2.1) Naj bo G topološka grupa. Dokažite trditve.

a) $A \subseteq G$ okolica točke $a \in G$ $\iff$ $ba^{-1}A$ okolica točke $b \in G$

($\Rightarrow$) Naj bo $A \subseteq G$ okolica točke $a \in G$.

$\exists U^{odp} : a \in U \subseteq A$

$b \in ba^{-1}A$ in $b \in ba^{-1}U$

To je slika s homeomorfizmom.

$\Rightarrow ba^{-1}U^{\,odp} \subseteq ba^{-1}A \subseteq G$

($\Leftarrow$) Simetrija.

b) Če je $H \leq G$ okolica enote v G, je H odprta in zaprta v G.

Naj bo $H \leq G$ okolica enote v G.

H je odprta

Naj bo $a \in H$. Po (a) je aH okolica za a. Ker je H podgrupa, je $aH \subseteq H$.

$\Rightarrow$ H je okolica vsake svoje točke.

H je zaprta

$b \in G \setminus H \Rightarrow bH$ okolica b

H podgrupa in odseki so disjunktni.

$\Rightarrow bH \cap H = \emptyset$

$\Rightarrow G \setminus H$ je unija odprtih.

c) Če je C komponenta za povezanost, ki vsebuje enoto G, je C zaprta edinka v G.

Komponente za povezanost so zaprte.

$C \leq G$

C povezana $\Rightarrow$ aC povezana $\xRightarrow{a \in C \cap aC}$ $aC \subseteq C$

Invertiranje je homeomorfizem in je zvezno.

$C \triangleleft G$

Konjugiranje je homeomorfizem, ker je kompozitum translacij.

$\Rightarrow gCg^{-1}$ je povezan in vsebuje 1.

$\Rightarrow gCg^{-1}$ in C sta povezani.

Zaradi maksimalnosti C je $gCg^{-1} \subseteq C$.

d) Za G so lastnosti T_0, T_1, T_2 ekvivalentne.

$T_0 \Rightarrow T_1$

$T_0 \overset{BŠS}{\Longrightarrow} \exists U^{odp} \subseteq G: \quad a \in U, \ b \notin U$

$aU^{-1}b$ je homeomorfna slika U, ki vsebuje b.

Če bi bil $a \in aU^{-1}b$, bi obstajal $c \in U$, da je
$a = ac^{-1}b$.

$\Rightarrow c^{-1} = a^{-1}ab^{-1}$

$\Rightarrow c = b$

$\Rightarrow b \in U$

$T_1 \Rightarrow T_2$

$T_2 \Leftrightarrow \Delta_G$ zaprta v $G \times G$

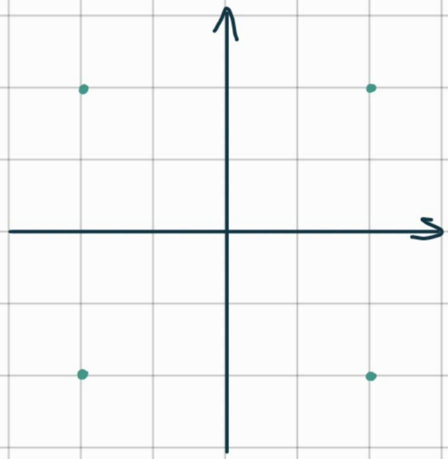
$G \times G \to G$
$(x, y) \mapsto xy^{-1}$

$\Delta_G = f^*(\{1\})$ zaprta

---

23) Za naslednja delovanja grup ugotovite, kateremu podprostoru Evklidskega prostora so izomorfne.

b) $S^0 \times S^0$ deluje na $\mathbb{R}^2$ s predpisom $(s,t)(x,y) = (sx, ty)$.



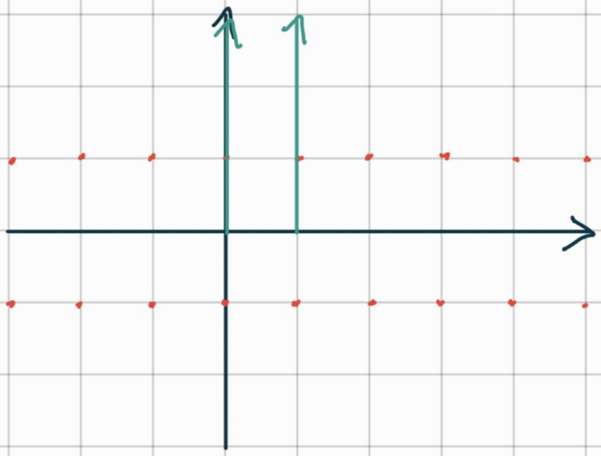
$$f: \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)^2$$
$$(x,y) \mapsto (|x|, |y|)$$

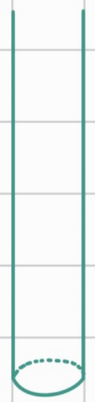
$$s: [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (x,y)$$

f, s zvezni $\Rightarrow$ f kvocientna

$\Rightarrow$ f dela iste identifikacije kot ekvivalenčna

c) $\mathbb{Z} \times S^0$ deluje na $\mathbb{R}^2$ s predpisom $(m,t)(x,y) := (m+x, ty)$.





$S^1 \times [0,\infty)$

$$f: \mathbb{R}^2 \to S^1 \times [0,\infty)$$
$$(x,y) \mapsto (e^{i2\pi x}, |y|)$$

f zvezna in surjektivna ter dela iste identifikacije.

$$\left(\left(n - \tfrac{1}{n}, 0\right)\right)_n$$

Slika zaporedja je zaprta v $\mathbb{R}^2$.
f-slika zaporedja pa ni zaprta v $S^1 \times [0,\infty)$.

$g: \mathbb{R} \to S^1$
$h: \mathbb{R} \to [0, \infty)$

Produkt dveh odprtih preslikav je odprta.

$f = g \times h$

$h: \mathbb{R} \to [0, \infty)$
$x \mapsto |x|$

Dovolj je preveriti na bazi.

$0 \notin (a,b): \quad h((a,b)) = (\min\{|a|, |b|\}, \max\{\dots\})^{odp}$
$0 \in (a,b): \quad h((a,b)) = [0, \max\{|a|, |b|\})^{odp}$

Podobno g.