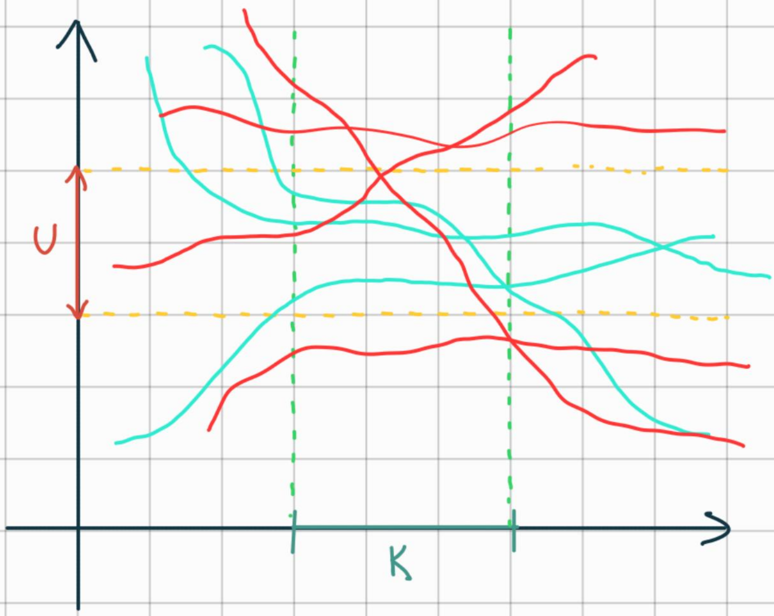
PROSTORI PRESLIKAV

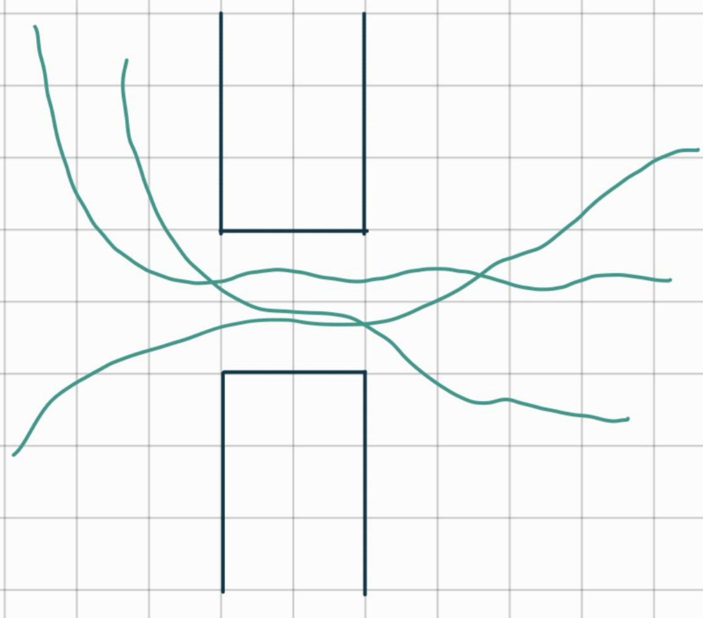
X, Y prostora

$\rightsquigarrow C(X,Y)$ opremimo z neko topologijo

$\langle K, U \rangle := \{ f \in C(X,Y) \; ; \; f_*(K) \subseteq U \} \subseteq C(X,Y)$

$K^{\text{komp}} \subseteq X$
$U^{\text{odp}} \subseteq Y$





Funkcije morajo nujno skozi to okno.

Kompaktno-odprta topologija na $C(X,Y)$ je topologija, ki jo kot predbaza generira množica:

$$\{\langle K, U\rangle \,;\, K^{komp} \subseteq X,\ U^{odp} \subseteq Y\}$$

Oznaka: $\mathcal{T}_{co}$

$\mathcal{T}_{co}$ ustreza "topologiji enakomerne konvergence na kompaktih".

