BROUWERJEV IZREK O NEGIBNI TOČKI

Definicija: Naj bo $f: X \to X$. $a \in X$ je negibna točka za f, če je $f(a) = a$.

Opomba: Negibna točka je rešitev enačbe $f(x) = x$ oziroma $g(x) = f(x) - x = 0$.

Opomba: Obstoj neke negibne točke je odvisen tako od lastnosti prostora X kot od lastnosti preslikave f.

Opomba: Banachovo skrčitveno načelo je primer izreka o negibni točki, ki deluje na polnih metričnih prostorih za skrčitve.

Naj bo $n \in \mathbb{N}$.

Izjava A_n (Brouwerjev izrek o negibni točki):

Poljubna zvezna preslikava $f: B^n \to B^n$ ima negibno točko.

Opomba: Enako velja za vsak prostor, homeomorfen B^n.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f\ zv"] \arrow[d, "h"', "\approx"] & X \arrow[d, "\approx"', "h"] \\
B^n & B^n
\end{tikzcd}
$$

$h(f(h^{-1}(a))) = a$ negibna točka za $h \circ f \circ h^{-1}$

$f(h^{-1}(a)) = h^{-1}(a)$

$\Rightarrow h^{-1}(a)$ negibna točka za f

Definicija: Prostor X ima lastnost negibne točke (LNT), če ima vsaka zvezna $f : X \to X$ negibno točko.

Opomba: $A_n \iff B^n \in LNT$

Opomba: Iz Analize 1 že vemo, da A_1 velja:

$I \in LNT$

Primer: S^1 nima lastnosti negibne točke, saj netrivialne rotacije nimajo nobene fiksne točke.

Primer: S^m nima lastnosti negibne točke, saj $f : x \mapsto -x$ nima negibne točke.

Definicija: Naj bo X topološki prostor, $A \subseteq X$. Zvezna preslikava $r : X \to A$ je retrakcija, če je $r|_A = id_A$. Tedaj rečemo, da je A retrakt prostora X.

Primer: Naj bo $x_0 \in X$ poljuben.

$A = \{x_0\}$ je retrakt prostora X:

$$r : X \to A$$
$$x \mapsto x_0$$

Primer: S^n_+ je retrakt S^n:

$r:(x_1,\dots,x_{n+1})\mapsto(x_1,\dots,x_n,|x_{n+1}|)$

Primer: Vse retrakcije iz intervala $I=[0,1]$ na $A=\{0,1\}$:

Recimo, da obstaja $r: I \to A$. Ker je zvezna slika povezanega povezana, je $r_*(I)$ povezana. Ker pa je $r|_A = id_A$, je $r_*|_A(A)=A$, ki pa je nepovezana.

Torej retrakcij ni.

Trditev: 1) Retrakt povezanega (s potmi) prostora je povezan (s potmi).

2) Retrakt kompaktnega prostora je kompakten.

3) Če je $X\in T_2$, je retrakt prostora X zaprt v X.

Dokaz: 3) Uporabimo, da se zvezni $f,g: X\to \underset{T_2}{\underset{\cap}{Y}}$ ujemata na zaprti množici.

$A\subseteq X$ retrakt

$r: X\to A$ retrakcija

$f: X\xrightarrow{r} A \xhookrightarrow{i} X$

$id: X\to X$

f in id se ujemata natanko na A.

Trditev: Če ima X lastnost negibne točke, ima tudi vsak njegov retrakt lastnost negibne točke.

Dokaz: Naj bo $r: X \to A$ retrakcija in naj ima X LNT.

A ima LNT

Naj bo $f: A \to A$ poljubna zvezna.

$$g: X \xrightarrow{r} A \xrightarrow{f} A \xhookrightarrow{i} X$$

g je zvezna. Ker je X LNT, ima g negibno točko:

$$\exists x_0 \in X: \quad g(x_0) = x_0$$
$$\begin{array}{c} \parallel \end{array}$$
$$\underbrace{f(r(x_0))}_{\in A} = x_0$$

$\Rightarrow x_0 \in A$

$\Rightarrow r(x_0) = x_0$

$\Rightarrow f(x_0) = x_0$

Definicija: Y je absolutni ekstenzor za nek razred topoloških prostorov $\mathcal{R}$, če za vsako $A^{zap} \subseteq X \in \mathcal{R}$ in poljubno zvezno $f: A \to Y$ obstaja razširitev $F: X \to Y$ $(F|_A = f)$.

Opomba:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\exists F"'] & \end{tikzcd}$$

Trditev: 1) Biti absolutni ekstenzor je topološka lastnost.

2) Produkt $AE(\mathcal{R})$ je $AE(\mathcal{R})$.

3) Retrakt $AE(\mathcal{R})$ je $AE(\mathcal{R})$.

