

MNOGOTEROSTI

Ideja: Mnogoterost lokalno izgleda kot Evklidski prostor.

Primer: Krivulje, ki so vložitve intervalov, so 1-dimenzionalne mnogoterosti.

Primer: Ploskve so 2-dimenzionalne mnogoterosti.

Oznaka: $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$

$\mathbb{R}_+^0 := \{0\}$

Definicija: Topološki prostor M je mnogoterost dimenzije n ali n -mrti, $n \in \mathbb{N}_0$, če je M T_2 , 2-števen in ima vsaka okolica $x \in M$ odprto okolico, homeomorfno \mathbb{R}^n ali \mathbb{R}_+^n . Tako okolico imenujemo Evklidska okolica, homeomorfizem pa karta.

Notranje točke v M so tiste, ki imajo kakšno okolico homeomorfno \mathbb{R}^n . Množico vseh notranjih točk označimo $\text{int} M$.

Preostale točke so robne točke. Množico robnih točk označimo ∂M .

Opomba: V definiciji mnogoterosti včasih \mathbb{R}^n in \mathbb{R}_+^n nadomestimo s homeomorfniima prostoroma \mathring{B}^n in $\mathring{B}_+^n := \mathring{B}^n \cap \mathbb{R}_+^n$.

Ekvivalentno lahko zahtevamo, da ima vsaka $x \in M$ okolico, homeomorfno neki odprti podmnožici v \mathbb{R}^n .

Opomba: Vsaka točka v mnogoterosti ima bazo evklidskih okolice. Torej ima vsaka točka poljubno majhne evklidske okolice.

Opomba: V analitični literaturi pogosto zahtevamo mnogoterosti brez roba ($\partial M = \emptyset$).

Primer: S^1 je 1-mnogoterost:

T_2 , 2-šternost ✓

Vsaka točka na S^1 ima okolico, homeomorfno $(-1, 1)$.

$$\begin{aligned} \varphi: (x, \beta) &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{int } S^1 &= S^1 \\ \partial S^1 &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{int}_{\mathbb{R}^2} S^1 &= \emptyset \\ \text{Meja}_{\mathbb{R}^2} S^1 &= S^1 \end{aligned}$$

Primer: S^n je n -mnogoterost:

Evklidske okolice dobimo s stereografsko projekcijo.

$$S^n \setminus \{z\} \approx \mathbb{R}^n, \quad z \in S^n \text{ poljuben}$$

Primer: \mathbb{R}^n in \mathbb{R}_+^n sta n -mnogoterosti:

$$\begin{aligned} \text{int } \mathbb{R}^n &= \mathbb{R}^n \\ \partial \mathbb{R}^n &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\text{int } \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$$

$$\partial \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

Primer: Poljubna odprta podmnožica v n -mnogoterosti je n -mnogoterost.

Primer: Poljubna gladka podmnogoterost v \mathbb{R}^n je topološka mnogoterost.

Primer: $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ ni mnogoterost:

Točka $O = (0, 0)$ nima Evklidske okolice.

Če bi bil mnogoterost, bi bil 1-mnogoterost, saj imajo točke brez O okolice, homeomorfne \mathbb{R} .

Če bi O imela Evklidsko okolico U , bi bila homeomorfna \mathbb{R} ali \mathbb{R}_+ . Ampak $U \setminus \{0\}$ bi imela vsaj 4 komponente, $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ in $\mathbb{R}_+ \setminus \{x\}$ pa imata največ 2 komponenti.

Primer: Dvojni stžec tudi ni mnogoterost.

Kakšne topološke lastnosti ima mnogoterost?

Ima enake lokalne lastnosti kot Evklidski prostor:

- Lok. povezanost (s potmi)
- Lok. kompaktnost
- T_0, T_1

Primer: T_2 pa ni lokalna:

$$\mathbb{R} \times \{0, 1\} / \sim, \quad (x, 0) \sim (x, 1) \text{ za } x < 0$$

Vsaka točka ima okolico, homeomorfno \mathbb{R} .

Amplak prostor ni T_2 .

Vemo: Mnogoterost je lok. kompaktna in T_2 , torej je regularna. Ker je 2-števna, je metrizabilna.

Definicija: Kompaktno mnogoterost s praznim robom imenujemo sklenjena mnogoterost.

Primer: Povezane, 1-mnogoterosti so homeomorfne eni od $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$, S^1 .

Primer: Kompaktne povezane 2-mnogoterosti so homeomorfne eni od B^2 , S^2 , $S^1 \times S^1$, $S^1 \times I$, \mathbb{M} .

Izrek: Naj bo $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ in $n \in \mathbb{N}_0$. Potem je FP^n topološka mnogoterost dimenzije:

- n ($F = \mathbb{R}$)
- $2n$ ($F = \mathbb{C}$)
- $4n$ ($F = \mathbb{H}$)

KONSTRUKTIVE MNOGOTEROSTI

- 1) Komponente za povezanost n -mnogoterosti so n -mnogoterosti. Zaradi lokalne povezanosti so komponente odprte.
- 2) Končna ali števna disjunktna unija n -mnogoterosti je n -mnogoterost.
- 3) Notranjost in rob mnogoterosti sta mnogoterosti.

Izrek o odprti preslikavi:

Naj bosta M, N n -množicosti, $V^{\text{odp}} \subseteq \text{int} M$ in $f: V \rightarrow N$ zvezna injekcija. Potem je T odprta. Posebej je $f_*(V)^{\text{odp}} \subseteq \text{int} N$.

Dokaz: Naj bo $W^{\text{odp}} \subseteq V$, $y \in f_*(W) \subseteq N$. Naj bo U Evklidska okolica za $y \in N$.

$$U \approx \mathbb{R}^n \text{ ali } U \approx \mathbb{R}_+^n$$

$$x := f^{-1}(y)$$

$f^*(U)$ je okolica $x \in \text{int} M$, zato obstaja Evklidska okolica U' za $x \in M$, $U' \subseteq f^*(U)$, $U' \approx \mathbb{R}^n$.

$$g: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} U' \xrightarrow{+|v|} \begin{cases} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}_+^n \end{cases} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g \text{ zvezna injekcija v } \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{Brouwer}} g_*(\mathbb{R}^n)^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Če je $U \approx \mathbb{R}^n$, to pomeni, da $g_*(\mathbb{R}^n)$ ne seka $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, torej leži slika znotraj $\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty) \approx \mathbb{R}^n$.

