \iint_M k(z,\cdot)\, \Delta u \, dA$$

$$- \int_{\partial M} [u \cdot \partial_n h - \partial_n u\, h]\, ds + \iint_M h \cdot \Delta u \, dA$$

$$= \int_{\partial M} [u \cdot (\partial_n [k(z,\cdot) - h]) \quad \ldots\ldots \quad \text{itd}$$

Ugotovitev:

(2) velja tudi, če $k(z,\cdot)$ nadomestimo s $k(z,\cdot) - h$ za h kot prej.

Torej nas zanima tak h, da bo $\int_{\partial M} \partial_n u \cdot [k(z,\cdot) - h]\, ds = 0$.

Dovolj bo $k(z,\cdot) - h \equiv 0$ na ∂M. To je dodatna zahteva za naš h.

Če je M omejeno enostavno povezano območje z gladkim robom in $z \in M$, lahko $h = h_z$ ($\neq \partial_z h$) izrazimo kot rešitev homogenega Dirichletovega problema:

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{na } M \\ h = \phi(\cdot - z) & \text{na } \partial M \end{cases}$$

Tak h pa znamo najti.

Definicija: Funkcija $G: M \times M \setminus \{z=w\} \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $G(z,w) := k(z,w) - h_z(w)$, se imenuje **Greenova funkcija** domene M za Laplaceov operator.

Dokazali smo:

Izrek: Naj bo G Greenova funkcija območja M, $z \in M$ in $u \in C^2(\overline{M})$. Tedaj je:

$$u(z) = \int_{\partial M} u(\xi) \cdot \partial_n G(z,\xi)\, d\xi + \int_M G(z,\xi) \cdot (\Delta u)(\xi)\, d\xi$$

Primer: Greenova funkcija na enotskem disku:

$M = D = \{w \in \mathbb{C} ; |w| < 1\}$

$z \in M = D$

Ali znamo za ta M naš h_z eksplicitno izračunati?

Imamo 2 možnosti:

1) Iščemo $w \mapsto h_z(w)$, da velja:

i) h_z harmonična v D

ii) $h_z(w) = \Phi(w-z)$ za $|w| = 1$

iii) h_z zvezna na $\overline{D}$

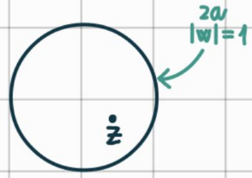
Vemo: $h_z(re^{2\pi i t}) = \int_0^1 \Phi(e^{2\pi i t} - z) P_r(t)\, dt$

$P_r(\tau) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\tau)+r^2}$ ... Poissonovo jedro

Pointegriramo ...

2) Iz (ii) sledi:

$$h_z(w) = \frac{1}{2\pi} \log|z-w|$$



Na robu je $w = \frac{1}{\bar{w}} = w^*$.

Za $|w| = 1$ velja:

$$|z-w| = |z-w| \cdot |\bar{w}| = |(z-w)\cdot \bar{w}| = |\bar{w} z - 1| = |w \bar{z} - 1|$$

$$= \left|\bar{z}\left(w - \frac{1}{\bar{z}}\right)\right| = |z| \cdot |w - z^*|$$

Če je $z = 0$, je $h_0(w) = \frac{1}{2\pi} \log|w| = \frac{1}{2\pi} \log|w^*|$.

Torej lahko vzamemo $h_0(w) := \frac{1}{2\pi} \log|w^*|$ za $w \in D$.

$$G(z,w) := \frac{1}{2\pi} \log\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$$

kor. faktor $= -\frac{1}{2\pi} \log|1-\bar{w}z|$

$$1 - \bar{w}z = 0 \Leftrightarrow \bar{w}z = 1 \Rightarrow |w| \cdot \underset{\overset{\wedge}{1}}{|z|} = 1 \Rightarrow |w| \geq 1$$

Posledica: Formula $u(z) = \int_{\partial M} u(\zeta) \cdot \partial_n G(z,\zeta)\, d\zeta + \int_M G(z,\zeta) \cdot (\Delta u)(\zeta)\, d\zeta$
nam daje rešitev nehomogenega Dirichletovega problema na M,
in sicer:

$$u(z) = \int_{\partial M} g(\zeta) \cdot \partial_n G(z,\zeta)\, d\zeta + \int G(z,\zeta) f(\zeta)\, dA(\zeta)$$

V posebnem, če je u hkrati še harmonična, tedaj je:

$$u(z) = \int_{\partial M} u(\xi) \cdot \partial_n G(z, \xi)\, d\xi$$

Definicija: Naj bo $z \in M$. Funkcija $P_z : \partial M \to \mathbb{R}$, definirano kot $P_z(\xi) := \partial_n G(z, \xi)$, se imenuje *Poissonovo jedro* domene M.

$$\Rightarrow u(z) = \int_{\partial M} P_z(\xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

Opomba: Tako definirano Poissonovo jedro se ujema s tistim iz rešitve homogenega Dirichletovega problema s pomočjo Riemmanovega upodobitvenega izreka:

$$u = \int u \cdot P_1 = \int u \cdot P_2$$

$$\Rightarrow \int u \cdot \underbrace{(P_1 - P_2)}_{0} = 0$$

P zvezen na robu

P razširimo na oba načina $(u = P)$

$$\Rightarrow \int P^2 = 0$$

$$\overset{\text{zveznost}}{\Rightarrow} P \equiv 0$$