Definicija: Naj bo $\mathcal{R}$ družina topoloških prostorov. $Y \in AR(\mathcal{R})$ je **absolutni retrakt** za družino $\mathcal{R}$, če velja:

1) $Y \in \mathcal{R}$

2) Za vsako zaprto vložitev $\varphi : Y \to X$, $X \in \mathcal{R}$ je $\varphi(Y)$ retrakt prostora X.

Trditev: $\mathcal{R} \cap AE(\mathcal{R}) \subseteq AR(\mathcal{R})$

Dokaz: $Y \in \mathcal{R} \cap AE(\mathcal{R})$
$X \in \mathcal{R}$
$\varphi : Y \to X$ zaprta vložitev

$$A := \varphi(Y) \overset{zap}{\subseteq} X$$

$$A \approx Y \Rightarrow A \in AE(\mathcal{R})$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \\
X \arrow[ur, "\exists r \text{ retrakcija}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ali je spirala retrakt ravnine?

Da. Kompaktna spirala je homeomorfna $[0,1]$, torej je $AR(\mathcal{N})$. Nekompaktna spirala pa je homeomorfna $(0,1)$, torej je $AR(\mathcal{N})$.

Izjava B_n (Izrek o neobstoju retrakcije):

$$S^{n-1} \text{ ni retrakt } B^n.$$

Opomba: Vemo že, da B_1 velja:

$$\underset{\{-1,1\}}{\underset{\parallel}{S^0}} \text{ ni retrakt } \underset{[-1,1]}{\underset{\parallel}{B^1}}$$

Opomba: Ne obstaja zvezna $r: B^2 \to S^1$, ki miruje na S^1.

Vemo pa, da je S^1 retrakt $B^2 \setminus \{0\}$ s standardno radialno retrakcijo:

$$r: B^2 \setminus \{0\} \to S^1$$
$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

Definicija: Preslikavi $f, g: X \xrightarrow{zv.} Y$ sta **homotopni** ($f \simeq g$), če med njima obstaja **homotopija**:

Zvezna preslikava $H: X \times I \to Y$, za katero je $H(x,0) = f(x)$ in $H(x,1) = g(x)$.

Za vsak $t \in [0,1]$ definiramo:

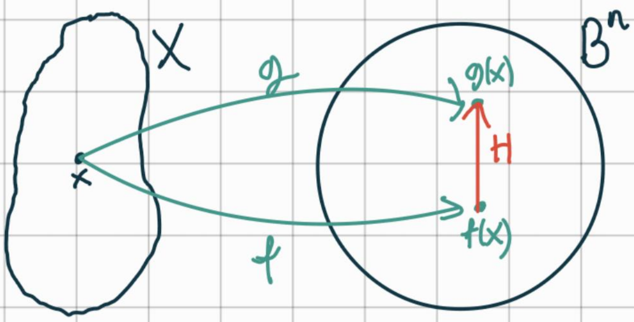
$$H_t: X \to Y$$
$$x \mapsto H(x,t)$$

$H_0 = f$
$H_1 = g$

Definicija: Prostor X je **kontraktibilen**, če je id_X homotopna kaki konstantni preslikavi. Pripadajočo homotopijo imenujemo **kontrakcija**.

Oznaka: $X \simeq *$

Primer: Za poljuben prostor X sta poljubni preslikavi $f, g: X \to B^n$ homotopni s premočrtno homotopijo:



$$H(x,t) = (1-t)f(x) + t\,g(x)$$

Namesto B^n imamo lahko poljubno konveksno množico.

Primer: B^n je kontraktibilen:

$$id: B^n \to B^n,\ x \mapsto x \quad \simeq \quad c_0: B^n \to B^n,\ x \mapsto 0$$

Enako velja za zvezdaste množice.

Primer: $\mathbb{R}^n$ je kontraktibilen:

$$(x,t) \mapsto (1-t)\cdot x$$

Primer: Ali je S^0 kontraktibilna?

$S^0 = \{-1, 1\}$

$H : S^0 \times I \to S^0$
$H_0 = id, \quad H_1 = \text{konst.}$

Ker je I povezan, je slika $\{-1\} \times I$ povezana, in ker je $H(-1,0) = -1$, je $H(\{-1\} \times I) = \{-1\}$.

Podobno $H(\{-1\} \times I) = \{1\}$.

$\Rightarrow H_1 = id$

$\Rightarrow S^0$ ni kontraktibilna.

Izjava C_n:

Sfera S^{n-1} ni kontraktibilna.

Trditev: Za vsak $n \in \mathbb{N}$ so izjave A_n, B_n in C_n ekvivalentne.

Dokaz: Vse implikacije bomo dokazovali s kontrapozicijo.

