8.2) Naj bo X topološki prostor in $K \subseteq X$ neprazna kompaktna. Množico $C(X, \mathbb{R})$ opremimo s τ_{co}. Dokažite, da je preslikava $C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \max f_*(K)$ zvezna.

$$\mathcal{P} = \{\langle K, U\rangle \; ; \; K^{komp} \subseteq X, \; U^{odp} \subseteq \mathbb{R}\} =$$
$$= \{f^{zv} : K \to U \; ; \; -\|-\}$$

$$\phi : C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \max f_*(K)$$

ϕ je dobro definirana, saj zvezna funkcija f doseže maksimum na kompaktu K.

$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$

$g \in \phi^*((a,b))$

$\Rightarrow \phi(y) \in (a,b) \Rightarrow \max g_*(K) \in (a,b)$

Naj bo $x_0 \in K$, da je $g(x_0) = \max g_*(K)$.

$f \in \langle K, (-\infty, b)\rangle \cap \langle \{x\}, (a, \infty)\rangle \subseteq \phi^*((a,b))$

$\Rightarrow \phi^*((a,b))$ je odprta, saj je bila g poljubna.

8.4) Naj bosta X in Y topološka prostora. Evalvacija je preslikava $ev : C(X,Y) \times X \to Y$, $ev(f,x) := f(x)$.

Dokažite naslednji trditvi za $C(X,Y)$ s τ_{co}.

a) Evalvacija je zvezna v vsaki točki posebej.

Če fiksiramo $f_0 \in C(X,Y)$, potem je $ev(f_0,\_) : X \to Y$, $ev(f_0,\_) \equiv f_0$. Torej je zvezna.

Fiksiramo še $x_0 \in X$. Potem je $ev(\_,x_0) : C(X,Y) \to Y$, $f \mapsto f(x_0)$.

$U^{odp} \subseteq Y$ poljubna

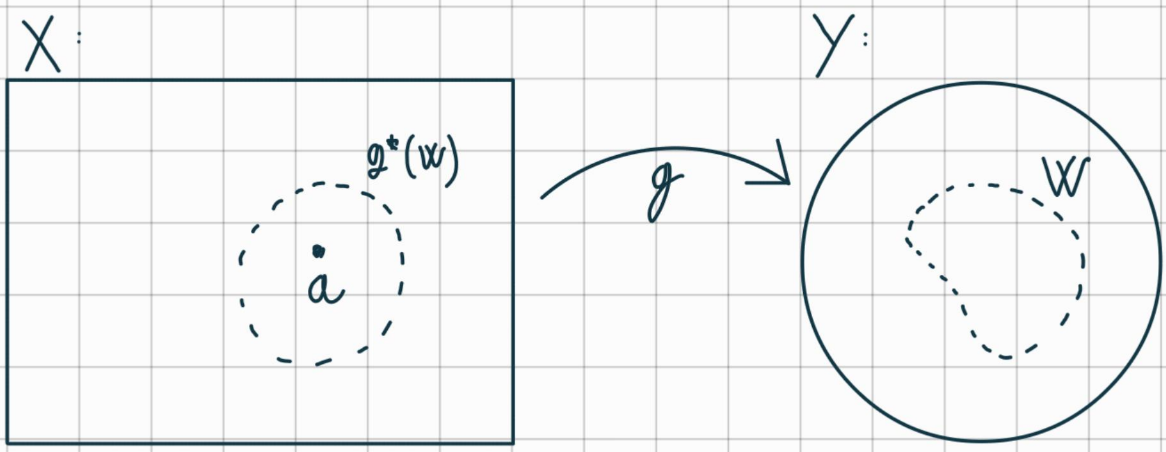
$$\begin{array}{l} ev^*(\_,x_0) = \{f \in C(X,Y) \,;\, f(x_0) \in U\} \\ \quad \| \\ \langle \{x_0\}, U \rangle \end{array}$$

b) Če je X lokalno kompakten, je evalvacija zvezna.

$W^{odp} \subseteq Y$ poljubna

$ev^*(U) = \{(f,x) \,;\, f(x) \in W\}$

$(g,a) \in ev^*(W)$ poljubna



$g(a) \in W$
$a \in g^*(W)$

$a \in V^{odp} \subseteq K^{komp} \subseteq g^*(W)$

$(g,a) \in \langle K,W\rangle \times V \subseteq ev^*(W)$

$(g,a) \in \langle K,W\rangle \times V$

$a \in V$
$g_*(K) \subseteq g_*(g^*(W)) \subseteq W$

$g^*(W)^{odp} \subseteq X$

$\langle K,W\rangle \times V \subseteq ev^*(W)$

$ev^*(W) = \{(f,x)\ ;\ f(x) \in W\}$

$(f,x) \in \langle K,W\rangle \times V$ poljuben

$x \in V \subseteq K \Rightarrow f(x) \in W$ po definiciji $\langle K,W\rangle$

Opomba: Velja tudi ekvivalenca.

8.5) Topološki prostor zadošča lastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$, kadar za vsako točko $a \in X$ in vsako zaprto podmnožico $A \subseteq X$, ki ne vsebuje točke a, obstaja zvezna preslikava $f: X \to [0,1]$, za katero je $f(a)=0$ in $f(x)=1$ za vse $x \in A$.

Prostor je popolnoma regularen, kadar je $T_{3\frac{1}{2}}$ in T_0.

a) $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$

$U := f^*([0,\tfrac{1}{3}])$
$V := f^*([\tfrac{2}{3},1])$

$\Rightarrow a \in U,\ A \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset$

b) Vsak normalen prostor je popolnoma regularen in vsak popolnoma regularen prostor je tudi Hausdorffov in regularen.

X normalen $\Rightarrow$ X je $T_{3\frac{1}{2}}$

Naj bosta $a \in X \setminus A$ in $A \subseteq X$ poljubna.

Ker je X T_1, je $\{a\}$ zaprt.

$\Rightarrow$ Po Urisonovi lemi obstaja zvezna $f: X \to [0,1]$, $f(a) = 0$ in $f(A) = 1$.

X popolnoma regularen $\Rightarrow$ X Hausdorffov in regularen

$$T_{3\frac{1}{2}} \wedge T_0 \overset{(a)}{\Rightarrow} T_3 \wedge T_0 \Rightarrow T_3 \wedge T_2 \wedge T_1 \wedge T_0$$

c) Vsak metrični prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$.

Sledi iz prejšnje točke.