KVOCIENTNA TOPOLOGIJA

Definicija: Naj bo X množica in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X.

Za $x \in X$ označimo $[x] := \{y \in X \,;\, y \sim x\}$ ekvivalenčni razred od x.

Kvocientna množica množice X po relaciji $\sim$ je množica vseh ekvivalenčnih razredov $X/_\sim := \{[x] \,;\, x \in X\}$.

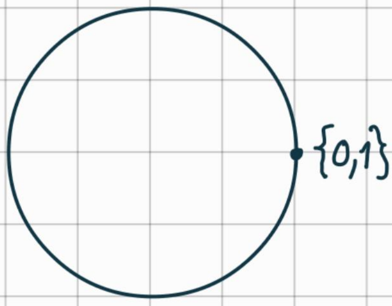
Kvocientna projekcija je $q: X \to X/_\sim$.
$x \mapsto [x]$

Primer: $X = [0,1]$

$\sim$ ekvivalenčna relacija, določena z $0 \sim 1$

$X/_\sim$?

Najbolj naraven model kvocientne množice je $[0,1)$, ker vsebuje natanko enega predstavnika vsakega ekvivalenčnega razreda.



Opomba: Pri opisu ekvivalenčne relacije bomo običajno navedli le netrivialne relacije.

Opomba: Ekvivalenčna relacija $\sim$ na množici X določa razdelitev $\mathcal{R}$ na ekvivalenčne razrede. To razdelitev označimo z $\mathcal{R} = \{[x] ; x \in X\}$. Kvocientno množico lahko označimo $X/\sim = X/\mathcal{R}$.

Opomba: Če $\sim$ določa le en netrivialen ekvivalenčni razred $A \subseteq X$, A ni enojec, potem bomo kvocientno množico označili z X/A.

Če je X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X, želimo $X/\sim$ opremiti s topologijo tako, da bo ta odražala lastnosti X.

Posebej želimo, da je kvocientna projekcija $q : X \to X/\sim$ zvezna. Smiselno je vzeti najmočnejšo topologijo, da je $q : X \to X/\sim$ zvezna.

Torej za odprte množice v $X/\sim$ vzamemo vse, ki imajo odprte množice v X.

Definicija: Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X, τ topologija na X.

Kvocientna topologija na $X/\sim$:

$$\tau_\sim := \{V \subseteq X/\sim \; ; \; q^{-1}(V) \overset{odp}{\subseteq} X\}$$

Opomba: V kvocientni topologiji na $X/\sim$ torej velja:

$$V^{odp} \subseteq X/\sim \iff g^{-1}(V)^{odp} \subseteq X$$

$$Z^{zap} \subseteq X/\sim \iff g^{-1}(Z)^{zap} \subseteq X$$

Ali je torej g odprta in zaprta? Ne nujno.

Primer: $X = [0,1]$
$\mathcal{R} = \{[0,1), \{1\}\}$

$\Rightarrow X/\sim = \{[0],[1]\}$

$\emptyset, X/\sim$ sta odprti.

Ali sta $\{[0]\}$ in $\{[1]\}$ odprti?

$g^{-1}(\{[0]\}) = [0,1)$ odprta v X.

$\Rightarrow \{[0]\}$ odprt.

$[0,1)$ ni zaprta v X, zato $\{[0]\}$ ni zaprt.

$g^{-1}(\{[1]\}) = \{1\}$ ni odprta v X, je pa zaprta,
zato je $\{[1]\}$ zaprta in ne odprta.

$\{0\}^{zap} \subseteq X$, $g(\{0\}) = [0]$ ni zaprt

$\Rightarrow g$ ni zaprta

Primer: $X = [0,2]$
$[1,2]$ edini netrivialni ekvivalenčni razred

$\Rightarrow X/_{[1,2]} = [0,1]$

$q: X \to X/_{[1,2]}$ ni odprta

$(1,2)^{odp} \subseteq X$

$q((1,2)) = [1]$

$q^{-1}([1]) = [1,2]$ ni odprt v X

$\Rightarrow q$ ni odprta

Primer: $X = [0,1]$
$A = X \cap \mathbb{Q}$
$B = X \setminus \mathbb{Q}$

$X/_{\{A,B\}} = \{[0], [\frac{\sqrt{2}}{2}]\}$

Kvocientna topologija je trivialna.

Definicija: Naj bo X množica in $\sim$ ekvivalenčna relacija. Za $A \subseteq X$ je njeno **nasičenje** enako $q^{-1}(q(A))$ = unija vseh ekvivalenčnih razredov, ki sekajo A.

Trditev: Za $A \subseteq X$ velja:

$q(A)$ je odprta / zaprta $\Longleftrightarrow$ nasičenje $q^{-1}(q(A))$ je odprta / zaprta

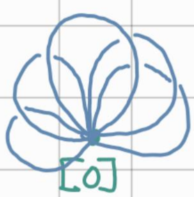
Posledica: q je odprta, če je nasičenje vsake odprte množice odprto. Enako velja za zaprtost.

Cilj: Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija.

Če je to mogoče, želimo poiskati nek geometrijski model Y za $X/\sim$ in pokazati, da je $X/\sim \;\approx Y$.

Primer: $X = \mathbb{R}$
$A = \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}/A = ?$



$Y = [0,1]$
$B = \{\frac{1}{n} \,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

$Y/B = ?$

V obeh primerih imamo števno mnogo krožnic, spetih v eni točki? Ali sta homeomorfna?

Y je kompakten, q pa zvezna po definiciji, zato je $Y/B = q(Y)$ tudi kompakten.

X ni kompakten, zato ne vemo, ali je X/A kompakten.

Kasneje bomo videli, da nista homeomorfna ...

X/A ni mogoče vložiti v noben Evklidski prostor, X/B pa je (Havajski uhan).

KVOCIENTNE PRESLIKAVE

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f = g \circ q"] & \\ X/\sim \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Zvezna $g : X/\sim \to Y$ določa zvezno $f = g \circ q : X \to Y$.

Če je $x \sim y$, je $\underset{[x]}{q(x)} = \underset{[y]}{q(y)}$, zato je $\underset{f(x)}{g(q(x))} = \underset{f(y)}{g(q(y))}$.

$$[x] = [y]$$

Ta f je torej konstantna na ekvivalenčnih razredih.

Želimo obratno: Za preslikavo $f : X \to Y$ poiskati pogoje, da določimo preslikavo $X/\sim \to Y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Če naj diagram komutira, mora biti f konstantna na ekvivalenčnih razredih:

$\forall x, y : x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$

Če to velja, potem definiramo:

$\overline{f}([x]) := f(x)$

$\overline{f}$ ... preslikava, inducirana s f

Trditev: Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija, $f: X \to Y$ zvezna preslikava, konstantna na ekvivalenčnih razredih. Potem f določa dobro definirano preslikavo $\overline{f}: X/\sim \to Y$, za katero je $\overline{f} \circ q = f$.

Poleg tega velja:

1) Če je f zvezna, je tudi $\overline{f}$ zvezna.

2) Če je f surjektivna, je tudi $\overline{f}$ injektivna.

3) Če za poljubna $x \nsim y$ velja $f(x) \neq f(y)$ (f loči ekvivalenčne razrede), potem je $\overline{f}$ injektivna.

Dokaz: 2,3) Očitno.

1) Naj bo f zvezna. Dokazujemo zveznost $\overline{f}$.

Izberimo poljubno $V^{odp} \subseteq Y$. Ali je $\overline{f}^{-1}(V)^{odp} \subseteq X/\sim$?

$$\Leftrightarrow g^{-1}(F^{-1}(V))^{odp} \subseteq X$$
$$\begin{array}{l} g^{-1}(F^{-1}(V)) \\ \parallel \\ (F \circ g)^{-1}(V) \\ \parallel \\ f^{-1}(V) \end{array}$$

Ker je $V^{odp} \subseteq Y$ in $f: X \to Y$ zvezna, je res $f^{-1}(V)^{odp} \subseteq X$.

Zanima pa nas, kdaj bo F homeomorfizem.

$\Leftrightarrow$ F je bijekcija in porodi bijekcijo med odprtimi množicami.