A_n: B^n ima lastnost negibne točke
B_n: S^{n-1} ni retrakt B^n
C_n: S^{n-1} ni kontraktibilna

$A_n \Rightarrow B_n$

Naj bo $r : B^n \to S^{n-1}$ retrakcija. Iščemo zvezno $f : B^n \to B^n$ brez negibne točke.

$$f: B^n \to B^n$$
$$x \mapsto -r(x)$$

Iščemo negibne točke preslikave f.

$f(x) = x$

$$\underset{\underset{S^{n-1}}{\cap}}{-r(x)} = \underset{\underset{S^{n-1}}{\cap}}{x}$$

$\overset{x \in S^{n-1}}{\Longrightarrow} r(x) = x \Rightarrow -x = x$

$\Rightarrow x = 0 \notin S^{n-1}$

$B_n \Rightarrow A_n$

Naj obstaja zvezna $f: B^n \to B^n$ brez negibne točke. Torej za vsak $x \in B^n$ velja $f(x) \neq x$.

Naj bo $R(x)$ odprt poltrak iz $f(x)$ skozi x.

Ta poltrak seka sfero S^{n-1} v natanko eni točki, ki jo označimo z $r(x)$. Tako dobimo preslikavo $r: B^n \to S^{n-1}$.

Če je $x \in S^{n-1}$, je očitno $R(x) \cap S^{n-1} \ni x$ in zato $r(x) = x$.

Preveriti je treba še, da je r dobro definirana in zvezna.

$B_n \Rightarrow C_n$

Predpostavimo, da je S^{n-1} kontraktibilna:

$$\exists H: S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$$
$$H_0 = id_{S^{n-1}}, \quad H = c$$

Poiskati moramo retrakcijo $r: B^n \to S^{n-1}$.

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \times I \arrow[r, bend left, "c"] \arrow[r, "H"] \arrow[r, bend right, "id_{S^{n-1}}"'] \arrow[d, "q"'] & S^{n-1} \\
B^n \arrow[r, "r"'] & S^{n-1}
\end{tikzcd}$$

$$q(x,t) := (1-t)x$$

q je kvocientna, ker je zvezna, surjektivna in zaprta.

q je injektivna na $S^{n-1} \times [0,1)$, $S^{n-1} \times \{1\}$ pa preslika v eno točko. Edini netrivialen ekvivalenčni razred je $S^{n-1} \times \{1\}$, ki ga H slika v c.

Torej je H konstantna na ekvivalenčnih razredih, torej določa inducirano $r: B^n \to S^{n-1}$.

Iz zveznosti H sledi zveznost r.

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "q"'] & S^{n-1} \\
B^n \arrow[ur, dashed, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

$r|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$

$C_n \Rightarrow B_n$

Predpostavimo, da obstaja retrakcija $r: B^n \to S^{n-1}$.

Iščemo kontrakcijo sfere S^{n-1}:

$H: S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$
$H_0 = id, \quad H_1 = c$

Vzamemo lahko $H := r \circ f$.

JORDAN-BROUWERJEV DELILNI IZREK

Definicija: Naj bo X povezan topološki prostor. $A \subseteq X$ deli X, če je $X \setminus A$ nepovezan.

Primer: $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ deli $\mathbb{R}^2$.

Primer: $A = S^1$ deli $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ ima dve komponenti, omejeno imenujemo notranjost krožnice, neomejeno pa zunanjost.

Primer: $A = B^1 \times \{0\}$ ne deli $\mathbb{R}^2$.

Ali je lastnost, da $A \subseteq X$ deli X, topološka v naslednjem smislu:

Če je $\varphi: A \hookrightarrow X$ poljubna preslikava, ali za A in $\varphi(A)$ velja enako glede deljenja prostora X?

Primer: $A = \mathbb{R} \times \{0\} \approx (-1,1) \times \{0\}$ ne deli $\mathbb{R}^2$

Definicija: $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $S \approx S^1$ imenujemo topološka krožnica ali enostavna krivulja ali Jordanova krivulja.

Jordanov izrek (1887):

Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ topološka krožnica.

Potem S deli $\mathbb{R}^2$ na omejeno in neomejeno komponento ter S je meja obeh komponent v $\mathbb{R}^2$.

Opomba: Dokaz je relativno preprost za poligonske krivulje.

Jordan-Brouwerjev delilni izrek (1912):

Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-dimenzionalna topološka sfera, torej $S \approx S^{n-1}$.

Potem ima $\mathbb{R}^n \setminus S$ natanko dve komponenti, eno omejeno in eno neomejeno. S je meja obeh komponent. Komponenti sta odprti in povezani s potmi.

Opomba: Podobno velja za topološke $(n-1)$-sfere v S^n, le da tedaj komponenti nista omejena in neomejena.