Od tod sledi, da je y notranja v N , $f_*(U')$ pa je okolica $y \in N$, ki je vsebovana v $f_*(W)$.

$$\Rightarrow f_*(W) \text{ odprta}$$

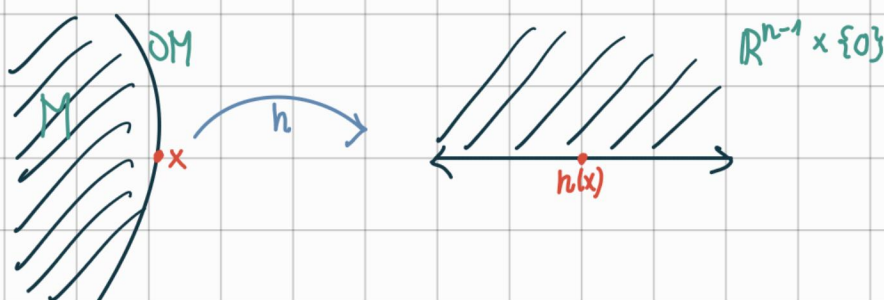
$$\Rightarrow f \text{ odprta}$$

Izrek: Naj bo M n -mnogoterost z nepraznim robom. Potem je ∂M $(n-1)$ -mnogoterost s praznim robom ($\partial(\partial M) = \emptyset$).

Posebej, če je M kompaktna, je ∂M sklenjena.

Dokaz: T_2 in 2-štirnost sta dedni.

Za poluben $x \in \partial M$ moramo pokazati, da ima okolico, homeomorfno \mathbb{R}^{n-1} .



Ker $x \in \partial M$, ima Evklidsko okolico $V \xrightarrow[\cong]{h} \mathbb{R}_+^n$.

$$h(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

$$h|_{V \cap \partial M}: V \cap \partial M \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

$h: V \cap \text{int} M \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ zvezna injekcija

$$\Rightarrow h_*(V \cap \text{int} M) \subseteq \text{int} \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$$

$$h^{-1}: \mathbb{R}^{n-1} \times (0, 1) \rightarrow V \cap \text{int} M$$

$$\Rightarrow h_*^{-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)) \subseteq V \cap \text{int} M$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty) \subseteq h_*(V \cap \text{int} M)$$

$$\Rightarrow h_*(V \cap \text{int} M) = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$$

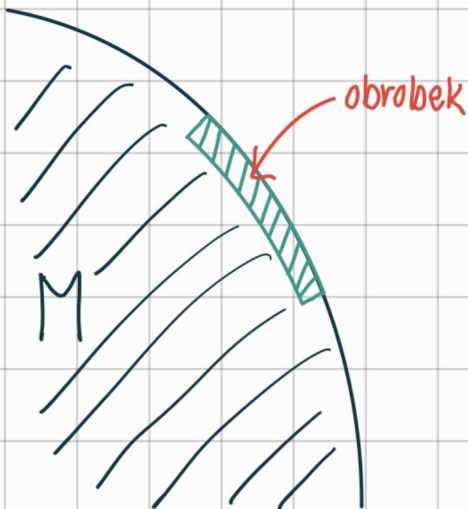
$h: V \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ bijekcija

$$\Rightarrow h_*(V \cap \partial M) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

$$\Rightarrow h|_{V \cap \partial M}: V \cap \partial M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \text{ homeo}$$

Primer: Če je M kompaktna 2-mnogoterost, potem je ∂M disjunktna unija končno mnogo krožnic.

Trditev: ∂M ne deli M : Če je M povezana, potem je tudi $\text{int} M = M \setminus \partial M$ povezana.



$$\mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1] \approx \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$$

∂M je lokalno obrobljen:

$$\forall x \in \partial M: \exists V^{\text{evkl}} \approx \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$$

$$C := h^*(\mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1]) \dots \text{obrobek}$$

$$h|_C: C \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1]$$

$$g := h|_{C \cap \partial M}: C \cap \partial M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\mathbb{R}^{n-1} \times [0,1] \xrightarrow[\approx]{g \times \text{id}} (C \cap \partial M) \times [0,1]$$

Obrobek:

$$c: (C \cap \partial M) \times [0,1] \rightarrow C \hookrightarrow M$$

$$c = (h|_C)^{-1} \circ (g \times \text{id}_I)$$

Velja: $c(x,0) = x$, c je vložitev

Izrek o obstoju obroba:

∂M je obrabljen v M :

$\exists c: \partial M \times I \rightarrow M$, $c(x,0) = x$, c je vložitev

4) Produkt mnogoterosti

Izrek: Naj bo M m -mnogoterost in N n -mnogoterost. Potem je $M \times N$ $(m+n)$ -mnogoterost in velja:

$$\text{int}(M \times N) = (\text{int} M) \times (\text{int} N)$$

$$\partial(M \times N) = (\partial M \times N) \cup (M \times \partial N)$$

Dokaz: T_2 in 2-števnost sta končno multiplikativni.

Pokazati moramo, da ima poljubno $(x,y) \in M \times N$ Evklidsko okolico.

Naj bo U Evklidska okolica za $x \in M$.

Naj bo V Evklidska okolica za $y \in N$.

1) $x \in \text{int}M, y \in \text{int}N$:

$$U \approx \mathbb{R}^m, V \approx \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow U \times V$ okolica za par $(x, y) \in M \times N \approx \mathbb{R}^{m+n}$

$\Rightarrow (x, y)$ je notranja, $\dim = m+n$

2) $x \in \text{int}M, y \in \partial N$:

$$U \approx \mathbb{R}^m, V \approx \mathbb{R}_+^n$$

$$y \mapsto \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

$$\Rightarrow U \times V \approx \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^n \approx \mathbb{R}^{m+n-1} \times [0, \infty) = \mathbb{R}_+^{m+n}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n-1} \times \{0\}$$

$\Rightarrow (x, y)$ je robna

3) $x \in \partial M, y \in \text{int}N$:

Simetrično.

4) $x \in \partial M, y \in \partial N$:

$$U \approx \mathbb{R}_+^m, V \approx \mathbb{R}_+^n$$

$$x \mapsto \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}, y \mapsto \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

$$\Rightarrow U \times V \approx \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \approx \mathbb{R}^{m-1} \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$$

$$\approx \mathbb{R}^{m+n-2} \times [0, \infty) \times [0, \infty) \approx \mathbb{R}^{m+n-1} \times [0, \infty) = \mathbb{R}_+^{m+n}$$

$\Rightarrow (x, y)$ je robna točka

5) Zlepek mnogoterosti

Definicija: Naj bo N n -mnogoterost in L l -mnogoterost, $L \subseteq N$.

L je prav vložena v N , če je $L \cap \partial N = \partial L$.

L je lokalno ploščata ali podmnogoterost v N , če je L prav vložena v N in če ima vsak $x \in L$ Evklidsko okolico $U \cap N$, za katero obstaja homeomorfizem $h: U \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}_+^n \end{array} \right.$, da velja $h(U \cap L) = h_*(U) \cap (\{0^{n-l}\} \times \mathbb{R}^l)$.

Izrek: Naj bosta N_1, N_2 n -mnogoterosti z nepraznim robom. Naj bo $L_i^{\text{zap}} \subseteq \partial N_i$ $(n-1)$ -mnogoterost z lokalno ploščatim robom v ∂N_i .

Naj bo $h: L_1 \rightarrow L_2$ homeomorfizem.