$\Leftrightarrow$ F je bijekcija in za vsako $V \subseteq Y$ velja $V^{odp} \subseteq Y \Leftrightarrow F^{-1}(V)^{odp} \subseteq X/\sim$

$$\Updownarrow$$
$$g^{-1}(F^{-1}(V))^{odp} \subseteq X$$
$$\parallel$$
$$f^{-1}(V)^{odp} \subseteq X$$

Definicija: Naj bosta X, Y topološka prostora in $f: X \to Y$. Če je f surjektivna in za vsako $V \subseteq Y$ velja pogoj $V^{odp} \subseteq Y \Leftrightarrow f^{-1}(V)^{odp} \subseteq X$, potem f imenujemo **kvocientna preslikava**.

Opomba: Po definiciji kvocientne topologije je kvocientna projekcija kvocientna preslikava.

Obratno, vsako kvocientno preslikavo $f: X \to Y$ lahko obravnavamo kot kvocientno projekcijo pri ekvivalenčni relaciji, določeni z razbitjem X na praslike točk.

Opomba: Kvocientna preslikava je vedno zvezna, ni pa nujno odprta niti zaprta.

Opomba: Implikacija $(\Leftarrow)$ v definiciji kvocientne preslikave je posebna lastnost, ki ji včasih rečemo **kvocientnost v ožjem smislu**.

Za zvezno surjekcijo je za njeno kvocientnost potrebno preveriti le ta pogoj.

Opomba: Surjektivna f je kvocientna natanko tedaj, ko za vsako $Z \subseteq Y$ velja:

$$Z \overset{zap}{\subseteq} Y \Leftrightarrow f^{-1}(Z) \overset{zap}{\subseteq} X$$

Lema: Naj bo $f: X \to Y$ zvezna in surjektivna. Če je f odprta ali zaprta, je f kvocientna.

Dokaz: Preveriti je treba le kvocientnost v ožjem smislu.

Recimo, da je f zaprta.

Izberimo poljubno $Z \subseteq Y$, za katero je $f^{-1}(Z) \overset{zap}{\subseteq} X$. Dokazujemo $Z \overset{zap}{\subseteq} Y$.

$f^{-1}(Z) \overset{zap}{\subseteq} X$ in ker je f zaprta, je $f(f^{-1}(Z)) \overset{zap}{\subseteq} Y$. Ker je f surjektivna, je $f(f^{-1}(Z)) = Z$.

Podobno za odprte.

Izrek o prepoznavi kvocienta:

Naj bosta X, Y topološka prostora in $\sim$ ekvivalenčna relacija. Naj bo $f: X \to Y$ kvocientna preslikava, ki naredi enake identifikacije kot $\sim$. Potem je inducirana preslikava $F: X/\sim \,\to Y$ homeomorfizem.

Primer: $X = [0,1]$
$0 \sim 1$

Dokažimo, da je $X/\sim \; \approx S^1$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & S^1 \\ X/\sim \arrow[ur, "\approx", "F"'] & \end{tikzcd}$$

Iščemo kvocientno f, ki naredi iste identifikacije kot $\sim$ (je konstantna na ekvivalenčnih razredih in jih loči).

$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

$f: [0,1] \to S^1$

- f je očitno surjektivna
- f je zvezna, ker je kompaktna
- f je kvocientna v ožjem smislu, ker je zaprta, saj slika iz kompakta v T_2 prostor
- f je konstantna na ekvivalenčnih razredih:

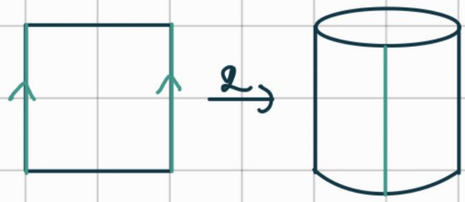
$$f(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1,0)$$
$$f(1) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1,0)$$

- f loči ekvivalenčne razrede:

Na $[0,1)$ injektivno slika na krožnico, zato ima različne vrednosti na različnih ekvivalenčnih razredih.

Po izreku je $\bar{f}: X/\sim \;\to S^1$ homeo.

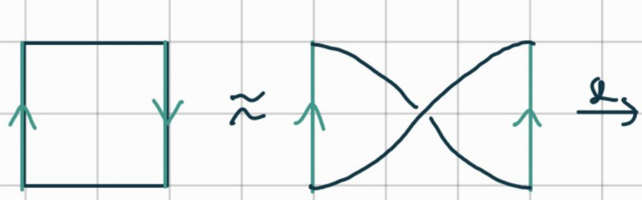
Primer: $X = [0,1] \times [0,1]$
$(0,y) \sim (1,y) \quad \forall y$



$X/\sim \;\approx S^1 \times [0,1]$

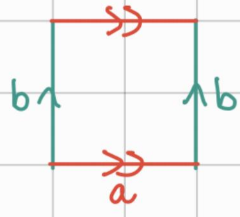
$f: X \to S^1 \times [0,1]$
$(x,y) \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, y)$

Primer: $X = [0,1] \times [0,1]$
$(0,y) \sim (1,1-y) \quad \forall y$


Möbiusov trak

Möbiusov trak lahko vložimo v $S^1 \times B^2$ tako, da začnemo z daljico v B^2, ki jo vzdolž S^1 zavrtimo za kot 2π.

Primer: $X = [0,1] \times [0,1]$
$(0,y) \sim (1,y) \quad \forall y$
$(x,0) \sim (x,1) \quad \forall y$



$X/\sim \;\approx\; S^1 \times S^1$

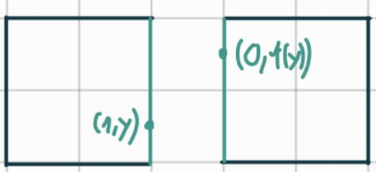
$$f : X \to S^1 \times S^1$$
$$(x,y) \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi y, \sin 2\pi y)$$

Dobimo torus.

Primer: $B^2/S^1 \approx S^2$

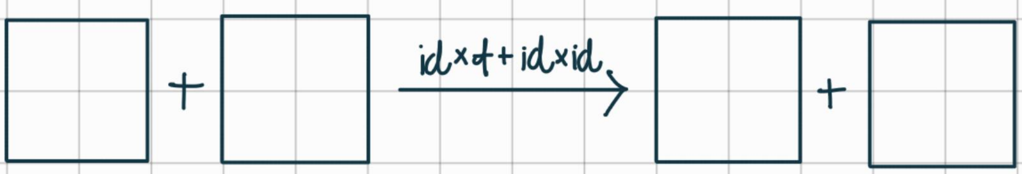
Primer: $I = [0,1]$
$f : I \to I$ homeo

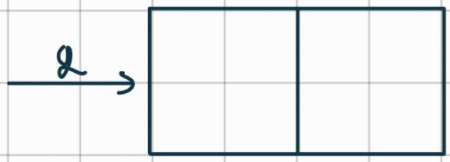
$$X = \underset{\underset{(1,y)}{\cup}}{I^2} \times \underset{\underset{(0,f(y))}{\cup}}{I^2} \qquad (1,y) \sim (0, f(y))$$



Če je $f = id$, je očiten kandidat za kvocient $[0,2] \times [0,1]$, saj kar staknemo kvadrata.

Pričakujemo, da bo prostor vedno enak.





Trditev: $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ preslikavi

(i) f, g kvocientni $\Rightarrow$ $g \circ f$ kvocientna

(ii) $g \circ f$ kvocientna $\Rightarrow$ g kvocientna

Dokaz: (i) $g \circ f$ surjektivna, ker sta f in g surjektivni.

Ker je g kvocientna, velja:

$$V^{odp} \subseteq Z \iff g^*(V)^{odp} \subseteq Y$$

Ker je f kvocientna, velja:

$$W^{odp} \subseteq Y \iff f^*(W)^{odp} \subseteq X$$

Zato velja:

$$f^*(g^*(V))^{odp} \subseteq X$$

(ii) Iz surjektivnosti $g \circ f$ je g surjektivna.

Ker je g zvezna, je dovolj pokazati kvocientnost v ožjem smislu.

Naj bo $V \subseteq Z$. Njena praslika je $g^*(V)^{odp} \subseteq Y$.
Dokazujemo $V^{odp} \subseteq Z$.

f zvezna $\Rightarrow$ $f^*(g^*(V))^{odp} \subseteq X$

Ker je $g \circ f$ kvocientna, od tod sledi $V^{odp} \subseteq Z$.