Topologija enakomerne konvergence na kompaktih ima naslednjo bazo:

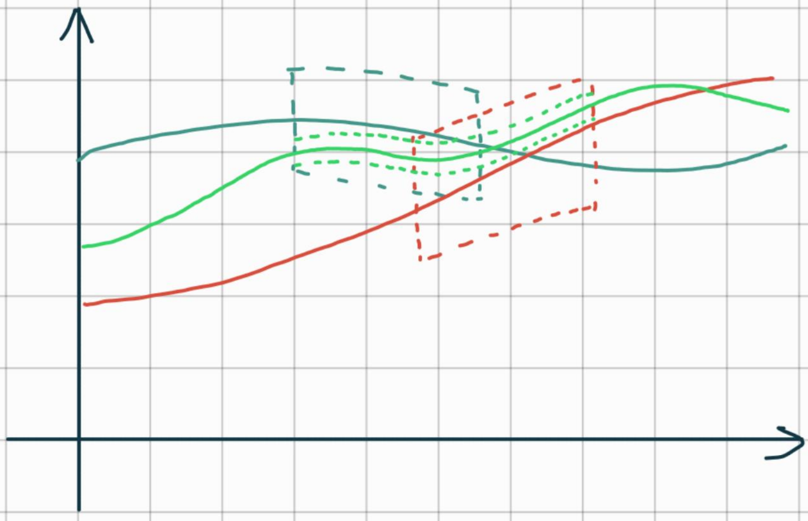
$$\{\langle f, K, \varepsilon\rangle \,;\, f \in \mathcal{C}(X,Y),\ K^{komp} \subseteq X,\ \varepsilon > 0\}$$

$$\langle f, K, \varepsilon\rangle = \{g : X \to Y^{metr} \,;\, d_Y(g(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in K\}$$

Trditev: Če je Y metričen, sta kompaktno-odprta topologija in topologija enakomerne konvergence na kompaktih enaki.

Dokaz: Najprej preverimo, da je $\{\langle f, K, \varepsilon\rangle\}$ res baza.

$$g \in \langle f_1, K_1, \varepsilon_1\rangle \cap \langle f_2, K_2, \varepsilon_2\rangle$$



$$\langle g,\ K_1 \cup K_2,\ \min\{\varepsilon_1',\ \varepsilon_2'\}\rangle \ni g$$

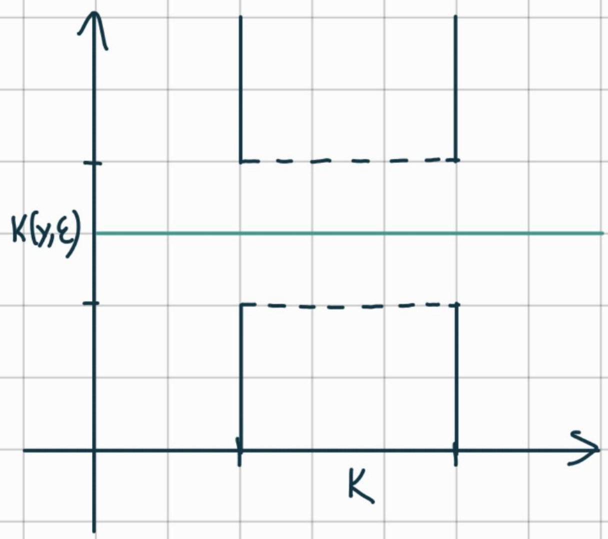
$$\varepsilon_1 - \max\{d_Y(f_1(x), g(x))\ ;\ x \in K_1\} =: \varepsilon_1'$$
$$\varepsilon_2 - \max\{d_Y(f_2(x), g(x))\ ;\ x \in K_2\} =: \varepsilon_2'$$

Očitno je pokritje, torej je baza.