Potem je $N_1 \cup_h N_2$ n -mnogoterost z robom $\partial(N_1 \cup N_2) = (\partial N_1 \setminus \text{int} L_1) \cup_{h|_{\partial L_1}} (\partial N_2 \setminus \text{int} L_2)$, $(N_1 \setminus L_1) \amalg (N_2 \setminus L_2)$ pa se vložijo v zlepek kot odprta n -mnogoterost.

Dokaz: Za tak zlepek smo dokazali, da podeduje T_2 in 2-štavnost.

Naj bo $g: N_1 \amalg N_2 \rightarrow N_1 \cup_h N_2$ kvocientna projekcija.

$(N_1 \setminus L_1) \cup (N_2 \setminus L_2)$ je nasičena odprta množica v $N_1 \cup N_2$, g je na tej injektivna, zato je homeomorfizem na sliko.

Torej imajo vse točke v sliki te množice enake evklidske okolice kot v tej množici.

Pokazati moramo, da imajo točke v $g(L_1) = g(L_2)$ tudi evklidske okolice.

Ločiti moramo točke iz $\text{int} L_i$ in ∂L_i .

$$1) x \in \text{int} L_1 \Rightarrow h(x) \in \text{int} L_2$$

x ima v N_1 evklidsko okolico $U_1 \approx \mathbb{R}_+^n$, $U_1 \cap \partial N_1 \in L_1$.
 $h(x)$ ima v N_2 evklidsko okolico $U_2 \approx \mathbb{R}_+^n$, $U_2 \cap \partial N_2 \in L_2$.

Kot v dokazu 2-štavnosti zlepeka lahko izberemo ti okolici tako, da sta usklajeni:

$$h(U_1 \cap \partial N_1) = U_2 \cap \partial N_2$$

Potem h določa homeomorfizem \tilde{h} za $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, pripadajoč zlepek s \tilde{h} pa je homeomorfizem \mathbb{R}^n .

$$2) x \in x \in \partial L_1 \Rightarrow h(x) \in \partial L_2$$

$x, h(x)$ imata enaki okolici kot prej.

Lokalna ploščatost ∂L_i zagotavlja, da lahko ti okolici U_i izberemo tako, da sta homeomorfni \mathbb{R}_+^n na način, da je $U_i \cap L_i \approx \mathbb{R}_+^{n-1}$.

Vidimo, da je $g(x)$ robna točka v zlepku.

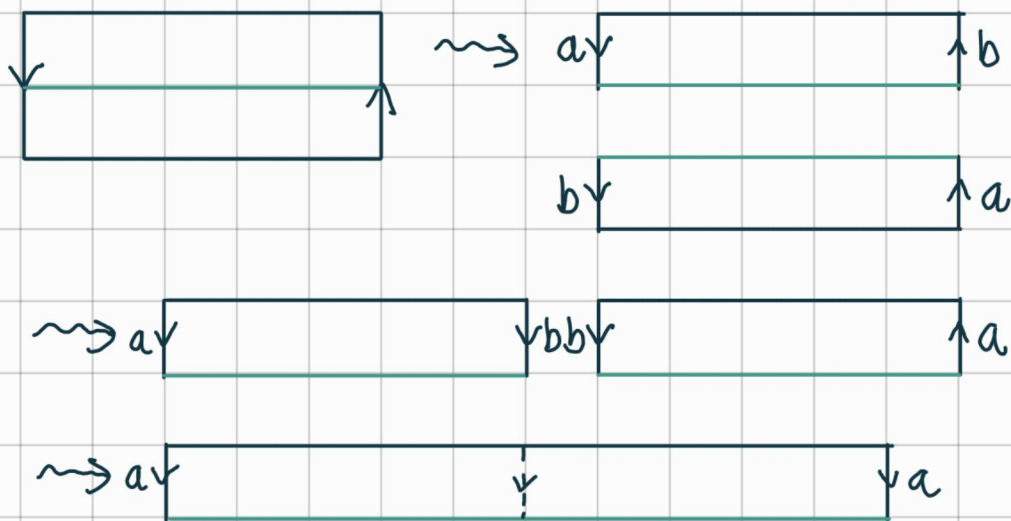
6) Razrez mnogoterosti

N n -mnogoterost

$L \subset N$ lokalno ploščata $(n-1)$ -mnogoterost

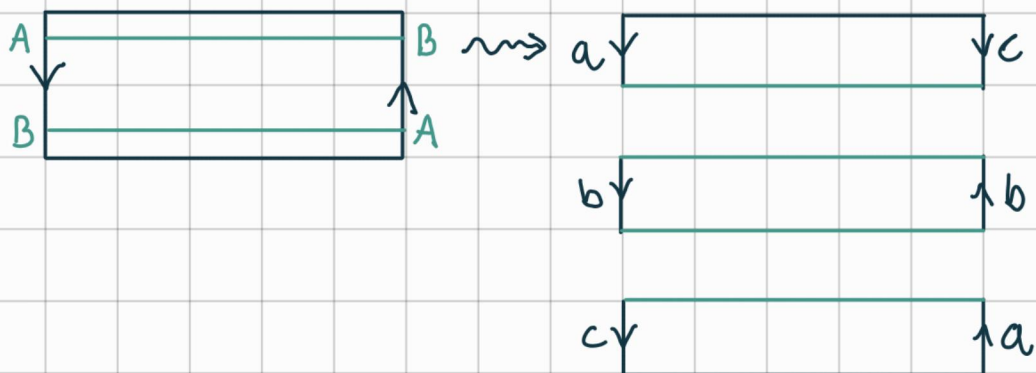
Razrez N vzdolž L je $N \setminus L$, ki ji dodamo nazaj "dve kopiji" L .

Primer: Möbiusov trak prerežemo po sredinski krožnici:



Dobimo 2x daljši dvojno zaviti koldobar.

Primer: Möbiusov trak prerežemo po krožnici na tretjini:



Dobimo krajši Möbiusov trak in daljši dvojno zaviti koldobar.

Lokalno L deli N na dva dela, ki pa sta lahko v razrezu globalno povezana.

Izrek: Razrez N vzdolž lokalno ploščate L je n -množitenost.

7) Povezana vsota

Definicija: Naj bosta M, N n -množitenosti. Naj bosta $D \subseteq \text{int} M$, $E \subseteq \text{int} N$ topološka n -diska z lokalno ploščatima robovoma. Izberimo homeomorfizem $h: \partial D \rightarrow \partial E$.

Povezana vsota je zlepek $(M \setminus \text{int} D) \cup_h (N \setminus \text{int} E) =: M \# N$.

Primer: Naj bo M n -množitenost. Potem je $M \# S^n \approx M$.

Naj bo $D \subseteq \text{int} M$, $D \approx B^n$, ∂D lokalno ploščati.
Naj bo $E \subseteq S^n$, $E \approx S^n$, ∂E lokalno ploščati.

Po Schönfliesu lahko privzamemo, da je $E = S^n$ spodnja hemisfera, zato je $S^n \setminus \text{int} E = S_+^n \approx B^n$ zgornja hemisfera.

Lema: Naj bo $\varphi: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ poljuben homeomorfizem. Naj bosta $x, y \in \text{int} B^n$. Potem obstaja homeomorfizem $\Phi: B^n \rightarrow B^n$, $\Phi|_{S^{n-1}} = \varphi$ in $\Phi(x) = y$.