Opomba: X topološki prostor
$\sim_X$ ekvivalenčna relacija na X
$f: X \to Y$ homeomorfizem

f določa relacijo $\sim_Y$ na Y, usklajeno z $\sim_X$:

$$y_1 \sim_Y y_2 \iff f^{-1}(y_1) \sim_X f^{-1}(y_2)$$

Trditev: $X/_{\sim_X} \approx Y/_{\sim_Y}$

Dokaz:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_X"'] & Y \arrow[d, "g_Y"] \\ X/_{\sim_X} \arrow[r, dashed, "F"'] & Y/_{\sim_Y} \end{tikzcd}$$

Vsak homeomorfizem je tudi kvocientna.

$\Rightarrow g_Y \circ f$ tudi kvocientna.

Homeomorfizem f po definiciji relacije $\sim_Y$ slika ekvivalenčne razrede X v ekvivalenčne razrede Y.

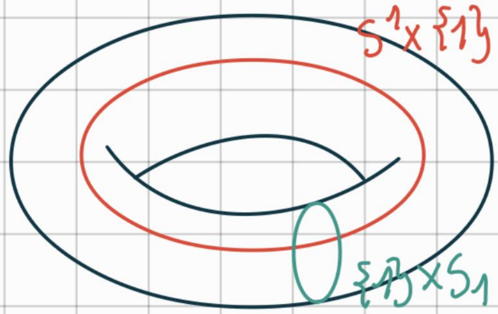
$\Rightarrow g_Y \circ f$ naredi iste identifikacije kot $\sim_X$.

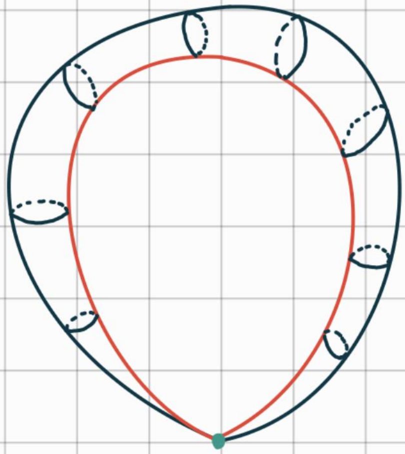
$\Rightarrow g_Y \circ f$ inducira homeomorfizem $F: X/_{\sim_X} \to Y/_{\sim_Y}$.

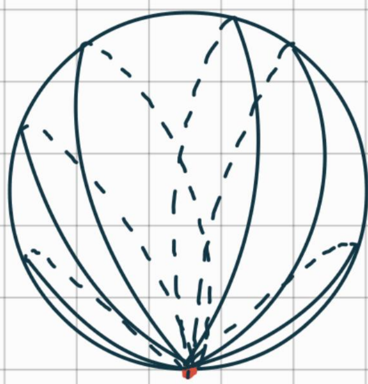
Primer: Naj bo $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

$$A = S^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times S^1 \subseteq S^1 \times S^1 = T \text{ torus}$$

Poznati želimo T/A.







Najbrž je $T/A \approx S^2$.

Torus prerežemo vzdolž A, da dobimo kvadrat z identifikacijami na robu.

$$X = [0,1] \times [0,1]$$

$$f : X \to S^1 \times S^1$$

$$f(x,y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$$

Vemo že, da je f kvocientna preslikava, ki identificira stranice kvadrata. Celotni rob kvadrata že pri tem preslika v A.

$$B := f^*(A) = \partial I^2 \text{ rob kvadrata}$$

Če nadaljujemo tako, da A stisnemo v točko, to ustreza identifikacijam na kvadratu, ki celotni rob stisnejo v točko.

$$\begin{tikzcd}
I^2 \arrow[r, bend left, "\text{kvoc.}", "f"'] \arrow[d, "p"] & T \arrow[d, "q"] \\
I^2/B \arrow[r, dashed, "q \circ f"] & T/A
\end{tikzcd}$$

$q \circ f$ naredi iste identifikacije kot p.

Vemo:

$$\begin{tikzcd}
I^2 \arrow[r, "h", "\approx"'] \arrow[d, "p"] & B^2 \arrow[d, "q"] \\
I^2/B \arrow[r, "\approx"] & B^2/S^1 \approx S^2
\end{tikzcd}$$

$B = \partial I^2$ $\qquad$ $S^1 = \partial B^2$

DELJIVOST TOPOLOŠKIH LASTNOSTI

Definicija: Topološka lastnost $\mathcal{L}$ je deljiva, če za vsak $X \in \mathcal{L}$ in vsako ekvivalenčno relacijo na X velja $X/\sim \, \in \mathcal{L}$.

Ekvivalentno: $\mathcal{L}$ je deljiva, če se ohranja pri kvocientnih preslikavah.

Trditev: Naslednje topološke lastnosti so deljive:

- Kompaktnost
- Povezanost (s potmi)
- Lokalna povezanost (s potmi)
- Separabilnost
- Diskretnost
- Trivialnost

Naslednje topološke niso deljive:

- Ločljivostne lastnosti
- Lokalna kompaktnost
- 1/2-števnost
- Metrizabilnost
- Popolna nepovezanost

Dokaz: Kompaktnost, povezanost (s potmi), separabilnost in trivialnost se ohranja pri zveznih preslikavah.

Lokalna povezanost je deljiva.

Prostor je lok. povezan $\Leftrightarrow$ Komponente vsake odprte množice so odprte

$X, \sim, V^{odp} \subseteq X/\sim$

$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, V_λ so komponente za povezanost

V_λ so odprte

$q: X \to X/\sim$ kvocientna projekcija je zvezna

$q^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} q^{-1}(V_\lambda)$ odprta v X

Po predpostavki je X lokalno povezana, zato so komponente $q^{-1}(V)$ odprte v X.

Naj bo W poljubna komponenta $q^{-1}(V)$.

Ker je W povezana, in q zvezna, je $q_*(W)$ povezana v $V = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$.

$\Rightarrow q_*(W)$ je vsebovana v neki V_λ

$\Rightarrow W \subseteq q^{-1}(V_\lambda)$

$\Rightarrow q^{-1}(V_\lambda)$ je unija komponent za povezanost $q^{-1}(V)$

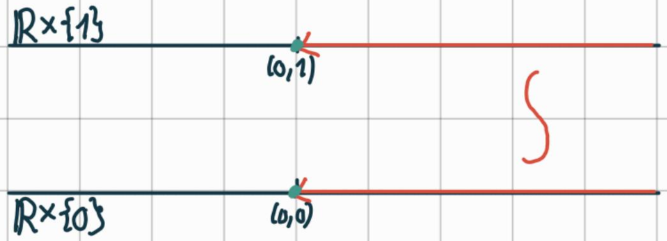
$\Rightarrow q^{-1}(V_\lambda)$ je odprta, ker je unija kvocientnih množic

Po definiciji kvocientne topologije je $V_\lambda \overset{odp}{\subseteq} X/\sim$.

Podobno za ostale lastnosti.

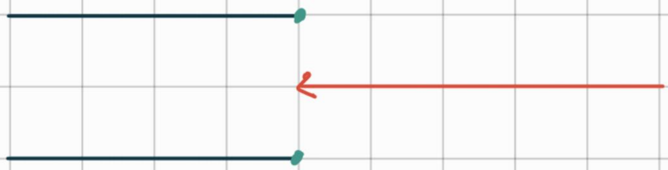
<u>T_2 ni deljiva</u>

$X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$



Definiramo $\sim$ na X z netrivialnimi relacijami:

$(x,0) \sim (x,1) \quad \forall x > 0$



Točki $q(0,1)$ in $q(0,0)$ nimata disjunktnih okolic v $X/\sim$.

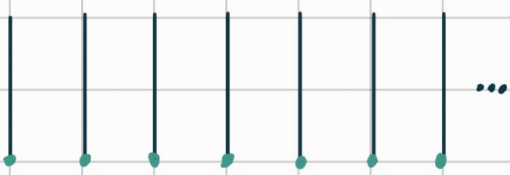
Za vsako odprto okolico $V \subseteq X/\sim$, ki vsebuje $q(0,0)$, je $q^{-1}(V)$ odprta v $\mathbb{R}\times\{0,1\}$ in vsebuje $(0,0)$, zato tudi odprt interval okoli te točke.