Lema: Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktna. $\mathbb{R}^n \setminus X$ ima natanko eno neomejeno komponento. Vse komponente $\mathbb{R}^n \setminus X$ so odprte v $\mathbb{R}^n$ in povezane s potmi. Meja vsake komponente je vsebovana v X.

Dokaz: X kompaktna $\Rightarrow$ X omejena

$\Rightarrow \exists r > 0 : X \subseteq K(0,r)$

$\mathbb{R}^n \setminus X \supseteq \mathbb{R}^n \setminus K(0,r)$

$\mathbb{R}^n \setminus K(0,r)$ je povezana, zato leži v neki komponenti $\mathbb{R}^n \setminus X$, ki je torej neomejena.

Vse ostale komponente $\mathbb{R}^n \setminus X$ so vsebovane v $K(0,r)$, torej omejene.

X kompaktna $\Rightarrow$ X zaprta

$\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus X$ odprta

Ker je $\mathbb{R}^n$ lokalno povezan s potmi, so komponente $\mathbb{R}^n \setminus X$ odprte in lokalno povezane s potmi, torej tudi povezane s potmi.

Če je V poljubna komponenta $\mathbb{R}^n \setminus X$, je odprta, zato ne more vsebovati mejne točke nobene komponente. Edine mejne točke so lahko v X.

Najprej bomo dokazali, da je meja vsake komponente $\mathbb{R}^n \setminus S$ enaka S. Pri tem si bomo pomagali z naslednjim rezultatom:

Topološki disk ne deli evklidskega prostora.

Izrek D_n:

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ topološki k-disk za $0 \leq k \leq n$, torej $D \approx B^k$.

Potem D ne deli $\mathbb{R}^n$, torej $\mathbb{R}^n \setminus D$ je povezan.

Dokaz: Dokazali bomo $B_n \Rightarrow D_n$ s kontrapozicijo.

Recimo, da D_n ne velja, torej D deli $\mathbb{R}^n$.

Zato ima po lemi $\mathbb{R}^n \setminus D$ vsaj eno omejeno komponento W.

Izberimo $w \in W$. Ker je $W \cup D$ omejena, obstaja $R > 0$, da je $W \cup D \subseteq K(w, R)$.

Dokazali bomo, da je pri teh predpostavkah sfera $S(w, R)$ retrakt krogle $\overline{K}(w, R)$, kar je $\neg B_n$.

Ker je $D \approx B^k \approx I^k \in AE(\mathcal{N}) \cap \mathcal{N}$, je $D \in AR(\mathcal{N})$.

Ker je $D \overset{zap}{\subseteq} D \cup W \in \mathcal{N}$, je D retrakt $D \cup W$, torej obstaja retrakcija $r : D \cup W \to D$, $r|_D = id_D$.

To retrakcijo najprej razširimo do zvezne $f : \overline{K}(w, R) \circlearrowleft$:

$$f(x) := \begin{cases} r(x) & ; \ x \in D \cup W \\ x & ; \ x \in \overline{K}(w, R) \setminus W \end{cases}$$

Po lemi je $\text{Meja}_{\mathbb{R}^n} W \subseteq D$, torej je $D \cup W$ zaprta.

$$\overline{D \cup W} = \overline{D} \cup \overline{W} \subseteq D \cup (W \cup D) = W \cup D$$

Ker je $W \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, je tudi $\overline{K}(w, R) \setminus W$ zaprta.

$(D \cup W) \cap (\overline{K}(w,R) \setminus W) = D$, $r|_D = id$

$\Rightarrow f$ je zvezna

V resnici f slika v $\overline{K}(w,R) \setminus W$.

Naj bo $\rho : \overline{K}(w,R) \setminus \{w\} \to S(w,R)$ radialna retrakcija, definirana s predpisom $\rho(x) = R \cdot \frac{x-w}{\|x-w\|} + w$, ki je zvezna, zato retrakcija na $S(w,R)$.

Kompozitum $\rho \circ f : \overline{K}(w,R) \to S(w,R)$ je retrakcija.

To je protislovje z B_n.

Trditev: Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ topološka $(n-1)$-sfera, ki deli $\mathbb{R}^n$. Potem je meja vsake komponente v $\mathbb{R}^n \setminus S$ enaka S.

Dokaz: Iz leme vemo, da je meja vsebovana v S. Dokazujemo še drugo inkluzijo.

Za poljubno komponento V množice $\mathbb{R}^n \setminus S$ dokazujemo, da je vsaka točka iz S v meji V.

Denimo, da to ne velja: Obstaja $x \in S$ in njena odprta okolica W, ki ne seka V.

Naj bo $h : S^{n-1} \to S$ homeomorfizem.

Potem je $h^{-1}(W)$ okolica točke $h^{-1}(x)$ v S^{n-1}.