Opomba: $M \# N$ je v splošnem odvisna od izbire diskov D in E . Če sta M in N povezana, pa ni odvisna od izbire D in E .

Opomba: $M \# N$ je lahko odvisna od izbire h .

Trditev: Naj bo M povezana n -mnogoterost in $x, y \in \text{int}M$.
Potem obstaja homeomorfizem $h: M \rightarrow M$, $h(x) = y$.

Dokaz: Ker je M povezana, je tudi $\text{int}M$ povezana. Na $\text{int}M$ vpeljemo ekvivalenčno relacijo $x \sim y \Leftrightarrow$ obstaja homeomorfizem $h: M \rightarrow M$, $h(x) = y$.

Dokazali bomo, da so ekvivalenčni razredi odprti, zato je zaradi povezanosti en sam ekvivalenčni razred.

Odprti so pa, ker za poljuben $x \in \text{int}M$ obstaja okolica, homeomorfna B^n , in za poljuben x iz notranjosti te okolice obstaja homeomorfizem tega B^n nazaj vase, ki je na robu identiteta in preslika x v y .

KOMPAKTNE PLOŠKVE

Ploškev = povezana 2-mnogoterost

Cilj: Klasifikacija sklenjenih kompaktnih ploškev:

Poiskati želimo po enega predstavnika vsakega homeomornega razreda sklenjenih ploškev.

Rezultat bo dal še algoritem za prepoznavanje ploškev.

Poznamo že naslednje sklenjene ploške:

S^2 , $T = S^1 \times S^1$, $P = \mathbb{R}P^2$, $K =$ Kleinova steklenica

Iz teh lahko dobimo neskončno družino ploškev z operacijo povezave vsote:

$$T \# T =: 2T$$

$$P \# P =: 2P$$

$$K \# K =: 2K$$

$$T \# P$$

$$T \# K$$

$$P \# K$$

Induktivno definiramo večkratne povezane vsote:

$$nT := (n-1)T \# T$$

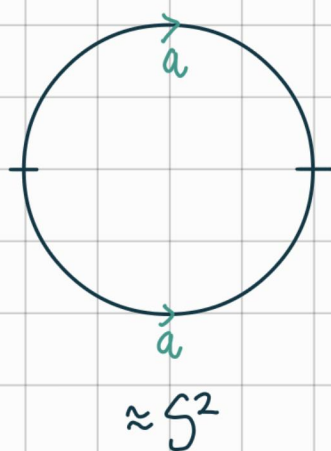
$$nP := (n-1)P \# P$$

$$nK := (n-1)K \# K$$

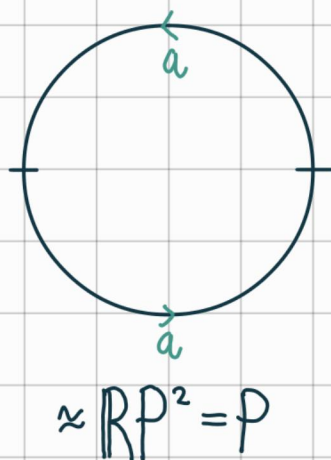
Ali smo zgoraj že našli predstavnike vseh homeomorfizmi razredov in ali so te med seboj nehomeomorfni?

Vprašanja se lotimo tako, da opazujemo ploskve, ki jih lahko dobimo kot kvociente mnogokotnikov, pri katerih se nekatere stranice paroma identificirajo z linearnimi homeomorfizmi (stranica se lahko zlepi z največ eno drugo stranico).

Primer: 2-kotniki:

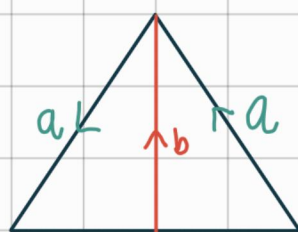
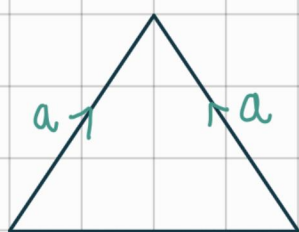


$$aa^{-1}$$



$$aa = a^2$$

Primer: 3-kotniki:



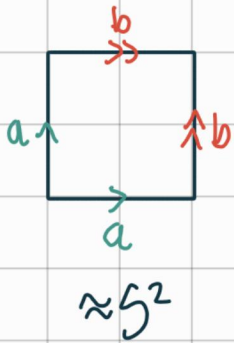
$$\approx B^2$$

$$\partial \approx S^1$$

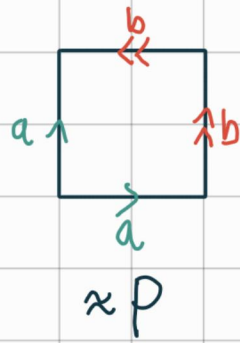
\approx Möbiusov trak

Primer: 4-kotniki:

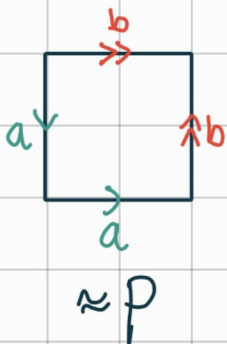
Iščemo le sklenjene ploskve, torej tabe, kjer vse stranice identificiramo v parih.



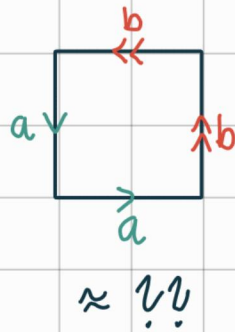
$$abb^{-1}a^{-1}$$



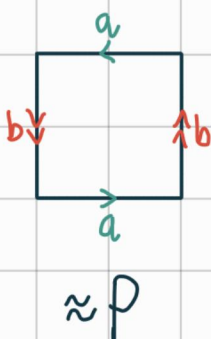
$$ab^2a^{-1}$$



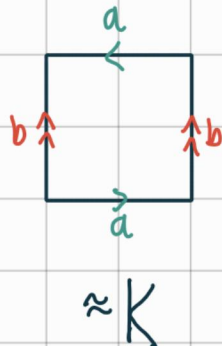
$$abb^{-1}a$$



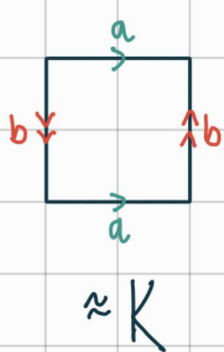
$$ab^2a$$



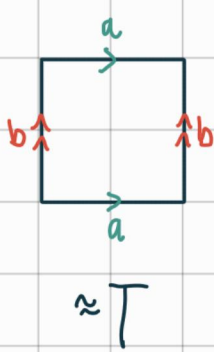
$$abab$$



$$abab^{-1}$$



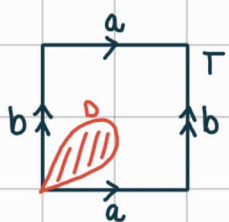
$$aba^{-1}b$$



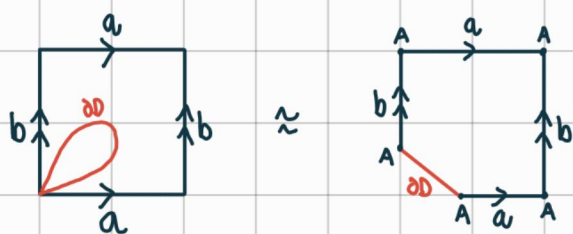
$$aba^{-1}b^{-1}$$

Standardni model za povezane vsote T :