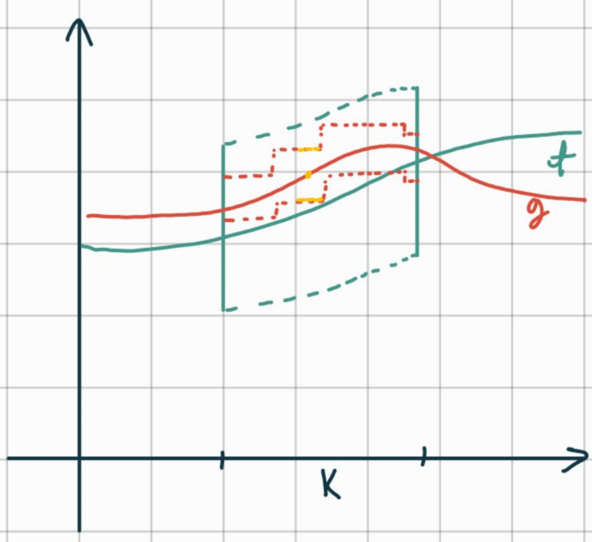
$\tau_{co} \subseteq \tau_{ekk}$

konstantna funkcija

$$\langle K, K(y,\varepsilon)\rangle = \langle c_y, K, \varepsilon\rangle$$



$\tau_{ekk} \subseteq \tau_{co}$



$$\overset{f}{\cancel{g}} \in \langle f, K, \varepsilon\rangle$$

$c \in K: \ \mathcal{U}_c := \{x \in K;\ d_Y(f(x), \overset{f}{\cancel{g}}(c)) < \frac{\varepsilon}{2}\}$ odp

$\Rightarrow$ Obstaja končno podpokritje $\mathcal{U}_{c_1}, \dots, \mathcal{U}_{c_n}$ za K.

$\overset{f}{\cancel{g}} \in$

$\langle \overline{\mathcal{U}_{c_1}} \cap K, K(\overset{f}{\cancel{g}}(c_1), \frac{\varepsilon}{2}) \rangle \cap \dots \cap \langle \overline{\mathcal{U}_{c_n}} \cap K, K(\overset{f}{\cancel{g}}(c_n), \frac{\varepsilon}{2}) \rangle$

$\subseteq \langle f, K, \varepsilon \rangle$

$(\mathcal{C}(X,Y), \tau_{co})$

$$i: Y \hookrightarrow \mathcal{C}(X,Y)$$
$$y \mapsto c_y$$

<u>i je vložitev</u>

$i^* \langle K, U \rangle = U$

$\langle K, U \rangle \cap i_*(Y) = i_*(U)$

Y lahko gledamo kot podprostor v $\mathcal{C}(X,Y)$.

Trditev: 1) $\mathcal{C}(X,Y)$ je Hausdorffov $\Leftrightarrow$ Y je Hausdorffov

2) $\mathcal{C}(X,Y)$ je regularen $\Leftrightarrow$ Y je regularen

Dokaz: 1) $(\Rightarrow)$ Velja zaradi dednosti.

$(\Leftarrow)$ $f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$, $f \neq g$

$\exists x: f(x) \neq g(x)$

$U, V \overset{odp}{\subseteq} Y: f(x) \in U, g(x) \in V, U \cap V = \emptyset$

$\underset{f}{\underset{\Downarrow}{\langle \{x\}, U \rangle}}, \quad \underset{g}{\underset{\Downarrow}{\langle \{x\}, V \rangle}}$