Potem obstaja $r > 0$, da je $\overline{K}(h^{-1}(x), r) \cap S^{n-1} \subseteq h^{-1}(W)$.

Množica $H := S^{n-1} \setminus K(h^{-1}(x), r)$ je homeomorfna B^{n-1}, torej je H topološki $(n-1)$-disk. Torej je tudi $h(H)$ topološki $(n-1)$-disk in po Dn ne deli $\mathbb{R}^n$.

Izberimo $v \in V$ in $v' \in V'$, kjer je $V' \neq V$ še ena komponenta $\mathbb{R}^n \setminus S$. Potem obstaja $\gamma : (I, 0, 1) \to (\mathbb{R}^n \setminus h(H), v, v')$.

Ker sta V in V' različni komponenti za $\mathbb{R}^n \setminus S$, mora tir poti γ sekati S, ne seka pa $h(H)$, torej seka S znotraj W.

Naj bo t_0 najmanjši čas iz $I = [0,1]$, pri katerem $\gamma(t)$ seka S.

$$t_0 = \min\{t \,;\, \gamma(t) \in S\} = \min \gamma^{-1}(S).$$

$$\gamma(t_0) \in W, \quad \gamma(t) \in V \text{ za } t < t_0$$

Ker je W odprta in γ zvezna, obstaja $\delta > 0$, da je $\gamma((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \subseteq W$.

$$\Rightarrow \gamma((t_0 - \delta, t_0)) = \emptyset$$

$$\not\parallel$$

$$\emptyset$$

$$\times$$

Ostalo je še dokazati, da ima $\mathbb{R}^n \setminus S$ natanko 2 komponenti, torej da ima natanko eno omejeno.

Za $n > 2$ se da to najlažje dokazati s sredstvi algebraične topologije, za $n = 2$ pa bomo na roke.

Lema: Naj bo $P=[a,b]\times[c,d]$ pravokotnik in poti $v,h:[-1,1]\to P$, za kateri velja $h=(h_1,h_2)$, $v=(v_1,v_2)$ ter $h(-1)=a$, $h(1)=b$ ter $v(-1)=c$, $v(1)=d$. Tedaj se tira teh poti sekata, torej obstajata $s,t\in[-1,1]$, da je $h(s)=v(t)$.

Dokaz: Sledi iz izreka A_2, torej vsak $f^{zv}:B^2\to B^2$ ima negibno točko.

Denimo, da se ne sekata.

$$\Rightarrow \forall s,t\in[-1,1]: h(s)\neq v(t)$$

$$\Rightarrow D:[-1,1]^2\to[0,\infty)$$
$$(s,t)\mapsto \|h(s)-v(t)\|_\infty$$
povsod neničelna

$$F:[-1,1]^2\to[-1,1]^2$$
$$(s,t)\mapsto\left(\frac{v_1(t)-h_1(t)}{D(s,t)},\frac{h_2(s)-v_2(t)}{D(s,t)}\right)$$

$\Rightarrow F$ zvezna

$\forall s,t\in[-1,1]:$ ena od komponent $F(s,t)$ je ±1

$\Rightarrow F$ slika v rob kvadrata $[-1,1]^2$

Trdimo, da F nima negibne točke.

Oglejmo si točke $(s,t)=(-1,t)$. Če bi bila taka točka negibna za F, bi veljalo $F(-1,t)=(-1,t)$.

$$\Rightarrow \frac{v_1(t)-h_1(-1)}{D(-1,t)}=-1$$

$$\Rightarrow h_1(-1)-v_1(t)=D(-1,t)$$

$\Rightarrow a - \underset{\geq 0}{v_1}(t) = D(-1,t)$

$\Rightarrow D(-1,t) \leq 0$

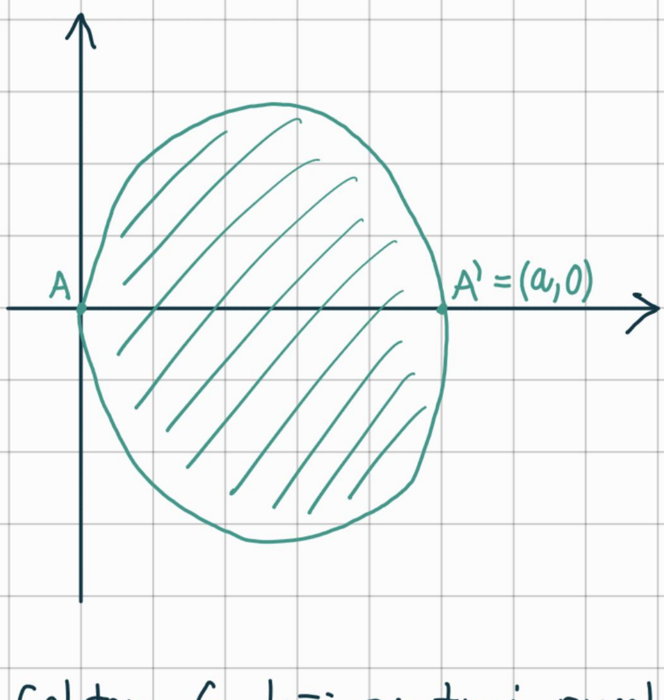
Podobno tudi primere $(s,t)=(1,t)$, $(s,t)=(s,-1)$, $(s,t)=(s,1)$.