$$2T \approx T \# T$$

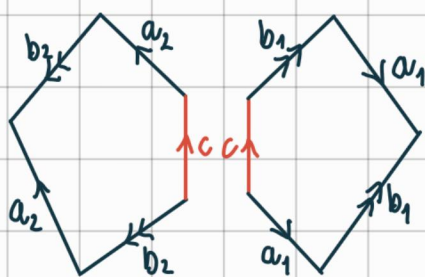


Iz torusa T izrežemo notranjost diska D za konstrukcijo povezane vsote.



Vsa oglišča 5-kotnika so ekvivalentna glede na dano relacijo, zato je kvocient na levi homeomorfen kvocientu na desni.

$2T$ dobimo tako, da zlepiamo 2 torusa z luknjo:



$2T$ je kvocient \mathcal{S} kotnika z besedo $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$.

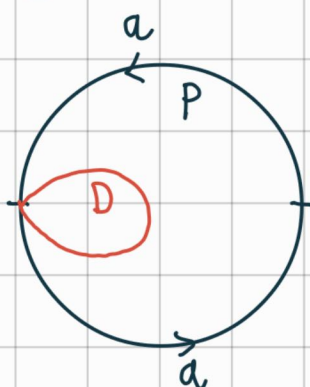
To lahko predoblikujemo kot kvocient pravičnega \mathcal{S} -kotnika.

Ta postopek induktivno nadaljujemo:

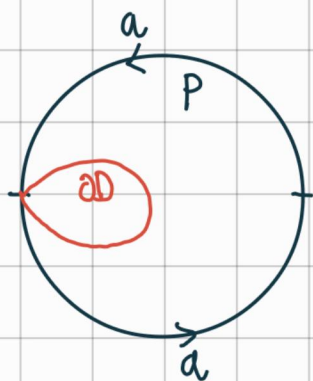
Kvocieni $4n$ -kotnika, določen z besedo $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$, je nT .

Standardni model za povezane vsote P :

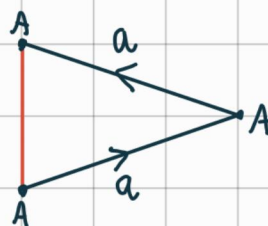
$$2P = P \# P$$



Začnemo tako, da iz P izrežemo notranjost diska.

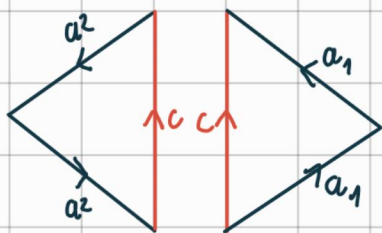


\approx



\approx Möbiusov trak

$2P$ dobimo iz dveh kopij $P \setminus \text{int} D$, zlepjenih po robu.



$2P$ je kvocieni 4 -kotnika z besedo $a_1 a_1 a_2 a_2 = a_1^2 a_2^2$.

nP je kvocieni $2n$ -kotnika z besedo $a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2$.

Trditev: Naj bo $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$ disjunktna unija mnogokotnikov v ravnini, opremljena z ekvivalenčno relacijo \sim , ki ponoma identificira nekatere stranice z linearnim homeomorfizmom.

Potem je vsaka komponenta kvocienta K/\sim kompaktna ploskev.

Opomba: Take ploskve imenujemo **poliedrske ploskve**.

Dokaz: Da je K/\sim T_2 in 2-števen, sledi podobno kot v dokazu deljivosti teh lastnosti pri zleplju vzdolž homeomorfizma.

Dokazati moramo, da ima vsaka točka v K/\sim Evklidsko okolico.

$q: K \rightarrow K/\sim$ kvocientna projekcija

Ker so notranjosti mnogokotnikov K_i nasičene odprte množice, je q zožena na te homeomorfizem na sliko, zato imajo te točke v K/\sim enake okolice kot v K , torej homeomorfne \mathbb{R}^2 .

Če je y iz notranjosti stranice mnogokotnika, nastopita dve možnosti:

(1) $[y] = \{y\}$:

Njena Evklidska okolica je homeomorfna \mathbb{R}_+^2 in se v K homeomorfno preslika v K/\sim . Slika tega y je torej notranja točka v K/\sim .

(2) $[y] = \{y, z\}$:

Euklidski okolici teh točk v K , ki sta homotopni \mathbb{R}_+^2 , se v kvocientu slikata v \mathbb{R}^2 . Toj je slika točke y v K/\sim notranja točka.

Naj bo X opisuje nekoga mnogokotnika K_i v K . Ekvivalenčni razred točke x lahko vsebuje več opisov mnogokotnikov. Ta ekvivalenčni razred je določen z lepljenjem stranic.

$$X = X_1 \sim X_2 \sim X_3 \sim \dots \sim X_k$$



Na sliki nastopita dve možnosti:

(1) Vse stranice ob opisju x_i so identificirane:

$\mathcal{Q}(x_i)$ je notranja.

(2) Natanko 2 stranici ob x_i nista identificirani:

$\mathcal{Q}(x_i)$ je robna.

Opomba: Taka mnogoterost je kompaktna, robne komponente so krožnice in robova obrabek.

Opomba: Taka mnogoterost je sklenjena natanko tedaj, ko so vse stranice identificirane v parih.

Opomba: Ker je povezana, se stranice v različnih mnogokotnikih zlepijo tako, da dobimo povezan prostor. Če želimo, lahko zato tako mnogoterost predstavimo kot kvocient enega mnogokotnika: $K = K_1 \amalg \dots \amalg K_n$

Radójev izrek:

Vsaka kompaktna ploskev je homeomorfna neki poliedrski ploskvi.

Cilj je klasificirati poliedrske ploskve.

Klasifikacijski izrek:

Vsaka sklenjena ploskev je homeomorfna eni od:

- S^2
- nT
- mP

Vse te so paroma nehomeomorfne.

Za dokaz nehomeomorfnosti bomo uporabili dve invarianti.

Izkazalo se bo, da ti invarianti klasificirata ploskve.