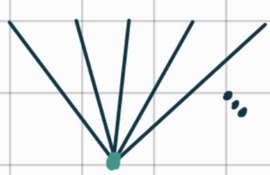
Ostale lastnosti podobno.

<u>1-števnost ni deljiva</u>

$X = [0,1] \times \mathbb{N}$

$A = \{0\} \times \mathbb{N}$





a

Dokažimo, da X/A ni 1-števen s protislovjem.

$a := q_*(A) = q(0,n) \quad \forall n$

Predpostavimo, da ima a števno bazo okolic.

$\mathcal{U} = \{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ baza okolic za a

Naj bodo U_n odprte.

Torej so $q^*(U_n)$ odprte v X.

Zato $q^*(U_n)$ vsebuje $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [0, b_{n,i}) \times \{i\}$.

$$W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{b_{n,n}}{2}) \times \{n\}$$

W je nasičena odprta, zato je $q(W)$ odprta in $q(W)$ ne vsebuje nobene od U_n.

Za 2-števnost in metrizabilnost uporabimo isti prostor.

Izrek (Alexandrov):

Za poljuben metrični kompakt X obstaja zvezna surjekcija f: Cantorjeva množica $\to X$.

Opomba: Taka f je kvocientna, saj je surjektivna, zvezna in zaprta, ker slika iz kompakta C v T_2.

Primer: $f: C \to [0,1] = I$

$$C = \{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} ; c_i \in \{0,2\}\}$$

Zapis točk v C je enoličen.

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i}{2^i} ; \; z_i \in \{0,1\} \right\}$$

Zapis točk v I pa ni enoličen.

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}\right) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i/2}{2^i}$$

Trditev: X topološki prostor
$\sim$ ekvivalenčna relacija na X

$X/\sim \; \in T_1 \iff$ ekvivalenčni razredi v X so zaprti

Dokaz: $X/\sim \; \in T_1 \iff$ točke v $X/\sim$ so zaprte

$\iff \underbrace{g^{-1}(\text{tč.})}_{\text{ekvivalenčni razred}} \overset{\text{zap}}{\subseteq} X$ za poljubno točko v $X/\sim$

TOPOLOŠKE GRUPE IN DELOVANJA

Definicija: *Topološka grupa* je grupa G, ki je opremljena s topologijo, glede na katero sta množenje $m: G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh$, in invertiranje $inv: G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ zvezni.

Opomba: $(\mathcal{C}(X), \tau_{co})$ je topološka algebra.

Opomba: Mi bomo večinoma delali nad $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, ki so topološki obsegi.

Obstajajo še drugi, npr. končni obsegi $\mathbb{Z}_p$, ki jih opremimo z diskretno metriko, in p-adična števila, ki so napolnitev $\mathbb{Q}$ v p-adičnih metrikah:

$$\frac{m}{n} = p^k \frac{m_1}{n_1}\ ,\quad m_1, n_1 \text{ tuja } p,\quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\|\frac{m}{n}\right\|_p = p^{-k}$$

Primer: Poljubna grupa G, opremljena z diskretno topologijo, je topološka grupa.

Primer: G topološka grupa, $H \leq G$ podgrupa
$\Rightarrow H$ z inducirano topologijo je topološka grupa

Primer: $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{H}, +)$ so topološke grupe.
$(\mathbb{R}^\times, \cdot), (\mathbb{C}^\times, \cdot), (\mathbb{H}^\times, \cdot)$ so topološke grupe.

$$\mathbb{F}^\times := \mathbb{F} \setminus \{0\}$$

Primer: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ so normirani obsegi, torej je norma multiplikativna:

$$\mu, \lambda \in \mathbb{F}: \|\mu \cdot \lambda\| = \|\mu\| \cdot \|\lambda\|$$

Ekvivalentno so enotske sfere zaprte za množenje:

$(S^0, \cdot), (S^1, \cdot), (S^3, \cdot)$ so topološke grupe

Opomba: Ali tudi S^2 dopušča strukturo topološke grupe? Ne, dokaz je z uporabo algebraične topologije.

Primer: Naj bodo $\{G_\lambda \,;\, \lambda \in \Lambda\}$ topološke grupe. Potem je $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, opremljen z operacijami po komponentah in produktno topologijo, tudi topološka grupa.

Primer: $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}} \approx C$ ... Cantorjeva množica

Primer: Topološke grupe linearnih izomorfizmov:

$\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$
$n \in \mathbb{N}$

$$GL_n\mathbb{F} = \{\text{lin. izo. } \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n\}$$

$$= \{A \in \mathbb{F}^n \ ; \ \det A \neq 0\}$$

Splošna linearna grupa je topološka grupa.

Še več, je Liejeva grupa, torej je gladka mnogoterost in operaciji sta gladki.

Enako velja za vse standardne podgrupe:

$SL_n(\mathbb{F})$ ... $\det A = 1$
$O_n(\mathbb{R})$ ... $AA^T = I$
$SO_n(\mathbb{R})$ ... $AA^T = I, \det A = 1$
$U_n(\mathbb{C})$ ... $AA^H = I$
$SU_n(\mathbb{C})$ ... $AA^H = I, \det A = 1$

Simplektična grupa:

$Sp_n(\mathbb{H})$ ... $AA^H = I \ (\Rightarrow \det A = 1)$

Trditev: Naj bo G topološka grupa in $a \in G$.

Leva/desna translacija za a:

$L_a : G \to G,\ g \mapsto ag$
$R_a : G \to G,\ g \mapsto ga$

Leva in desna translacija sta homeomorfizma.

Dokaz: $R_a : G \xrightarrow{\approx} G \times \{a\} \subseteq G \times G \xrightarrow{m} G$
$g \mapsto (g,a) = (g,a) \mapsto ga$

Je kompozitum zveznih, torej zvezna.

Inverz je $R_{a^{-1}}$:

$R_{a^{-1}}(R_a(g)) = R_{a^{-1}}(ga) = (ga)a^{-1} =$

$= g(aa^{-1}) = ge = g$

Posledica: Topološka grupa je homogen prostor:

$x, y \in G : \exists$ homeo. $h : G \to G,\ h(x) = y$

Dokaz: $h = L_{yx^{-1}}$ ali $h = R_{x^{-1}y}$

Definicija: Naj bo X topološki prostor in G topološka grupa.

Levo delovanje grupe G na prostor X je zvezna preslikava:

$\varphi : G \times X \to X$
$(g,x) \mapsto \varphi(g,x) = g \cdot x$

Za katero velja:

1) $e \cdot x = x \quad \forall x \in X \quad (e \in G$ enota$)$

2) $b\cdot(a\cdot x) = (ba)\cdot x \quad \forall x \in X, \forall a,b \in G$

Opomba: Rečemo, da je X G-prostor.

Opomba: Kot v primeru grupe delovanje določa translacijo, ki je homeomorfizem prostora X:

$$L_a: X \to X$$
$$x \mapsto a\cdot x$$

Ampak v splošnem X ni homogen za delovanje grupe G:

Za poljuben $x \in X$ je $G\cdot x = \{g\cdot x;\ g \in G\}$ orbita točke x ni v splošnem cel X.

Torej delovanje G na X določa ekvivalenčno relacijo, za katero so ekvivalenčni razredi orbite delovanja:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \exists g \in G: \ g\cdot x = y$$

$$[x] = \{y = g\cdot x;\ g \in G\} = G\cdot x$$

Kvocientni prostor pri delovanju G na X označimo X/G in ga imenujemo prostor orbit.

Za poljuben $x \in X$ je $G_x = \{g \in G;\ g\cdot x = x\}$ stabilizatorska podgrupa elementa x.

Velja: $G\cdot x \xleftrightarrow{\text{bij.}} G/G_x$

Primer: Naj bo G topološka grupa in $H \leq G$ podgrupa.

H deluje na G z zožitvijo množenja:

$$H \times G \to G$$
$$(h, g) \mapsto hg$$

Primer: $(\mathbb{R}, +) \geq \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ deluje na $\mathbb{R}$ s transliranjem:

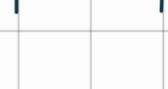
$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(n, x) \mapsto x + n$$

Zanima nas prostor orbit $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Opozorilo: To ni kvocient, v katerem $\mathbb{Z}$ stisnemo v točko.