Trditev: Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ topološka krožnica ($S \approx S^1$). Potem ima $\mathbb{R}^2 \setminus S$ natanko eno omejeno komponento.

Dokaz: Naj bosta $A, A' \in S$ dve najbolj oddaljeni točki na S (razdalja na kompaktu $S \times S$ ima maksimum).

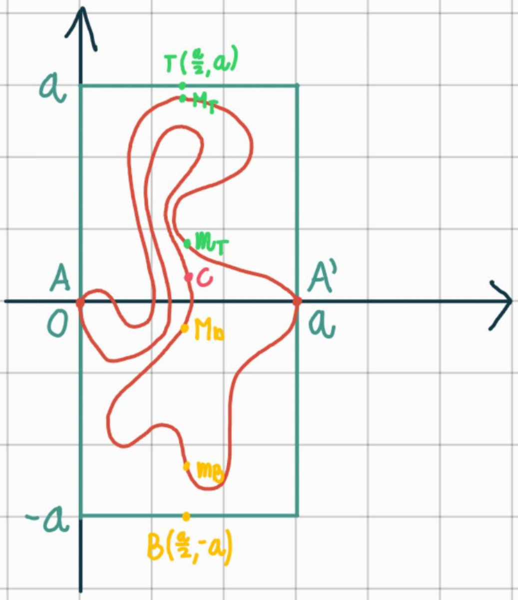
$a := d(A, A')$

Postavimo koordinatni sistem tako, da je A v izhodišču in je A' na $(a,0)$.



Celoten S leži znotraj preseka krožnic iz A in A' z radijema a.

$\Rightarrow S$ lahko pokrijemo s pravokotnikom $[0,a] \times [0,a]$.



A in A' razdelita S na dva loka, ki po zgornji lemi sekata daljico BT.

Najvišje presečišče $S \cap BT$ označimo M_T. Tisti lok od A do A', ki vsebuje M_T, označimo S_T, drugega pa S_B.

Z m_T označimo najnižje presečišče $S_T \cap BT$.

Trdimo, da S_B seka Bm_T.

S_B je tir neke poti od leve do desne stranice $P = [0,a] \times [-a,a]$ in $Bm_T \cup$ (podlok v S_T od m_T do M_T) $\cup\, M_T T$ je tir poti od spodnje do zgornje stranice P, zato se po lemi ti množici sekata.

S_B očitno ne seka $M_T T$ po definiciji in podlok S_T je disjunkten z S_B, zato S_B seka Bm_T.

Označimo najvišjo točko v preseku $S_B \cap Bm_T$ z M_B, najnižjo pa z m_B.

Naj bo C razpolovišče M_B do m_T. Trdimo, da C ne pripada neomejeni komponenti $\mathbb{R}^2 \setminus S$.

Denimo, da C pripada neomejeni komponenti $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Tedaj obstaja pot γ v $\mathbb{R}^2 \setminus S$ od C do točke izven P. Naj bo D prva točka, v kateri γ seka rob P. D očitno ne leži ali nad ali pod osjo X (ne seka A').

Naj bo γ_D del poti od C do D.

- Recimo, da D leži nad x-osjo.

  $\Rightarrow$ Tir poti $BC \rightarrow \gamma_D \rightarrow (DT$ po robu $P)$ ne seka S_T.

- Recimo, da D leži pod x-osjo.

  $\Rightarrow$ Tir poti $(BD$ po robu $P) \rightarrow DC \rightarrow Cm_T \rightarrow ($podlok. S_T od m_T do $M_T) \rightarrow M_T T$ ne seka S_T.

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus S$ ima vsaj eno omejeno komponento V, $C \in V$.

Denimo, da ima $\mathbb{R}^2 \setminus S$ še eno omejeno komponento W.

Ta W ne vsebuje C in posledično ne seka $M_B m_T$.

Tir $BM_B \rightarrow ($podlok S_B od m_B do $M_B) \rightarrow M_B m_T \rightarrow ($podlok S_T od m_T do $M_T) \rightarrow M_T T$ ne seka W (vedno le v neomejeni komponenti, S ali V) in ne vsebuje A, A'.