ORIENTABILNOST PLOSKEV

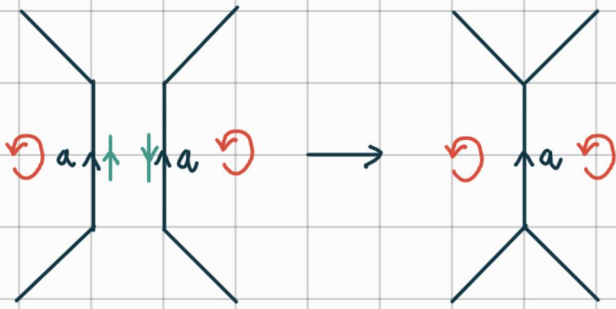
Definicija: Orientacija mnogokotnika je izbira cikličnega zaporedja njegovih vozlišč.

Mnogokotnik ima očitno dve orientaciji.

To lahko ekvivalentno opišemo s smerjo vrtenja na mnogokotniku.

Izbrana orientacija mnogokotnika določa orientacije oziroma usmeritve stranic.

Recimo, da dva mnogokotnika zlepimo po neki stranici.



Kdaj sta mnogokotnika glede na to lepljenje orientirana skladno, torej kdaj skupaj določata orientacijo zlepljenega mnogokotnika?

Mnogokotnika sta orientirana skladno, če v inducirano stranico inducirata nasprotni orientaciji.

Definicija: Poliedrska plošev je orientabilna, če lahko izberemo orientacije mnogokotnikov tako, da so mnogokotniki skladno orientirani glede na vsa lepljena stranice.

Opomba: Isti pogoj skladnosti velja tudi za stranice na robu enega mnogokotnika.



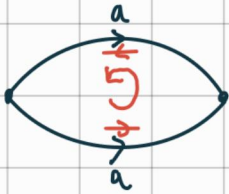
Izbrana orientacija mnogokotnika inducira nasprotni orientaciji stranice a ob upoštevanju identifikacij, zato je kolobar orientabilen.



Ne glede na izbiro orientacije mnogokotnika ta določa isto orientacijo za zlepljeni stranici, torej Möbiusov trak, predstavljen kot zgornji kvocient, ni orientabilen.

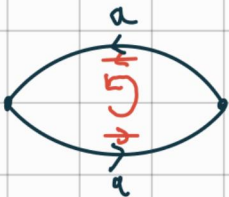
Ne vemo pa še, ali obstaja kakšna druga poliedrska struktura na Möbiusovem traku, ki določa orientacijo.

Primer:



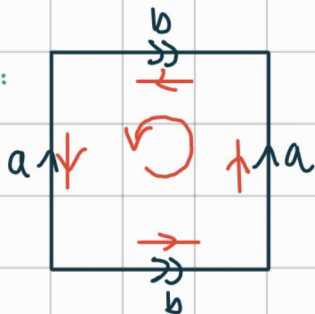
S^2 je orientabilna glede na to strukturo.

Primer:



$P = \mathbb{R}P^2$ ni orientabilna glede na to strukturo.

Primer:



$T = S^1 \times S^1$ je orientabilen glede na to strukturo.

Izrek: Orientabilnost poliedrske ploskve je topološka lastnost, torej neodvisna od izbire poliedrske strukture na ploskvi.

Trditve: 1) Če je poliedrska ploskev M orientabilna in je $N \subseteq M$ poliedrska podploskev, potem je tudi N orientabilna.

2) Če je M poliedrska ploskev z nepraznim robom ∂M , potem izbira orientacije M določa orientacijo ∂M .

3) Če sta M, N orientabilni poliedrski ploskvi, je orientabilna tudi njuna povezana vsota.

Torej: S^2, T orientabilni $\Rightarrow nT$ orientabilne $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S^2 =: OT$$

\Rightarrow Orientabilne sklenjene ploskve so $nT, n \in \mathbb{N}_0$.

P ni orientabilna in $P \setminus \{D\}$ ni orientabilna.

$\Rightarrow mP, m \in \mathbb{N}_0$ niso orientabilne.

$\Rightarrow nT \not\approx mP, n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$

EULERJEVA KARAKTERISTIKA

Naj bo M poliedrska ploskev, $M = (K_1 \amalg \dots \amalg K_n) / \sim$.

Naj bo $g: K \rightarrow M = K / \sim$ kvocientna projekcija.

Slike oglišč mnogokotnikov imenujemo 0-celice ali vozlišča.

Slike odprtih stranic mnogokotnikov imenujemo 1-celice ali povezave.

Slike notranjosti mnogokotnikov imenujemo 2-celice ali lica.

Opomba: Vozlišča in povezave tvorijo nek povezan graf G na ploskvi M . Lica tega grata so odprti diski.

Opomba: Poljubna 1-celica je lahko slika ene ali dveh stranic mnogokotnika.

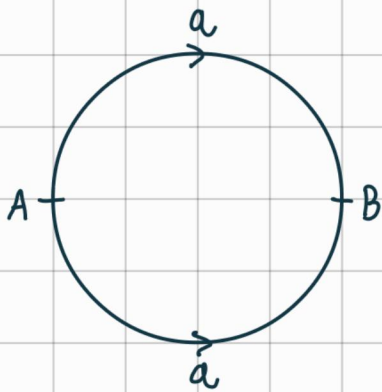
Poljubna 0-celica je lahko slika več oghišč mnogokotnikov.

Definicija: Eulerjeva karakteristika poliedrske ploskve M je:

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \#(0\text{-celic}) - \#(1\text{-celic}) + \#(2\text{-celic}) = \\ &= V - E + F \end{aligned}$$

Izrek: Eulerjeva karakteristika je topološka invarianta ploskve, torej neodvisna od izbire poliedrske strukture.

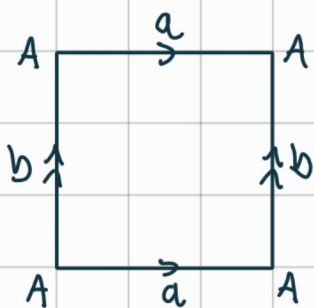
Primer: S^2 :



i	$\#(i\text{-celic})$
0	2
1	1
2	1

$$\chi(S^2) = 2 - 1 + 1 = 2$$

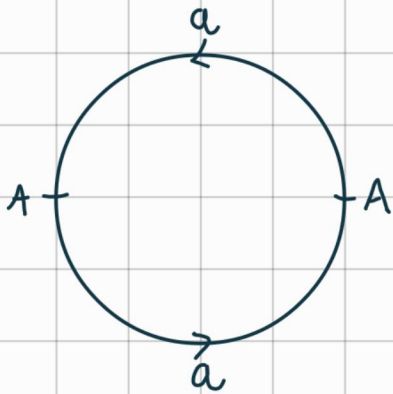
Primer: $T = S^1 \times S^2$:



i	$\#(i\text{-cells})$
0	1
1	2
2	1

$$\chi(T) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Primer: $P = \mathbb{R}P^2$:



i	$\#(i\text{-cells})$
0	1
1	1
2	1

$$\chi(P) = 1 - 1 + 1 = 1$$

Primer: nT :

nT ... kvocient $4n$ -kotnika z besedo $a, b, a^{-1}, b^{-1}, \dots$

i	$\#(i\text{-cells})$
0	1
1	$2n$
2	1

$$\chi(nT) = 2 - 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \forall n_1 \neq n_2: \chi(n_1T) \neq \chi(n_2T)$$

$$\Rightarrow n_1T \not\cong n_2T$$

⇒ Vse orientabilne ploskve $S^2, T, 2T, \dots$ so paroma nehomeomorfne.

