4.1) Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ vpeljemo topologijo z bazo $\mathcal{B} := \{(-a,a) \; ; \; a \in (0,\infty)\}$.

a) Pokažite, da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije τ na $\mathbb{R}$.

$\mathcal{B}$ je pokritje $\mathbb{R}$

Naj bo $x \in \mathbb{R}$.

$x \in (-|x+1|, |x+1|) \in \mathcal{B}$ ✓

Presek dveh baznih množic je unija baznih

$(-a,a) \cap (-b,b) = (-\min\{a,b\}, \min\{a,b\})$ ✓

$\Rightarrow \mathcal{B}$ je baza za topologijo τ

b) Določite notranjost in zaprtje množic $(0,2]$ in $[2,4]$.

Točka je v notranjosti, kadar je vsaka njena bazna okolica v $(0,2]$.

$\text{Int}\,(0,2] = \emptyset$

Točka je v zaprtju, kadar vsaka njena bazna okolica seka $(0,2]$.

$\mathrm{Cls}(0,2] = \mathbb{R}$

$\mathrm{Int}[2,4] = \emptyset$

$\mathrm{Cls}[2,4] = \mathbb{R} \setminus (-2,2)$

c) Obravnavajte konvergenco zaporedja $(1+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

$x \in (-1,1)$:

Okolica $(-1,1)$ ne vsebuje nobenega člena $1+\frac{1}{n}$.

$x \in \mathbb{R}\setminus(-1,1)$:

$x \geq 1$:

Poljubna bazna okolica je $(-a,a)$, kjer je $a > x \geq 1$. Torej vsebuje vse člene od nekod naprej.

$x \leq -1$:

Podobno.

Točka je limita zaporedja, kadar vsaka njena bazna okolica vsebuje vse člene od nekod naprej.

$\Rightarrow \mathbb{R}\setminus(-1,1)$ je množica limit

d) Poišči kakšno števno bazo topologije $\mathcal{T}$.

$\{(-q,q)\,;\, q \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ je števna baza

4.2) Za $a,b \in \mathbb{N}$ definiramo $U_{a,b} := \{na+b;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ in označimo $\mathcal{B} := \{U_{a,b};\ a$ in b tuji naravni števili$\}$.

a) Preverite, da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije $\mathcal{T}$ na $\mathbb{N}$.

Bazni pokrijejo cel prostor:

$$U_{1,1} = \mathbb{N}$$

Presek baznih se zapiše kot unija baznih:

$$n \in U_{a,b} \cap U_{c,d} \iff n = ka+b = lc+d$$

$$n \in U_{ac,n}$$

$$D(a,c) = 1, \quad D(c,d) = 1$$

Recimo, da $p|n$ in $p|v(a,c)$. Potem $p|a$ ali $p|c$. Če $p|n$ in $p|a$, potem $p|b$, torej $D(a,b) \neq 1$. Podobno druga možnost.

b) Dokažite, da je za vsako praštevilo p množica $p\mathbb{N}$ zaprta glede na $\mathcal{T}$.

$$(p\mathbb{N})^c = \bigcup U_{a,b}$$

$$n \in (p\mathbb{N})^c$$

$$n \in U_{p,n} \subseteq (p\mathbb{N})^c$$

$$D(p,n) = 1 \text{ po predpostavki}$$

c) Določite notranjost in zaprtje podmnožice $\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Kako lahko od tod dokažete, da je praštevil neskončno?

$$\mathbb{N}\setminus\{1\} = U_{1,2}$$

$$\mathrm{Int}(\mathbb{N}\setminus\{1\}) = \mathbb{N}\setminus\{1\}$$
$$\mathrm{Cls}(\mathbb{N}\setminus\{1\}) = \mathbb{N}$$

Recimo, da imamo končno praštevil $p_1, p_2, \dots, p_n$.