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : K(A, \varepsilon), K(A', \varepsilon)$ ne sekata tega tira.

A in A' sta mejni točki za W.

$\Rightarrow \exists A_1 \in K(A,\varepsilon) \cap W$ in $\exists A_1' \in K(A',\varepsilon) \cap W$

W povezan s potmi

Potem pot $AA_1 \to A_1A_1' \to A_1'A$ ne seka zgornjega tira.

Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ topološka $(n-1)$-sfera. Naj bo V omejena komponenta $\mathbb{R}^n \setminus S$. Kaj lahko povemo o topološkem tipu V?

Ker vemo, da je $\text{Meja}_{\mathbb{R}^n} V = S$, je to ekvivalentno vprašanju o topološkem tipu $V \cup S = \overline{V}$.

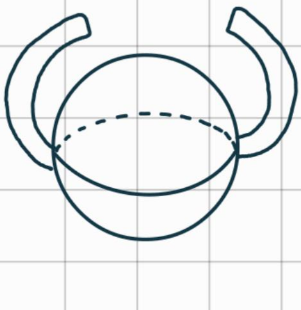
Schoenfliesov izrek:

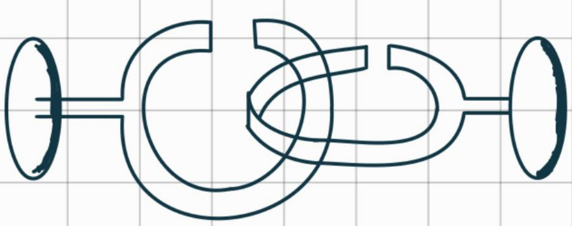
Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ topološka krožnica in V omejena komponenta $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Potem je $\overline{V} \approx B^2$.

Analogija Schoenfliesevega izreka velja za neko topološko sfero natanko tedaj, ko obstaja homeomorfizem celega Evklidskega prostora, ki to sfero preslika na standardno sfero in posledično omejeno komponento na enotski disk.

Opomba: Za $n \geq 3$ to ni nujno res.

Primer: Rogata sfera:





Ponavljamo v neskončnost...

Primer: Fox-Artinov lok lahko odebelimo v 3-kroglo, njegov komplement v S^3 pa ni 3-krogla.

Definicija: Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ali $S \subseteq S^n$ topološka $(n-1)$-sfera, torej $S \approx S^{n-1}$.

S je lokalno ploščata v točki $x \in S$, če obstaja okolica V od x v $\mathbb{R}^n$ oz. S^n in homeomorfizem $h: V \to W$, da je $h(S \cap V) = W \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$.

S je lokalno ploščata ali krotka ali podmnogoterost, če je lokalno ploščata v vsaki svoji točki.

Opomba: Schoenfliesov izrek velja v $\mathbb{R}^n$ oziroma S^n za lokalno ploščate $(n-1)$-sfere.

INVARIANCA ODPRTIH MNOŽIC

Glavni cilj je dokazati, da je dimenzija Evklidskega prostora topološka invarianta.

Iz algebre vemo, da je $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ natanko tedaj, ko je $n = m$.

Vprašanje: Če je $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m$, ali je tedaj nujno $n = m$?

Pri zveznih preslikavah se dimenzija ne ohranja, npr. pri konstantah in projekcijah.

Primer: Naj bo $C \subseteq I$ Cantorjeva množica.

Po izreku Aleksandrova vemo, da obstaja zvezna surjekcija $f: C \to I^2$. To f po Tietzejevem izreku zvezno razširimo do $F: I \to I^2$.

Rezultat je krivulja, ki zapolni kvadrat.

Analogno lahko dobimo prostor zapolnjujoče krivulje $F: I \to I^n$. Od tod zlahka dobimo zvezno surjekcijo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Niso pa injektivne.

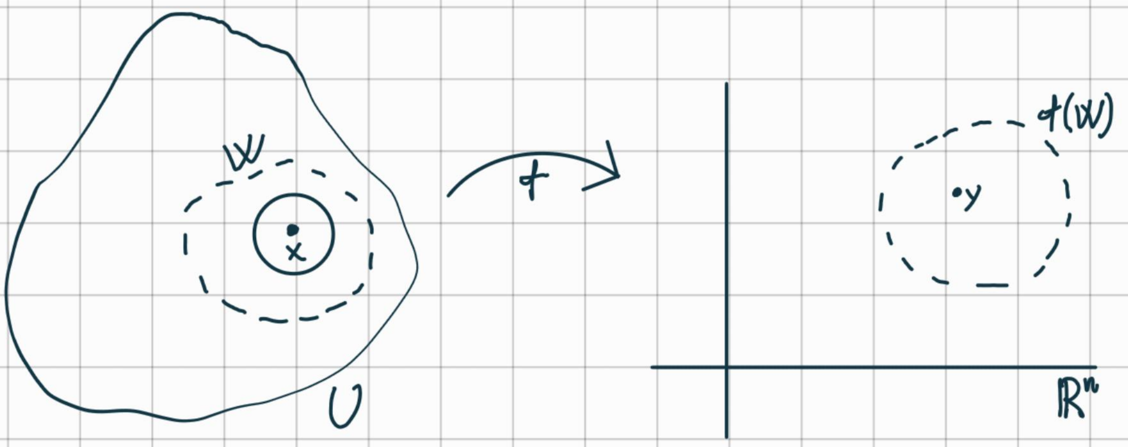
Torej zvezne preslikave lahko dvigujejo dimenzijo.