Primer: mP :

mP ... kvocient $2m$ -kotnika z besedo $a_1 a_2 a_2 \dots a_m a_m$

i	$\#(i\text{-celic})$
0	1
1	m
2	1

$$\chi(mP) = 2 - m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

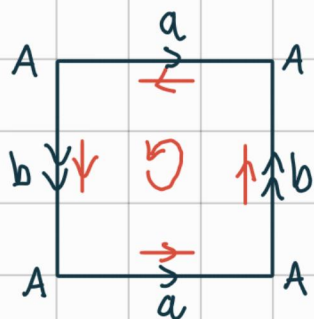
⇒ $\forall m_1 \neq m_2: \chi(m_1P) \neq \chi(m_2P)$

⇒ $m_1P \not\cong m_2P$

Dokazati je treba še, da je vsaka ploskev ena od S^2, nT, mP .

V resnici je homeomorfnostni razred določen z orientabilnostjo ploskve in Eulerjevo karakteristiko.

Primer: Kleinova steklenica K :



Lepljenje vzdolž a je orientabilno, lepjenje vzdolž b pa ne.

⇒ K ni orientabilna.

$\Rightarrow K \approx mP$ za neki $m \in \mathbb{N}$.

i	$\#(i\text{-celic})$
0	1
1	2
2	1

$$\chi(K) = 0 = 2 - 2 = \chi(2P)$$

$$\Rightarrow K = 2P$$

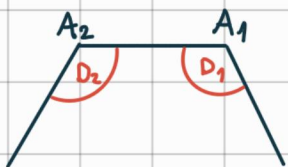
Za dokaz klasifikacijskega izreka moramo dokazati še, da je vsaka sklenjena poliedrska plošev homeomorfna eni od S^2 , nT , mP , $n, m \in \mathbb{N}$.

Naj bo M poljubna sklenjena poliedrska plošev.

Vemo, da lahko M predstavimo kot kvocient enega mnogokotnika.

Privzeti smemo, da je M kvocient pravilnega mnogokotnika K , v katerem so vse stranice paroma identificirane.

Oznacimo z A_1, \dots, A_k oglišča mnogokotnika K . Izberimo $\delta > 0$, da so zaprti krogi polmera δ okoli oglišč paroma disjunktni.

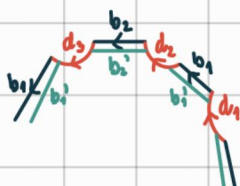


Naj bo $D_i = \overline{K}(a_i, \delta) \cap K$. K in posledično M razrežemo vzdolž daljic $d_i \subseteq \partial D_i$ in tako dobimo K z razrezanimi obkrožnicami oglišč in unijo diskov D_1, \dots, D_k , v katerih upoštevamo identifikacije, dobljene z lepljenjem.

Ker stranice identificiramo z linearnimi homeomorfizmi, ki so izometrije, se D_i lepo zlepijo v diske. Ti diski se skladno z oznakami prilepijo na robne komponente v kvocientu.

$$L := K \setminus \bigcup_{i=1}^k \overset{\circ}{D}_i$$

$$N := (K \setminus \bigcup_{i=1}^k \overset{\circ}{D}_i) / \sim$$



L oziroma N predstavimo kot disk z ročaji tako, da ob vsaki stranici identificirani stranici odrežemo ozek pas, tako da so pasovi disjunktini. Na ta način L zmanjšamo do manjšega diska L' , pri čemer odrezanih pasov pa se ob upoštevanju identifikacij zlepijo v kvadre, ki se v konstrukciji N lepijo na disk L' .

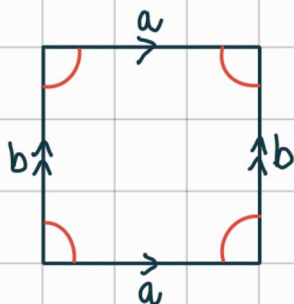
Na ta način smo N predstavili kot disk L' s prilepljenimi trakovi, ki jih imenujemo ročaji.

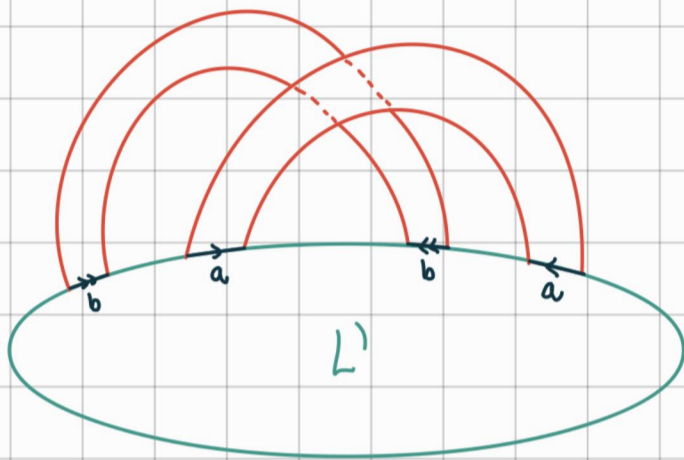
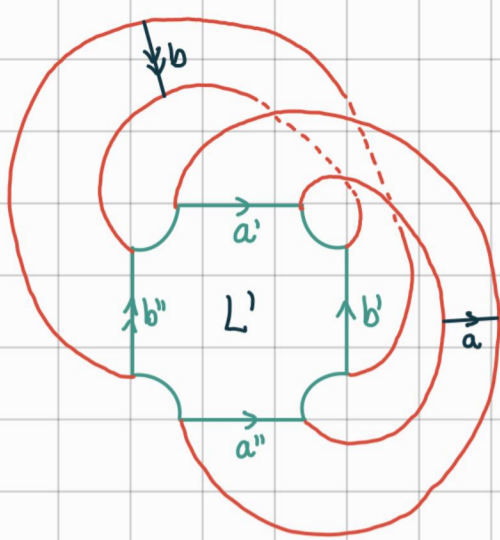
Pri lepjenju ročajev nastopita dve možnosti:

Zlepek diska L' in ročajev je lahko orientabilna ploskev, torej koldan ali plaso valja. Tedaj rečemo, da je ročaj orientabilen.

Lahko pa je zlepek neorientabilna ploskev, torej Möbiusov trak. Tedaj ročaj imenujemo neorientabilen.

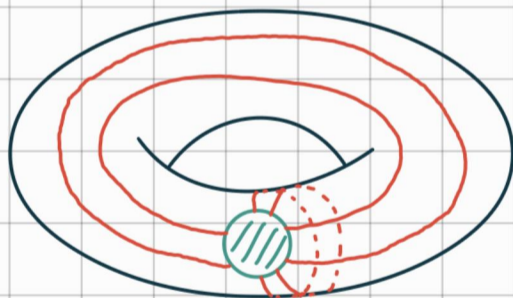
Primer:





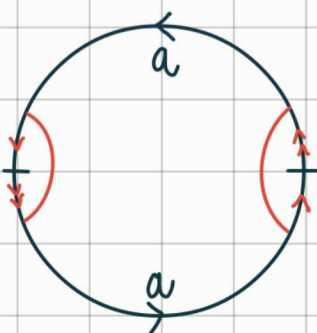
Dobili smo prepleten par orientabilnih ročajev, ki ustreza besedi $aba^{-1}b^{-1}$.