$$\underbrace{p_1\mathbb{N} \cup p_2\mathbb{N} \cup \dots \cup p_n\mathbb{N}}_{\text{končna unija zaprtih množic} \Rightarrow \text{zaprta}} = \underbrace{\mathbb{N}\setminus\{1\}}_{\text{ni zaprta}}$$

4.4) Naj bo X množica. Dokažite, da je $\mathcal{P} := \{\{x\}^c ; x \in X\}$ predbaza topologije končnih komplementov na X.

$$\mathcal{P} := \{\{x\}^c ; x \in X\} \rightsquigarrow \mathcal{T}$$

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{kk} \iff \mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}_{kk}$$

$$\mathcal{T}_{kk} = \{A \subseteq X ; A = \emptyset \text{ ali } A^c \text{ je končna}\}$$

$\mathcal{T}_{kk} \subseteq \mathcal{T}$:

$\emptyset \in \mathcal{T}_{kk}$:

$\emptyset \in \mathcal{T}$ po definiciji

$U \in \mathcal{T}_{kk}$, U^c končna:

$$U^c = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$U = X / \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$U = \{x_1\}^c \cap \dots \cap \{x_n\}^c$$

$$A+B = \{in_1(a)\,;\, a \in A\} \cup \{in_2(b)\,;\, b \in B\}$$
$in_1 : A \to A+B$
$in_2 : B \to A+B$

τ_{A+B} porojena z bazo $in_{1*}(\tau_A) \cup in_{2*}(\tau_B)$

$\tau_{A+B} = \{in_{1*}(U) \cup in_{2*}(V)\,;\, U \in \tau_A \wedge V \in \tau_B\}$

in_1, in_2 sta odprti in zaprti vložitvi

4.8)

a) $f : (-\infty, 0) + [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
$in_1 x \mapsto x$
$in_2 x \mapsto x$

f je bijekcija
f je zvezna

$\mathbb{R}$ je povezan
$(-\infty, 0) + [0, \infty)$ ni povezan

$\Rightarrow$ Nista homeomorfna

b) Heavisidova funkcija:

Kot funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ni zvezna.

Kot funkcija $(-\infty, 0) + [0, \infty) \to \mathbb{R}$ pa je zvezna, ker sta kosa ločena in odprto pokritje.

4.10)

a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{dis}) \overset{i}{\hookrightarrow} (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evk})$

Ali je topološka vložitev, odprta, zaprta?

$i_*(\{n\}) = \{n\} = \mathbb{N} \cap (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$
je odprta v $\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Je topološka vložitev.

$i_*(\{1\}) = \{1\}$
ni odprta v $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Ni odprta.

Izrek: Naslednje trditve so ekvivalentne za $f : X \to Y$:

1) f je odprta vložitev
2) f je odprta zvezna injekcija
3) f je vložitev in $f_*(X)$ je odprta

Enako velja za zaprte.

$\mathbb{N}^c = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$

$\Rightarrow$ Je zaprta.

b) $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{dis}) \xhookrightarrow{i} (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evkl})$

$i_*(\{1\}) = \{1\}$ ni odprto v $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ Ni topološka vložitev.

4.7) Sorgenfrayevo topologijo $\mathcal{T}_S$ na množici realnih števil $\mathbb{R}$ upeljemo z bazo $\mathcal{B}_S := \{[a,b) ;\ a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$.

a) Dokažite, da je to res baza.

$\mathcal{B}_S$ je pokritje

$x \in \mathbb{R}$

$x \in [x, x+1)$

Presek baznih je unija baznih

$[a,b) \cap [c,d) = [\max\{a,c\}, \min\{b,d\})$

- $\in \mathcal{B}_S$, če $\max\{a,c\} < \min\{b,d\}$
- $= \emptyset$, sicer

V vsakem primeru je unija baznih množic.

b) Dokažite, da je $\mathcal{T}_E \subsetneq \mathcal{T}_S$.