Opomba: Obstajajo tudi eksplicitne konstrukcije.

Izrek o odprti preslikavi:

Naj bo $U \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ in $f: U \to \mathbb{R}^n$ zvezna in injektivna. Potem je f odprta, posebej je f odprta vložitev in $f(U)$ je odprta v $\mathbb{R}^n$.

Dokaz: Za poljubno $W \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ moramo dokazati, da je $f(W) \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^n$. Za poljuben $y \in f(W)$ moramo najti okolico v $\mathbb{R}^n$, ki je cela vsebovana v $f(W)$.



Označimo $x := f^{-1}(y)$. Ker je W odprta, obstaja $r > 0$, da je $\underset{K}{\overline{K}(x,r)} \subseteq W$.

Označimo $S := \partial K(x,r)$.

f je zvezna in injektivna, zato je $f(K) \approx K$ in $f(S) \approx K$, saj sta K in S kompaktna, zato je f zaprta kot preslikava $K \to \mathbb{R}^n$ oz. $S \to \mathbb{R}^n$.

$f(S)$ je tudi topološka $(n-1)$-sfera.
$f(K)$ je tudi topološki n-disk.

Po Jordan-Brouwerju ima $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$ natanko 2 komponenti, ki sta odprti v $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n \setminus f(S) = (\mathbb{R}^n \setminus f(K)) \cup f(\mathring{K})$

$f(\mathring{K})$ je povezana, ker je zvezna slika povezane množice $\mathring{K} = K(x,r)$.

$\mathbb{R}^n \setminus f(K)$ je povezan, ker po izreku D_n topološki disk ne deli $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus f(K)$ in $f(\mathring{K})$ sta komponenti, torej odprti v $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow f(\mathring{K}) \subseteq f(W)$

$\Rightarrow y$ je notranja v $f(W)$.

Opomba: Pomembno je, da je ambientni prostor cel $\mathbb{R}^n$.

Posledica (invarianca odprtih množic):

Naj bo $U \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ in $W \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfna U. Potem je $W \overset{odp}{\subseteq} \mathbb{R}^n$.

Dokaz: Naj bo $h: U \to W$ homeomorfizem. Potem je $h: U \to \mathbb{R}^n$ zvezna in surjektivna, zato je po prejšnjem izreku odprta preslikava, torej je $h(U) = W$ odprta v $\mathbb{R}^n$.

Posledica (invarianca dimenzije):

Če je $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m$, potem je $n = m$.

Dokaz: Recimo, da $n \neq m$, npr. $m < n$.

$$\underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{odprta v } \mathbb{R}^n} \xrightarrow[\approx]{h} \mathbb{R}^m \equiv \underbrace{\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}}_{\text{ima prazno notranjost v } \mathbb{R}^n} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

$\times$

Posledica: Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfni, $h: A \to B$. Potem je $h(\mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Int}\, B$ in $h(A \cap \mathrm{Meja}_{\mathbb{R}^n} A) = B \cap \mathrm{Meja}_{\mathbb{R}^n} B$.

Dokaz: $\mathrm{Int}\, A, \mathrm{Int}\, B \overset{\text{odp}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$

h zvezna surjekcija $\Rightarrow \underbrace{h(\mathrm{Int}\, A)}_{\subseteq B} \overset{\text{odp}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow h(\mathrm{Int}\, A) \subseteq B$

$h^{-1}(\mathrm{Int}\, B) \subseteq \mathrm{Int}\, A$ oz. $\mathrm{Int}\, B \subseteq h(\mathrm{Int}\, A)$

$\Rightarrow h(\mathrm{Int}\, A) = \mathrm{Int}\, B$

Ker je h homeomorfizem, preostanek A preslika v preostanek B.

$\Rightarrow h(A \cap \mathrm{Meja}\, A) = B \cap \mathrm{Meja}\, B$

Opomba: $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}^n}$ in $\mathrm{Meja}_{\mathbb{R}^n}$ sta topološka pojma.