$x \sim x + n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$[0,1]$ seka vse ekvivalenčne razrede, vsakega v natanko eni točki, razen $[0]$, ki ima predstavnika 0 in 1.



Ugibamo, da je $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ periodična.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & S^1 \\
\mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[ur, dashed, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

f je periodična s periodo 2π in identificira iste točke kot $\sim$.

$\Rightarrow F$ je bijekcija

- f je zvezna, ker je elementarna
- f je kvocientna v ožjem smislu:

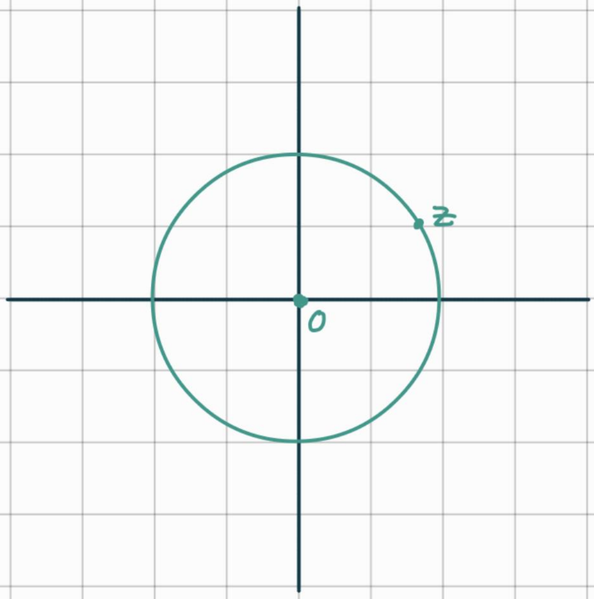
f ni zaprta, je pa f odprta:

Dovolj je preveriti, da f vsak odprt interval preslika v odprto množico. To je res, ker se vsak odprt interval dolžine več kot 1 preslika na S^1, ki je odprta, vsak krajši pa se homeomorfno preslika v odprt lok v S^1.

Primer: S^1 deluje na $\mathbb{C}$ z množenjem:

$$S^1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$(\lambda, z) \mapsto \lambda \cdot z$$

$$\mathbb{C}/S^1 = ?$$



$\mathbb{C}/S^1 \approx [0,\infty)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & {[0,\infty)} \\
\mathbb{C}/S^1 \arrow[ur, dashed, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

$f(z) := |z|$

f naredi iste identifikacije kot $\sim$.

Primer: $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$
$(\mathbb{F}^\times, \cdot)$ deluje na $\mathbb{F}^n$ z množenjem s skalarji:

$$\mathbb{F}^\times \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$$
$$(\lambda, (x_1,\dots,x_n)) \longmapsto \lambda(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Vemo: Kvocientna projekcija v splošnem ni niti odprta niti zaprta.

Trditev: Naj topološka grupa G deluje na topološkem prostoru X. Potem je kvocientna projekcija $q: X \to X/G$ v prostor orbit odprta.

Dokaz: Preveriti moramo, da je nasičenje vsake odprte množice v X odprta v X:

$U^{odp} \subseteq X$

$$q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{x \in U} G \cdot x = \{g \cdot x;\ g \in G,\ x \in U\} =$$

$$= \bigcup_{g \in G} \{g \cdot x \,;\, x \in U\} = \bigcup_{g \in G} L_g(U)$$

Ker je U odprta in translacija L_g homeomorfizem, slika odprte v odprte, zato je $L_g(U)$ odprta, torej je tudi unija teh odprtih.

KONSTRUKCIJE KVOCIENTOV

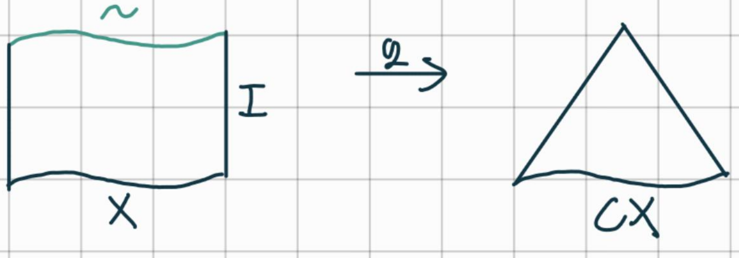
Naj bo X topološki prostor.

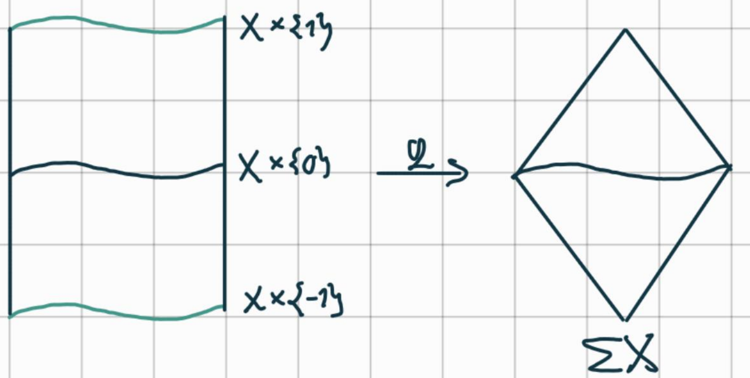
Stožec nad X:

$$CX := X \times [0,1] / X \times \{1\}$$

Suspenzija nad X:

$$\Sigma X := X \times [-1,1] / X \times \{-1\}, X \times \{1\}$$





Primer: $X = \{*\}$

CX: 

ΣX: 

Primer: $X = I$

CX: 

ΣX: 

Primer: $X = S^1$

$CX \approx B^2$

$\Sigma X \approx S^2$

Trditev: $CS^n \approx B^{n+1}$

$\Sigma S^n \approx S^{n+1}$

Opomba: $X \subseteq \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$
$a \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$

Definiramo linearni stožec nad x kot unijo vseh daljic $\{[a,x] \,;\, x \in X\}$. Vse te daljice se paroma sekajo v točki x.

$L_a X$ je "enak" množici X. Enako topologijo ima, če je X kompakten.

Simetrični produkt:

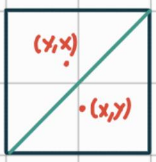
X topološki prostor
$n \in \mathbb{N}$

$$X^n = X \times \ldots \times X$$

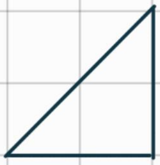
Simetrična grupa S_n deluje na X^n s permutacijami faktorjev in kvocient pri tem delovanju je simetrični produkt:

$$S^n X := X^n / S_n$$

Primer: $X = [0,1] = I$
$n = 2$



$$(x,y) \sim (y,x)$$

$S^2 I \approx$ 

Direktna limita prostorov:

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \longrightarrow \ldots$$

$$\xrightarrow{\lim} (X_n, f_n) = \left(\coprod_{n=1}^{\infty} X_n\right) / \sim$$

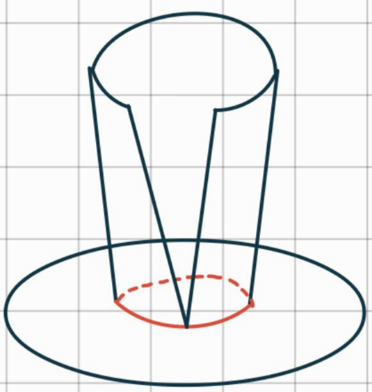
$x_i \in X_i$ je ekvivalenten $x_j \in X_j$, če obstaja $k > i,j$, da je $f_k \circ \cdots \circ f_{i+1} \circ f_i (x_i) = f_k \circ \cdots \circ f_{j+1} \circ f_j (x_j)$.

Zlepki:

X, Y topološka prostora
$A \subseteq X$
$f: A \to Y$

Zlepek X in Y vzdolž f je $X \cup_f Y := (X \amalg Y)/_{a \sim f(a)}$.