$\mathcal{T}_E \subset \mathcal{T}_S \iff \mathcal{B}_E \subseteq \mathcal{T}_S$

$(a,b) \in \mathcal{B}_E$

$(a,b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a+\frac{1}{n}, b) = \bigcup_{a' \in (a,b)} [a', b)$

$[1,2) \in \mathcal{T}_S$, $[1,2) \notin \mathcal{T}_E$

c) Določi notranjosti in zaprtja množic $(0,1)$, $[0,1)$, $(0,1]$, $[0,1]$ v $\mathbb{R}$ glede na $\mathcal{T}_S$.

$\mathrm{Int}_{\mathcal{T}_S}(0,1) = (0,1)$

$\mathrm{Int}_{\mathcal{T}_S}[0,1) = [0,1)$

$\mathrm{Int}_{\mathcal{T}_S}(0,1] = (0,1)$, ker ne obstaja nobena večja odprta podmnožica, ker ne obstaja nobena bazna okolica iz $\mathcal{B}_S$, ki bi vsebovala 1 in v celoti ležala znotraj $(0,1]$

$1 \in [a,b) \subseteq (0,1]$, $a \leq 1 < b$

$\frac{b+1}{2} \in [a,b)$
$\frac{b+1}{2} \notin (0,1]$

$\mathrm{Int}_{\mathcal{T}_S}[0,1] = [0,1)$

$\mathrm{Cl}_{\mathcal{T}_S}(0,1) = [0,1)$, ker bazna okolica $[1,2) \ni 1$ ne seka $(0,1)$

$[a,b)^c = \bigcup_{a' < a} [a', a) \cup \bigcup_{b' > b} [b, b')$

$Cl_{\tau_S}[0,1) = [0,1)$

$Cl_{\tau_S}(0,1] = [0,1]$

$Cl_{\tau_S}[0,1] = [0,1]$

d) Dokažite, da sta tudi

$\mathcal{B}' := \{[a,b) \,;\, a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{Q},\, a < b\}$
$\mathcal{B}'' := \{[a,b) \,;\, a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\, a < b\}$

bazi za τ_S.

$\mathcal{B}'$ porodi τ'
$\mathcal{B}''$ porodi τ''

$\tau' = \tau_S$

$\tau' \subseteq \tau_S \iff \mathcal{B}' \subseteq \tau_S$

Očitno, ker $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}_S$.

$\tau_S \subseteq \tau' \iff \mathcal{B}_S \subseteq \tau'$

$[a,b) \in \mathcal{B}_S$

$[a,b) = \bigcup_{b' \in (a,b) \cap \mathbb{Q}} [a,b')$

$\tau'' = \tau_S$

$\tau'' \subseteq \tau_S \iff \mathcal{B}'' \subseteq \tau_S$

Očitno, ker $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}_S$.

$\mathcal{T}_S \subseteq \mathcal{T}'' \iff \mathcal{B}_S \subseteq \mathcal{T}''$

$[a,b) \in \mathcal{B}_S$

$$[a,b) = \bigcup_{b'' \in (a,b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} [a,b'')$$

e) Dokažite, da je $\mathcal{B}''' := \{[a,b) \,;\, a,b \in \mathbb{Q},\ a<b\}$ baza neke topologije na $\mathbb{R}$, ki je strogo šibkejša od $\mathcal{T}_S$.

$\mathcal{B}''$ je baza neke $\mathcal{T}'''$

$\mathcal{B}'''$ je pokritje

$x \in \mathbb{R}$

$x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1)$

Prerez baznih je unija baznih

$[a,b) \cap [c,d) = [\max\{a,c\}, \min\{b,d\})$

$\mathcal{T}''' \subsetneq \mathcal{T}_S$

$\mathcal{T}''' \subseteq \mathcal{T}_S$

Očitno.