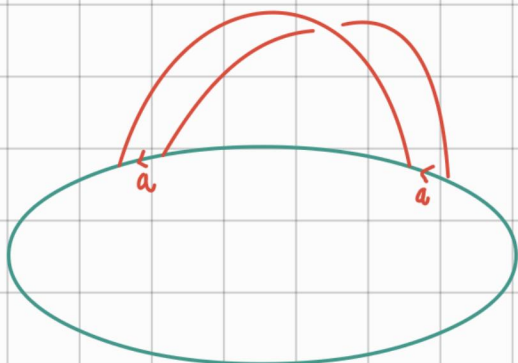
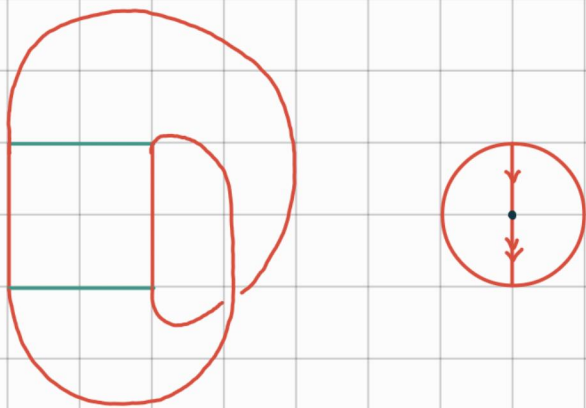
Torus iz diska z ročaji dobimo tako, da po robu prilepimo disk.



Primer: Na osnovi zgornjega primera vidimo, da je nT predstavljen kot zlepki diska z $2n$ ročaji, ki so prilepljeni kot n parov orientabilnih prepletenih ročajev skladno z besedo $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_n a_n^{-1}b_n^{-1}$, in enega diska (oblika oglišča), ki se prilepi na rob.

Primer:





Projektivna ravnina z odstranjenim 1-diskom je predstavljena kot disk, na katerega je prilepljen en reorientabilen ročaj z besedo aa .

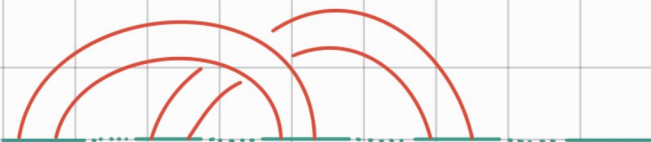
Primer: mP je zlepek diska Z na neorientabilnimi ročaji z besedo $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$ z diskom, ki je prilepljen na rob.

Ploskev M smo predstavili kot disk z ročaji N , na katerega smo prilepili nekaj diskov.

Ločimo dva primera:

i) Vsi ročaji so orientabilni:

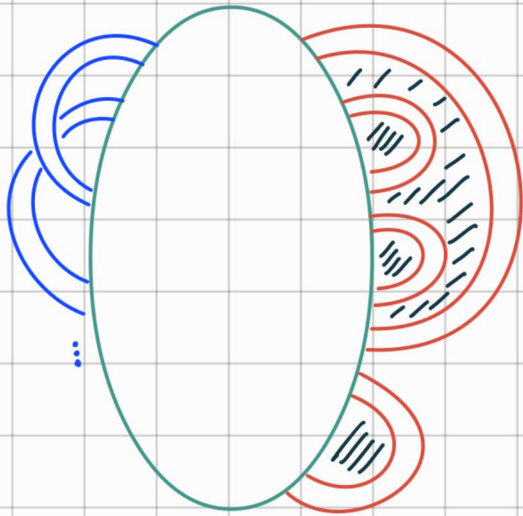
Če obstaja prepleten par ročajev, ga lahko izbiramo.



V tem primeru lahko pritrdišča drugih ročajev predstavimo levo ali desno od para, tako da znotraj para ni pritrdišč drugih ročajev.

To, da zapeljemo pritrdišče enega ročaja preko drugega, lahko realiziramo z rezanjem in lepjenjem.

S ponavljanjem tega postopka dobimo disk z ročaji, v katerem so vsi prepleteni pari izolirani in prilepljeni en za drugim.

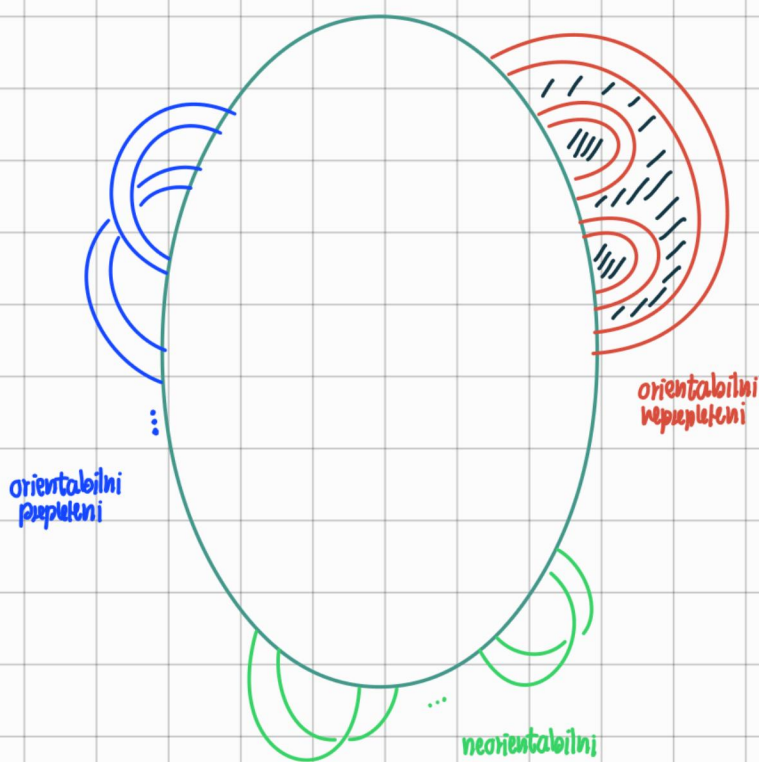


Neprepletene ročaje lahko z lepjenjem prej izrezanih diskov gledamo kot del diska, na katerega lepimo ročaje.

⇒ To je homeomorfno nT .

(ii) Obstaja vsaj en neorientabilen ročaj:

Kot pri prepletenih parih lahko neorientabilne ročaje izoliramo.



Orientabilne neprepletene spet zlepimo z diski.

Pretvorimo preostanek v disk z neorientabilnimi ročaji.

Opomba: Sledi, da je $T \# P \approx 3P$.

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$