$X \cup_f Y$:



Ekvivalenčni razredi:

$[x] = \{x\}, \quad x \in X \setminus A$
$[y] = \{y\}, \quad y \in Y \setminus f(A)$

$[y] = \underset{\substack{\cap \\ X}}{f^{-1}(y)} \cup \underset{\substack{\cap \\ Y}}{\{y\}}, \quad y \in f(A)$

Primer: $A \subseteq X$, $Y = \{t_0\}$, $f: A \to Y$ konst.

$X \cup_f Y \approx X/A$

Primer: $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ homeo.

$B^n \cup_f B^n \approx S^n$

Preslikavni cilinder:

$f: X \to Y$ zvezna

Preslikavni cilinder je zlepek $M_f := X \times I \cup_f Y$, kjer je f definirana na $X \times \{0\}$.

Izrek o normalnosti zlepkov:

Naj bosta X, Y normalna, $A \subseteq X$ zaprt in $f: A \to Y$ zvezna. Potem je $X \cup_f Y$ normalen.

Dokaz: $q: X \amalg Y \to X \cup_f Y$ kvocientna projekcija

Netrivialni ekvivalenčni razredi so oblike:

$f^{-1}(y) \cup \{y\}$, $y \in f(A)$

T_1:

Kvocient je $T_1 \Leftrightarrow$ Ekvivalenčni razredi so zaprti

Ker sta X, Y T_1, so točke zaprte.

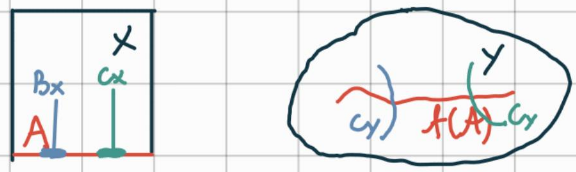
Ker je f zvezna in so točke zaprte, je tudi $f^{-1}(y)$ zaprta, zato so vsi ekvivalenčni razredi zaprti.

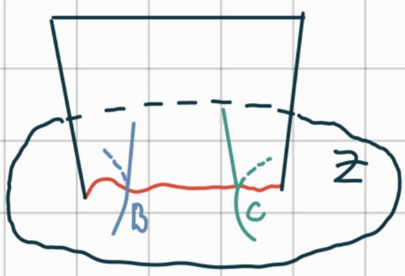
T_4:

Pomagamo si z Urisonovo lemo:

X je $T_4 \Leftrightarrow$ Za poljubni disjunktni zaprti množici imamo Urisonovo funkcijo.

Naj bosta $B, C \subseteq Z$ disjunktni zaprti neprazni.





Naj bo:

$$B_X := g^{-1}(B) \cap X \qquad C_X := g^{-1}(C) \cap X$$
$$B_Y := g^{-1}(B) \cap Y \qquad C_Y := g^{-1}(C) \cap Y$$

Te množice so zaprte.

$$B_X \cap C_X = \emptyset$$
$$B_Y \cap C_Y = \emptyset$$

Ker je Y T_4, obstaja Urisonova funkcija $\varphi_Y : (Y, B_Y, C_Y) \to ([0,1], 0, 1)$.

Definirajmo $F : B_X \cup C_X \cup A \to [0,1]$:

$$F(x) := \begin{cases} 0 & ; \ x \in B_X \\ 1 & ; \ x \in C_X \\ \varphi_Y(f(x)) & ; \ x \in A \end{cases}$$

F je dobro definirana, saj za $x \in B_X \cap A$ velja, da je $f(x) \sim x$ v B_Y, zato je $\varphi_Y(f(x)) = 0$ in podobno za $x \in C_X$.

Po Tietzejevem izreku lahko f razširimo do zvezne $\varphi_X : X \to [0,1]$, ki je Urisonova funkcija na X, ker je $B_X \cup C_X \cup A$ zaprta in f zvezna.

Funkciji φ_X in φ_Y skupaj določata Urisonovo funkcijo na zlepku Z:

$$\begin{tikzcd}
X \amalg Y \arrow[r, "\varphi_X \amalg \varphi_Y"] \arrow[d, "q"'] & I = [0,1] \\
Z = X \cup_f Y \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Za $x \in X$, $y \in Y$ je $x \sim y \Leftrightarrow y = f(x) \in f(A)$.

$$\varphi_X(x) = f(x) = \varphi_Y(f(x)) = \varphi_Y(y)$$

$\Rightarrow$ Inducirana funkcija obstaja in ker sta φ_X in φ_Y zvezni, je tudi inducirana zvezna.

$\Rightarrow$ φ je Urisonova, saj je $\varphi|_B = 0$ in $\varphi|_C = 1$

Trditev: $A^{zap} \subseteq X$, $f: A \to Y$ zaprta vložitev, $Z = X \cup_f Y$

(i) Če sta X, Y 2-števna, je Z 2-števen.

(ii) Če sta X, Y Hausdorffova, je Z Hausdorffov.

Dokaz: (i) Naj bo $\mathcal{B}_X = \{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ baza za X.
Naj bo $\mathcal{B}_Y = \{V_m ; m \in \mathbb{N}\}$ baza za Y.

Za poljubna $n, m \in \mathbb{N}$ naj bo
$W_{n,m} = (U_n \cap A) \cap f^{-1}(V_m \cap f(A))$.

Če $W_{n,m} \neq \emptyset$, je pa seveda odprta v A, zato obstaja $W^X_{n,m} \subseteq U_n$ odprta, da je $W^X_{n,m} \cap A = W_{n,m}$, ter obstaja $W^Y_{n,m} \subseteq V_m$ odprta, da je $W^Y_{n,m} \cap f(A) = f(W_{n,m})$.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} := &\{ g(U_n) \,;\, U_n \in \mathcal{B}_X,\ U_n \cap A \neq \emptyset \} \\ &\cup \{ g(V_m) \,;\, V_m \in \mathcal{B}_Y,\ V_m \cap f(A) \neq \emptyset \} \\ &\cup \{ g(W^X_{n,m} \cup W^Y_{n,m}) \,;\, W_{n,m} \neq \emptyset \} \end{aligned}$$

$\mathcal{B}$ je števna družina.

Množice v $\mathcal{B}$ so odprte, ker so U_n, V_m, $W^X_{n,m} \cup W^Y_{n,m}$ nasičene odprte, če nastopajo v definiciji družine $\mathcal{B}$.

Pokazati moramo še, da je vsaka množica v kvocientni topologiji na Z unija množic iz $\mathcal{B}$. Za to je dovolj dokazati, da za vsako tako točko $D \overset{odp}{\subseteq} Z$ in vsako točko $d \in D$ obstaja $W \in \mathcal{B}$, da je $d \in W \subseteq D$.

$g^{-1}(d)$ je lahko ena točka v X ali v Y, ali pa vsebuje dve točki, eno v $A \subseteq X$ in njeno f-sliko v X.

- $g^{-1}(d) = \{x\} \subseteq X$:

$$x \in g^{-1}(D) \cap X \overset{odp}{\subseteq} X$$

$$x \notin \overset{zap}{A} : \quad x \in \underset{\cup\!\!\shortmid}{g^{-1}(D)} \cap X \cap A^c$$

$$\exists U_n \in \mathcal{B}_X : x \in U_n$$

$$\Rightarrow g(x) = d \in g(U_n) \in \mathcal{B}$$

• $g^{-1}(d) = \{y\} \subseteq Y$:

$y \notin f(A)$

Podobno kot zgoraj:

$\exists V_m: d \in g(V_m) \subseteq B$

• $g^{-1}(d) = \{x, \underset{\substack{\parallel \\ y}}{f(x)}\}$:

$x: \exists U_n \in \mathcal{B}_x: x \in U_n \subseteq g^{-1}(D)$
$y: \exists V_m \in \mathcal{B}_y: y \in V_m \subseteq g^{-1}(D)$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y) \in f^{-1}(V_m)$

$\Rightarrow x \in W_{n,m}$

$\Rightarrow W^x_{n,m} \subseteq g^{-1}(D)$ in $W^y_{n,m} \subseteq g^{-1}(D)$

$\Rightarrow (W^x_{n,m} \cup W^y_{n,m}) \subseteq D$

(ii) $X, Y \in T_2 \Rightarrow Z \in T_2$

Podobno ...

PROJEKTIVNI PROSTORI

Motivacija: V ravninski evklidski geometriji za medsebojno lego premic nastopata dve možnosti:

• Sekata se v eni točki.