$\mathcal{T}''' \neq \mathcal{T}_S$

$[\pi, 2\pi) \in \mathcal{T}_S$

$$[\pi, 2\pi) \neq \bigcup_{\substack{\pi < a' < b' < 2\pi \\ a', b' \in \mathbb{Q}}} [a', b') = (\pi, 2\pi)$$

$$\underset{\pi}{\overset{\cup}{}} \qquad \underset{\pi}{\overset{\not\cup}{}}$$

$$[\pi, 2\pi) = \bigcup_{(a,b) \in \dots} B_{(a,b)} \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Q},\ a < b,\ \pi \in [a,b)$$

$$\Rightarrow a \leq \pi,\ a \in \mathbb{Q} \Rightarrow a < \pi$$

$$\Rightarrow a \in U \text{ in } a \notin [\pi, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \times$$

Torej $[\pi, 2\pi) \in \mathcal{T}'''$

4) Ugotovite, ali je Sorgenfreyeva premica separabilen, 1-števen oziroma 2-števen topološki prostor.

Racionalna števila so gosta v $\mathbb{R}_{evkl}$ in $(a,b) \subseteq [a,b)$, torej je separabilen.

$\{[x, x+\frac{1}{n}) ; n \in \mathbb{N}\}$ je števna lokalna baza za x, torej je 1-števen.

Naj bo $\mathcal{B}$ katerakoli baza za $\mathcal{T}_S$. Pokazati moramo, da $\mathcal{B}$ ni števna, torej da obstaja injekcija $\mathbb{R} \to \mathcal{B}$.

Za vsak $x \in \mathbb{R}$ obstaja $B_x \in \mathcal{B}$, da bo veljalo $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ x &\longmapsto B_x \end{aligned}$$

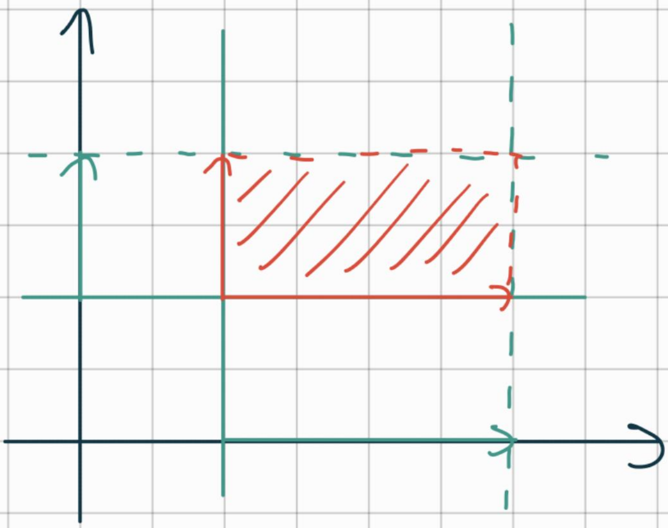
$x = \min B_x$

To je injekcija, torej ni 2-števen.

g) Produkt $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ imenujemo Sorgenfreyeva ravnina. Katerima prostoroma sta homeomorfna podprostorama Sorgenfreyeve ravnine:

$$D := \{(x,x) \,;\, x \in \mathbb{R}\}$$
$$L := \{(x,-x) \,;\, x \in \mathbb{R}\}$$

Baze okolice $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$:

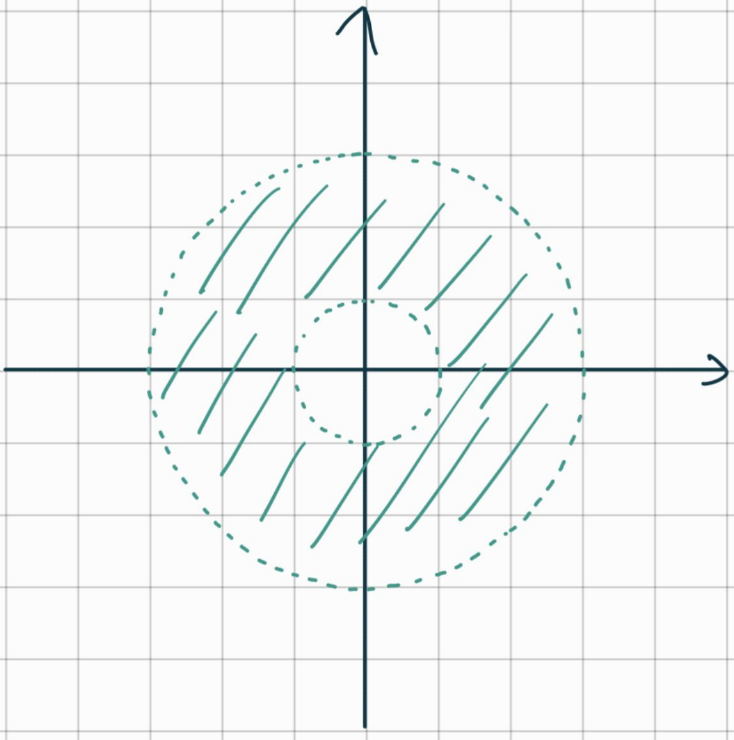


$D \approx \mathbb{R}_S$

Splošno: $\Delta_X \subseteq (X,\mathcal{T}) \times (X,\mathcal{T})$
$\Delta_X \approx (X,\mathcal{T})$

$L \approx \mathbb{R}_{dis}$

4.5) Pokažite, da je $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 1 < x^2+y^2 < 4\} = X$ homeomorfen netrivialnemu produktu dveh topoloških prostorov.



$X \approx S_1 \times (0,1)$

$$h : X \to S_1 \times (0,1)$$
$$\vec{a} \mapsto \left(\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \|\vec{a}\| - 1\right)$$

$$h^{-1} : S_1 \times (0,1) \to X$$
$$(\vec{b}, z) \mapsto (z+1) \cdot \vec{b}$$

4.3) Označimo $X := \mathbb{N}^2 \cup \{(0,0)\}$ in definirajmo:

$$\tau := \{U \subseteq X ;\ (0,0) \notin U \lor \exists N \in \mathbb{N}.\ \forall n \in \mathbb{N}.\ n > N \Rightarrow (\{n\} \times \mathbb{N}) \setminus U \text{ je končna množica}\}$$

a) Dokažite, da je τ topologija na X.

$\bigcup_{\mathcal{U} \in I} \mathcal{U}$:

Če so vse $\mathcal{U} \in I$ prazne, je $\bigcup_{\mathcal{U} \in I} \mathcal{U} = \emptyset \in \tau$, ker $(0,0) \notin \emptyset$.

Če nobena od $\mathcal{U} \in I$ ne vsebuje $(0,0)$, je tudi $\bigcup_{\mathcal{U} \in I} \mathcal{U} \in \tau$, ker $(0,0) \notin \bigcup_{\mathcal{U} \in I} \mathcal{U}$.

Sicer, za vsako od $\mathcal{U} \in I$, kjer $(0,0) \in \mathcal{U}$, obstaja ustrezen $N_\mathcal{U}$, da je za vse $n > N_\mathcal{U}$ $(\{n\} \times \mathbb{N}) \setminus \mathcal{U}$ končna množica. Torej obstajata $a_\mathcal{U}, b_\mathcal{U} \in \mathbb{N}_0$, da je $\{(n,m) ;\ n \geq a_\mathcal{U} \land m \geq b_\mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{U}$.

Naj bosta $a := \inf\{a_{\mathcal{U}}\}$ in $b := \inf\{b_{\mathcal{U}}\}$. Ker so vsi $a_{\mathcal{U}}, b_{\mathcal{U}} \geq 0$, taka a in b gotovo obstajata. Torej velja, da je $\{(n,m);\ n \geq a \wedge m \geq b\} \subseteq \bigcup_{\mathcal{U}\in I} \mathcal{U}$.

Posledično obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da velja ustrezen pogoj, torej je $\bigcup_{\mathcal{U}\in I} \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.

$\bigcap_{\mathcal{U}\in I} \mathcal{U}$, I končna:

Če katera od $\mathcal{U} \in I$ ne vsebuje $(0,0)$, potem $(0,0) \notin \bigcap_{\mathcal{U}\in I} \mathcal{U}$, torej $\bigcap_{\mathcal{U}\in I} \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.

Sicer, če vse $\mathcal{U} \in I$ vsebujejo $(0,0)$, za vsak $\mathcal{U} \in I$ obstaja ustrezen $N_{\mathcal{U}} \in \mathbb{N}$. Če vzamemo $N := \max\{N_{\mathcal{U}}\}$, bo ustrezen tudi za $\bigcap_{\mathcal{U}\in I} \mathcal{U}$, torej $\bigcap_{\mathcal{U}\in I} \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.

b) Dokažite, da točka $(0,0)$ leži v zaprtju množice $\mathbb{N}^2$. Kakšne so na splošno zaprte množice v $\mathcal{T}$?

$\mathrm{Cl}\, \mathbb{N}^2 = \mathbb{N}^2 \cup \{(0,0)\}$

$\mathbb{N}^2$ ni zaprta

$X \setminus \mathbb{N}^2 = \{(0,0)\}$ ni odprta

Ne obstaja noben $N \in \mathbb{N}$, da bi bil izpolnjen pogoj iz topologije. Torej $\{(0,0)\}$ ni odprta.

$\mathbb{N}^2 \cup \{(0,n)\}$ in $\mathbb{N}^2 \cup \{(n,0)\}$ nista zaprti

Podobno.

$\mathbb{N}^2 \cup \{(0,0)\}$ je zaprta

$\underline{X \setminus (\mathbb{N}^2 \cup \{(0,0)\}) = \emptyset \text{ je odprta}}$

Očitno.

Torej je $\mathbb{N}^2 \cup \{(0,0)\}$ najmanjša zaprta množica, ki vsebuje $\mathbb{N}^2$, torej je zaprtje od $\mathbb{N}^2$.

$$\mathcal{Z} = \{A \subseteq X \,;\, X \setminus A \in \mathcal{T}\} =$$

$$= \{A \subseteq X \,;\, (0,0) \notin X \setminus A \vee \exists N \in \mathbb{N}.\ \forall n \in \mathbb{N}.\ n > N \Rightarrow (\{n\} \times \mathbb{N}) \setminus (X \setminus A) \text{ je končna}\} =$$

$$= \{A \subseteq X \,;\, (0,0) \in A \vee \exists N \in \mathbb{N}.\ \forall n \in \mathbb{N}.\ n > N \Rightarrow (\{n\} \times \mathbb{N}) \cap A \text{ je končna}\}$$

c) Dokažite, da ne obstaja zaporedje v $\mathbb{N}^2$, ki konvergira k $(0,0)$. Sklepajte, da X ni 1-števen.

Točka je limita zaporedja, če vsaka njena odprta okolica vsebuje vse člene od nekod naprej.

Odprte okolice od $(0,0)$:

$$\{U \subseteq X \,;\, (0,0) \in U \wedge \exists N \in \mathbb{N}.\ \forall n \in \mathbb{N}.\ n > N \Rightarrow (\{n\} \times \mathbb{N}) \setminus U \text{ je končna množica}\}$$

???