• Sta vzporedni.

Želeli bi, da je situacija vedno enaka, torej, da se poljubni premici sekata v natanko eni točki. To naredimo tako, da dodamo točke v ∞, na način, da vsakemu snopu vzporednih premic dodamo točko v ∞, ki je skupna vsem premicam v snopu.

Izkaže se, da se v projektivnem prostoru ($\mathbb{R}P^2$) poenostavi tudi opis stožnic.

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{premice v } \mathbb{R}^2\}/_{\parallel}$$

Vprašanje: Kakšna je naravna topologija na $\mathbb{R}P^2$?

Točke v $\mathbb{R}P^2$ lahko opišemo na enak način:

$$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \times \{1\}$$

Poljubni točki $A \in \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ pripada premica skozi izhodišče, določena s smernim vektorjem $\overrightarrow{OA}$.

Točka A je edino presečišče te premice z ravnino $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$.

Na ta način dobimo bijekcijo med točkami na $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ in premicami skozi 0 v $\mathbb{R}^3$, ki ne ležijo v ravnini $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Premice skozi 0 v ravnini $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ pa so v bijekciji s snopi vzporednih premic na $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$.

$$\Rightarrow \mathbb{R}P^2 = \{1\text{-dimenzionalni lin. podprostori v } \mathbb{R}^3\}$$

$\mathbb{R}P^2 = \{L\setminus\{0\};\ \dim L = 1,\ L \text{ lin. podprostor v } \mathbb{R}^3\}$

paroma disjunktni, njihova unija je $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$

To razbitje $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ določa ekvivalenčno relacijo.

Ekvivalenčni razredi so 1-dimenzionalni linearni podprostori brez izhodišča:

$x,y \in L\setminus\{0\} \iff \exists \lambda \neq 0: y = \lambda x$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ [x]}}{L\setminus\{0\}} = \{\lambda\cdot x;\ \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$$

To je orbita delovanja $\mathbb{R}^\times$ na $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ z množenjem s skalarji:

$$RP^2 = \mathbb{R}^3\setminus\{0\}/_{x\sim\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}^\times} = \mathbb{R}^3\setminus\{0\}/\mathbb{R}^\times$$

Definicija: Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ in $n \in \mathbb{N}_0$. Projektiven prostor nad obsegom $\mathbb{F}$ je:

$$\mathbb{F}P^n := \mathbb{F}^{n+1}\setminus\{0\}/_{x\sim\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{F}^\times} = \mathbb{F}^{n+1}\setminus\{0\}/\mathbb{F}^\times$$

Opremimo ga s kvocientno topologijo.

Opomba: Deluje za poljubne topološke obsege.

Trditev: Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. $\mathbb{F}P^n$ je homogen prostor, torej za poljubni $x,y \in \mathbb{F}P^n$ obstaja homeomorfizem $h: \mathbb{F}P^n \circlearrowleft$, $h(x) = y$.

Dokaz:

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, phantom, "\in" sloped] & & w \arrow[d, phantom, "\in" sloped] \\
\mathbb{F}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[rr, "H"] \arrow[d, "q"'] & & \mathbb{F}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{F}P^n \arrow[rr, dashed, "\approx", "h"'] & & \mathbb{F}P^n \\
x \arrow[u, phantom, "\in" sloped] \arrow[rr, mapsto, "h"'] & & y \arrow[u, phantom, "\in" sloped]
\end{tikzcd}$$

Za izbrani homeomorfizem H linearni izomorfizem, ki vektor v, predstavnika točke x, slika v vektor w, predstavnika točke y.

v dopolnimo do baze $\mathbb{F}^{n+1}$:

$v, v_1, \dots, v_n$

w dopolnimo do baze $\mathbb{F}^{n+1}$:

$w, w_1, \dots, w_n$

Za H vzamemo poljubno preslikavo, ki slika bazne vektorje v bazne vektorje:

$Hv = w$
$Hv_i = w_i$

Ker je H homeomorfizem, je $q \circ H$ kvocientna.

$q \circ H$ naredi iste identifikacije kot q.

Torej je inducirana preslikava h homeomorfizem.

$h(x) = h([v]) = q(H(v)) = q(w) = [w] = y$

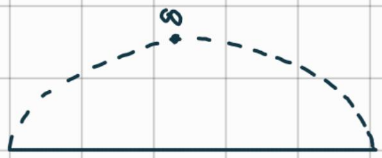
$\mathbb{F} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

Primer: $\mathbb{F}P^0 = \mathbb{F}^1\setminus\{0\}/\mathbb{F}^\times = \mathbb{F}^\times/\mathbb{F}^\times = \{*\}$

Primer: $\mathbb{F}P^1 = \mathbb{F}^2\setminus\{0\}/\mathbb{F}^\times$

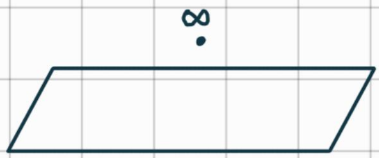
Zdi se, da je $\mathbb{F}P^1 = \mathbb{F}\cup\{\infty\}$ kompaktifikacija z eno točko.

$\mathbb{R}P^1$:



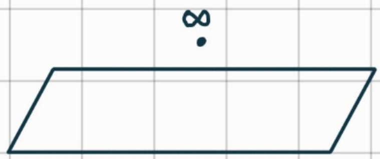
$\approx S^1$

$\mathbb{C}P^1$:



$\approx S^2$

$\mathbb{H}P^1$:



$\approx S^4$

$$d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$$

$$\mathbb{F}P^1 \approx S^d$$

Primer: $\mathbb{R}P^2$ je neka sklenjena ploskev, ki ni S^2.

Trditev: $\mathbb{F}P^n$ ima pokritje z $n+1$ odprtimi množicami, ki so homeomorfne $\mathbb{F}^n \equiv \mathbb{R}^{dn}$.

Dokaz:
$$\begin{matrix} \mathbb{F}^{n+1}\setminus\{0\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ x \end{matrix}$$

$$U_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^{n+1} \,;\, x_i \neq 0\}$$

U_i je odprta za vsak i. $\{U_i\}_i$ so torej odprto pokritje za $\mathbb{F}^{n+1}\setminus\{0\}$.

Ker so U_i nasičene, so $q(U_i)^{odp} \subseteq \mathbb{F}P^n$ in tvorijo odprto pokritje.

$q(U_i) \approx \mathbb{F}^n$

Dovolj je pokazati za $i=0$.

$\lambda(x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q|_{U_0}"'] & \mathbb{F}^n \\ q(U_0) \arrow[ur, dashed, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

$f(x_0, \dots, x_n) = (x_0^{-1} x_1, \dots, x_0^{-1} x_n)$

f slika ekvivalentne točke v iste:

$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = (x_0^{-1} \lambda^{-1} \lambda x_1, \dots, x_0^{-1} \lambda^{-1} \lambda x_n) = f(x_0, \dots, x_n)$

Ker je U_0 odprta, je $q|_{U_0}$ kvocientna, zato iz zveznosti f sledi zveznost $\bar{f}$. Da je $\bar{f}$ homeomorfizem, sledi iz obstoja inverzne zvezne preslikave.

$$g : \mathbb{F}^n \to q(U_0)$$
$$(w_1, \dots, w_n) \mapsto q(1, w_1, \dots, w_n)$$

g je zvezna in očitno inverz $\bar{f}$.

Posledica: $\mathbb{F}P^n$ je Hausdorffov.

Dokaz: $x \neq y \in \mathbb{F}P^n$
$x = [v]$, $v = (v_0, \dots, v_n)$

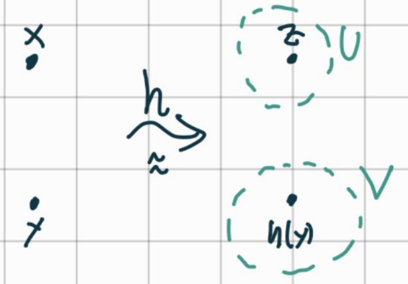
i) Če je $v_i \neq 0$ za vse $i = 0, \dots, n$, je $v \in U_i$ za vsak i, torej $x \in g(U_i)$ za vsak i.