Če bi bil X 1-števen, bi obstajala družina okolic $U_1, U_2, \dots$, da bi za vsako okolico $U \ni (0,0)$ obstajal $n \in \mathbb{N}$, da je $(0,0) \in U_n \subseteq U$. Torej bi imeli zaporedje v $\mathbb{N}^2$ z limito $(0,0)$, ki ga pa ni.

d) Dokažite, da $id_X : (X, \tau) \to (X, \tau_{dis})$ ni zvezna pri $(0,0)$, slika pa vsako konvergentno zaporedje v konvergentno zaporedje, ki konvergira k sliki limite.

id je zvezna $\Leftrightarrow \tau_{dis} \subseteq \tau$

$\{(0,0)\} \in \tau_{dis}$
$\{(0,0)\} \notin \tau$

$\Rightarrow \tau_{dis} \nsubseteq \tau \Rightarrow id$ ni zvezna

Naj bo $(x_n)_n$ konvergentno v τ. Dokazati moramo, da je $(x_n)_n$ konvergentno tudi v τ_{dis}.

Naj bo x limita zaporedja $(x_n)_n$ glede na τ. Naj bo odprta okolica $U \ni x$ glede na τ_{dis}. Iz prejšnje točke vemo, da $x \neq (0,0)$. Torej je $\{x\}$ odprta okolica od x glede na τ. Ker $(x_n)_n$ konvergira glede na τ, so v $\{x\}$ vsi členi od nekod naprej. Ker $\{x\} \subseteq U$, so tudi v U vsi členi od nekod naprej. Torej je $(x_n)_n$ konvergentno glede na τ_{dis}.

4.6) Označimo $X := \mathbb{R} \times \{0,1\}$ in definirajmo:

$$\mathcal{P} := \{(-\infty, b) \times \{0,1\} \,;\, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) \times \{0,1\} \,;\, a \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{B} := \{(a,b) \times \{0,1\} \,;\, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

a) Pokažite, da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije na X.

$\mathcal{B}$ je pokritje X

Naj bo $(x, y) \in X$.

$a := x-1$
$b := x+1$

$(x,y) \in \{(a,b) \times \{0,1\}\}$ ✓

Presek baznih je unija baznih.

$A = (a_1, a_2) \times \{0,1\}, \quad a_1 < a_2$
$B = (b_1, b_2) \times \{0,1\}, \quad b_1 < b_2$

$A \cap B = ((a_1,a_2) \times \{0,1\}) \cap ((b_1,b_2) \times \{0,1\}) =$

$= ((a_1,a_2) \cap (b_1,b_2)) \cap \{0,1\} =$

$= (\max\{a_1,b_1\}, \min\{a_2,b_2\}) \cap \{0,1\}$

b) Pokažite, da se topologiji, porojeni s predbazo $\mathcal{P}$ oziroma z bazo $\mathcal{B}$, ujemata.

$\mathcal{P} \rightsquigarrow \tau_P$
$\mathcal{B} \rightsquigarrow \tau_B$

$\tau_B \subseteq \tau_P \Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq \tau_P$

Naj bo $(a,b) \times \{0,1\} \in \mathcal{B}$.

$X := (-\infty, b) \times \{0,1\}$
$Y := (a, \infty) \times \{0,1\}$

$\mathcal{B} \subseteq X \cup Y \in \mathcal{P} \subseteq \tau_P$

$\tau_P \subseteq \tau_B \Leftrightarrow \mathcal{P} \subseteq \tau_B$

Naj bo $\mathcal{U} \in \mathcal{P}$.

- $\mathcal{U} = (-\infty, b) \times \{0,1\}$:

$$\mathcal{U} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \big(\underbrace{(a,b) \times \{0,1\}}_{\in \mathcal{B}}\big) \in \tau_{\mathcal{B}}$$

- $\mathcal{U} = (a, \infty) \times \{0,1\}$:

$$\mathcal{U} = \bigcup_{b \in \mathbb{R}} \big(\underbrace{(a,b) \times \{0,1\}}_{\in \mathcal{B}}\big) \in \tau_{\mathcal{B}}$$

c) Ugotovite, s katerima topologijama mora opremiti $\mathbb{R}$ in $\{0,1\}$, da se topologija, porojena s $\mathcal{P}$ oziroma z $\mathcal{B}$, ujema s produktno topologijo.

Vzeti moramo $(\mathbb{R}, \tau_{evkl})$ in $(\{0,1\}, \tau_{dis})$.

4.9) Dokažite, da ima vsak podprostor prostora s topologijo končnih komplementov tudi topologijo končnih komplementov.

$\tau_{kk} = \{ U \subseteq X \, ; \, U = \emptyset \text{ ali } U^c \text{ je končna} \}$

$A \subseteq X$

$\tau_A = \{ A \cap U \, ; \, U \in \tau_{kk} \} =$

$= \{ U \subseteq A \, ; \, U = \emptyset \text{ ali } A \cap U^c \text{ je končna} \}$

$U = \emptyset \Rightarrow A \cap U = \emptyset$

U^c je končna $\Rightarrow A \cap U^c$ je končna

4.11) Naj bosta X in Y množici.

Za $b \in Y$ definiramo vodoravno rezino:

$$vr_b : X \to X \times Y$$
$$x \mapsto (x, b)$$

Za $a \in X$ definiramo navpično rezino:

$$nr_a : Y \to X \times Y$$
$$y \mapsto (a, y)$$

a) Dokažite, da če sta X in Y topološka prostora in $X \times Y$ opremimo s produktno topologijo, potem so vse rezine topološke vložitve.

vr_b je zvezna

$U \times V \subseteq X \times Y$ odprta

$\Rightarrow U \times V \in \tau_X \times \tau_Y$

$\Rightarrow U \in \tau_X$

$\Rightarrow vr_b^{-1}(U \times V) = U \subseteq X$ odprta

vr_b je injekcija

$vr_b(x_1) = vr_b(x_2)$
$(x_1, b) = (x_2, b)$
$x_1 = x_2$

vr_b^{-1} je zvezna

$\cancel{vr_b^{-1} = proj_X}$???

$proj_X$ je zvezna (iz predavanj)

b) Naj bosta X in Y množici z izbranima točkama $x_0 \in X$ in $y_0 \in Y$. Produkt $X \times Y$ opremimo z neko topologijo τ, množici X in Y pa s takima topologijama, da sta vr_{x_0} in nr_{x_0} topološki vložitvi. Pokažite, da τ ni nujno produktna.

$X := \{0,1\}$, $x_0 := 0$
$Y := \{0,1\}$, $y_0 := 0$

$$\tau := \{\emptyset, \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(0,1),(1,0)\}, \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\}$$

$vr_0^*(\emptyset) = \emptyset$
$vr_0^*(\{(0,1)\}) = \emptyset$
$vr_0^*(\{(1,0)\}) = \{1\}$
$vr_0^*(\{(0,1),(1,0)\}) = \{1\}$
$vr_0^*(X \times Y) = \{0,1\}$

$nr_0^*(\emptyset) = \emptyset$
$nr_0^*(\{(0,1)\}) = \{1\}$
$nr_0^*(\{(1,0)\}) = \emptyset$
$nr_0^*(\{(0,1),(1,0)\}) = \{1\}$
$nr_0^*(X \times Y) = \{0,1\}$

$\tau_X := \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$
$\tau_Y := \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\mathcal{B}_p = \{\emptyset, \{(1,1)\}, \{(1,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,1)\}, \dots\}$

$\{(1,0),(1,1)\} \in \tau$

$\Rightarrow \tau$ ni produktna.

$vr_{0k}(\emptyset) = \emptyset$
$vr_{0k}(\{1\}) = \{(1,0)\}$
$vr_{0k}(\{0,1\}) = \{(0,0),(1,0)\}$

$kr_{0k}(\emptyset) = \emptyset$
$kr_{0k}(\{1\}) = \{(0,1)\}$
$kr_{0k}(\{0,1\}) = \{(0,0),(0,1)\}$

Praslike odprtih so odprte.
Slike odprtih so odprte.
Sta injekciji.

$\Rightarrow$ Sta vložitvi.