Ampak za y obstaja vsaj en j, da je $y \in g(U_j)$.

$\Rightarrow x, y \in g(U_j) \approx \mathbb{F}^n = \mathbb{R}^{dn}$

x, y imata v $g(U_j)$ disjunktni okolici, in ker je $g(U_j)$ odprta v $\mathbb{F}P^n$, sta to tudi okolici v $\mathbb{F}P^n$.

ii) V splošnem lahko po homogenosti $\mathbb{F}P^n$ x s homeo. h preslikamo v z, ki ima vse komponente neničelne.



Po (i) imata $z = h(x)$ in $h(y)$ disjunktni okolici.

$\Rightarrow h^{-1}(U), h^{-1}(V)$ sta disjunktni okolici x in y.

Zanimajo nas topološke lastnosti $\mathbb{F}P^n$:

Za $n \geq 1$ je $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$ (lokalno) povezan (s potmi).

$\Rightarrow \mathbb{F}P^n$ je (lokalno) povezan (s potmi).

Pokazati želimo, da so $\mathbb{F}P^n$ kompaktni.

V $\mathbb{F}^k$ označimo enotsko sfero z $S(\mathbb{F}^k) = \{x \in \mathbb{F}^k = \mathbb{R}^{dk}; \|x\| = 1\}$.

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$: $S(\mathbb{R}^k) = S^{k-1}$

$\mathbb{F}=\mathbb{C}$: $S(\mathbb{C}^k)=S(\mathbb{R}^{2k})=S^{2k-1}$

$\mathbb{F}=\mathbb{H}$: $S(\mathbb{H}^k)=S(\mathbb{R}^{4k})=S^{4k-1}$

Ker je $\mathbb{F}$ topološki obseg, množenje z enotskimi skalarji ohranja $S(\mathbb{F}^k)$, zato delovanje $\mathbb{F}^\times$ na $\mathbb{F}^{n+1}\setminus\{0\}$ določa delovanje $S(\mathbb{F})$ na $S(\mathbb{F}^{k+1})$.

$$\|\lambda(x_0,\dots,x_n)\| = |\lambda|\cdot\|(x_1,\dots,x_n)\|$$

$$S(\mathbb{F}) = \begin{cases} S^0=\{\pm 1\} & ; \ \mathbb{F}=\mathbb{R} \\ S^1 & ; \ \mathbb{F}=\mathbb{C} \\ S^3 & ; \ \mathbb{F}=\mathbb{H} \end{cases}$$

Trditev: $\mathbb{F}P^n \approx S(\mathbb{F}^{n+1})/S(\mathbb{F})$

Dokaz:

$$\begin{tikzcd} S(\mathbb{F}^{n+1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, bend left, "f \text{ kvoc.}"] & \mathbb{F}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[d, "q"] \\ S(\mathbb{F}^{n+1})/S(\mathbb{F}) \arrow[r, dashed, "\approx"] & \mathbb{F}P^n \end{tikzcd}$$

f naredi iste identifikacije kot p.

$\Rightarrow \mathcal{F}$ je homeomorfizem.

Trditev: Kvocientni projekciji p in q sta odprti.

$\mathbb{F}P^n$ je povezan (s potmi), lokalno povezan (s potmi), 2-števen, kompakten, lokalno kompakten.

$\mathbb{F}P^n$ je tudi metrizabilen.

$$\mathbb{R}P^n \approx S^n/_{\{\pm 1\}} = S^n/_{x\sim -x,\, x\in S^n}$$

Vsak ekvivalenčni razred seka zgornjo hemisfero.

$$S^n_+ = \{x \in S^n \,;\, x_{n+1} \geq 0\}$$

Ugibamo: $\mathbb{R}P^n \approx S^n_+/_{x\sim -x,\, x\in S^{n-1}}$

$$\mathbb{C}P^n \approx S^{2n+1}/_{S^1}$$

Trditev: $\mathbb{R}P^n \approx B^n/_{x\sim -x,\, x\in S^{n-1}}$

$$\mathbb{C}P^n \approx B^{2n}/_{x\sim \lambda x,\, x\in S^{2n-1},\, \lambda\in S^1}$$

$$\mathbb{H}P^n \approx B^{4n}/_{x\sim \lambda x,\, x\in S^{4n-1},\, \lambda\in S^3}$$

Dokaz: $\mathbb{R}P^n$:

$$\begin{tikzcd}
B^n \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "r"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & S^n_+ \arrow[r, hook] & S^n \arrow[d, "p"] \\
B^n/_{x\sim -x,\, x\in S^{n-1}} \arrow[rr, dashed, "\approx", "\bar{f}"'] & & S^n/_{\{\pm 1\}}
\end{tikzcd}$$

f je zvezna, ker je kompozitum zveznih.

f je surjektivna, ker ima vsak ekvivalenčni razred za p predstavnika v S^n_+.

f je zaprta, ker slika iz kompakta v T_2.

f naredi iste identifikacije kot r.

$\Rightarrow F$ je homeomorfizem.

$\mathbb{C}P^n$:

$$\mathbb{C}P^n \approx S^{2n+1}/S^1$$

$$S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$$
$$\| $$
$$\{z=(z_1,\dots,z_{n+1}) \,;\, \|z\|=1\}$$

$$\lambda z = (\lambda z_1,\dots,\lambda z_{n+1})$$

λ lahko izberemo tako, da je $\lambda z_{n+1} \in [0,\infty)$.

$$S^{2n+1} \supseteq \{z=(z_1,\dots,z_{n+1}) \in S^{2n+1} \,;\, z_{n+1} \geq 0\}$$

Potem ta množica seka vse ekvivalenčne razrede, če je $z_{n+1} > 0$, seka ekvivalenčne razrede v eni točki, če je $z_{n+1} = 0$, pa vsebuje celotni ekvivalenčni razred delovanja z S^1.

$$\Rightarrow |z_1|^2 + \dots + |z_{2n+1}|^2 = 1$$

$$\Rightarrow z_{n+1} = \sqrt{1-(|z_1|^2+\dots+|z_n|^2)}$$

Podobno kot prej sledi:

$$\mathbb{C}P^n \approx B^{2n}/_{x\sim\lambda x,\ x\in S^{2n-1},\ \lambda\in S^1}$$

$\mathbb{H}P^n$:

Podobno kot $\mathbb{C}P^n$ ...

Primer: $\mathbb{R}P^1 = B^1/_{1\sim -1} \approx S^1$

Primer: $\mathbb{C}P^1 = B^2/_{x\sim\lambda x,\, x\in S^1,\, \lambda\in S^1}$

$= B^2/_{S^1} \approx S^2$

Primer: $\mathbb{R}P^2 = B^2/_{x\sim -x,\, x\in S^1}$

$\mathbb{R}P^2$ ni mogoče vložiti v $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}P^2$ je sklenjena ploskev, ki ni homeomorfna $S^2, T^2, \ldots$

Opomba: Zgornji opis projektivnih prostorov je osnova za to, da jih opremimo s strukturo CW kompleksov.

Ti so dobljeni z zaporednim lepljenjem krogel vzdolž robnih sfer. Tem prilepljenim kroglam rečemo celice.

Primer: $\mathbb{R}P^n = B^n/_{x\sim -x,\, x\in S^{n-1}}$

$\mathbb{R}P^{n-1} = S^{n-1}/_{x\sim -x}$, $p: S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ kvoc. proj.

$\mathbb{R}P^n$ lahko torej predstavimo kot zlepek, kjer B^n prilepimo na $\mathbb{R}P^{n-1}$ s kvocientno projekcijo p vzdolž robne sfere S^{n-1}.

$\Rightarrow \mathbb{R}P^n \approx B^n \cup_p \mathbb{R}P^{n-1}$

To nam omogoča induktivno konstrukcijo $\mathbb{R}P^n$.

Primer: $\mathbb{C}P^n = B^{2n}/_{x\sim\lambda x,\, x\in S^{2n-1}}$

$\mathbb{C}P^{n-1} = S^{2n-1}/_{S^1}$

$\mathbb{C}P^n$ dobimo iz $\mathbb{C}P^{n-1}$ tako, da prilepimo B^{2n} po kvocientni projekciji $p: S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$.

Celice so le v sodih dimenzijah od 0 do $2n$.