$\langle \{x\}, U \rangle \cap \langle \{x\}, V \rangle = \emptyset$

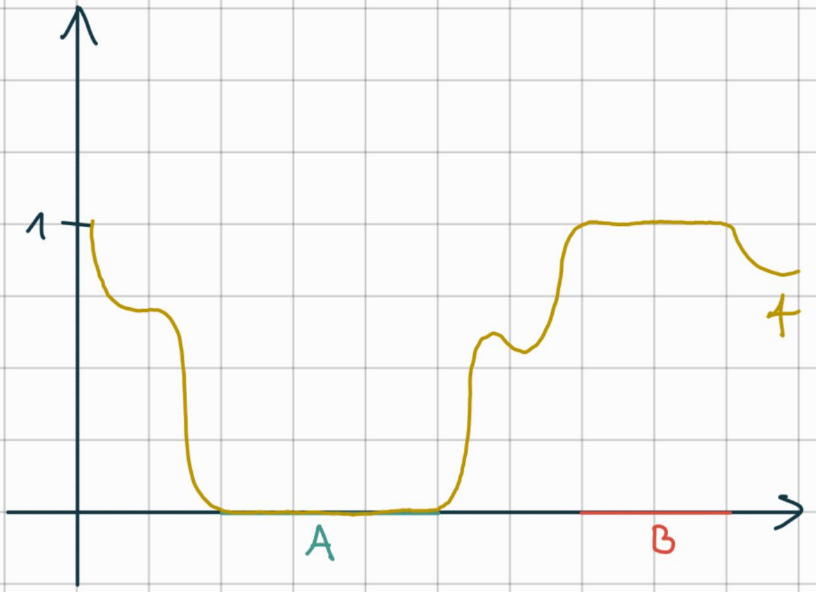
2) Podobno.

PRESLIKAVE NA NORMALNIH PROSTORIH

Kdaj obstajajo nekonstantne zvezne preslikave $f: X \to \overset{\mathbb{R}}{\overset{\shortparallel}{Y}}$?

Urisonova lema:

X je $T_4 \iff$ Za poljubni zaprti disjunktni podmnožici $A, B \subseteq X$ obstaja zvezna funkcija $f: X \to [0,1]$, da $f(A) = 0$, $f(B) = 1$



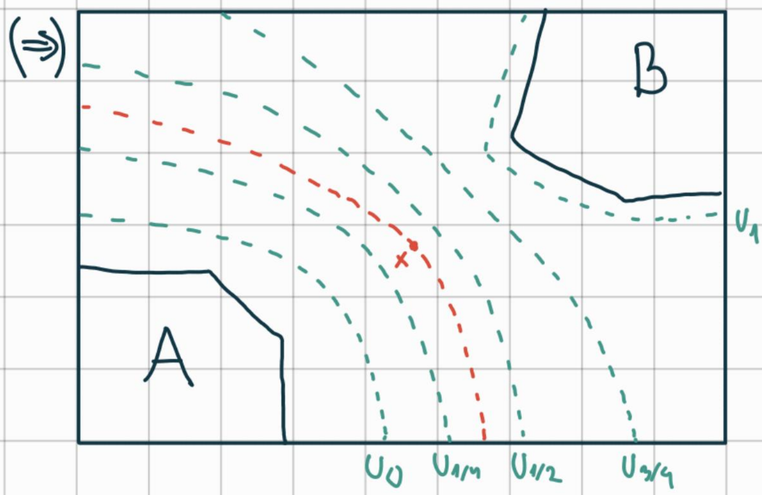
Dokaz: $(\Leftarrow)$ A, B disjunktni zaprti v X

$f: (X, A, B) \to ([0,1], 0, 1)$

$U = f^*([0, \tfrac{1}{2})) \supseteq A$
$V = f^*((\tfrac{1}{2}, 1]) \supseteq B$

$U \cap V = \emptyset$

$(\Rightarrow)$



$T_4 \Leftrightarrow A^{zap} \subseteq U^{odp} : \exists V : A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

$U_1 := X - B$

$A \in U_1 : \exists U_0 : A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$

$\exists U_{1/2} : \overline{U_0} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_1$

$\dots : \overline{U_0} \subseteq U_{1/4} \subseteq \overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4} \subseteq$

$\subseteq \overline{U_{3/4}} \subseteq U_1$

To ponavljamo ...

$\Rightarrow \{ U_r ;$ r je dvojiški ulomek $: r = \frac{k}{2^n} \}$

To so odprte podmnožice v X.

$r < s : \overline{U_r} \subseteq U_s$

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{r;\ x \notin U_r\} & ;\ x \notin B \\ 1 & ;\ x \in B \end{cases}$$

$f: X \to [0,1]$
$f(A) = 0$
$f(B) = 1$

f je zvezna

$x \in X,\quad f(x) \in (0,1)$

$\varepsilon > 0$

$f(x) - \varepsilon < r < f(x) < s < f(x) + \varepsilon$

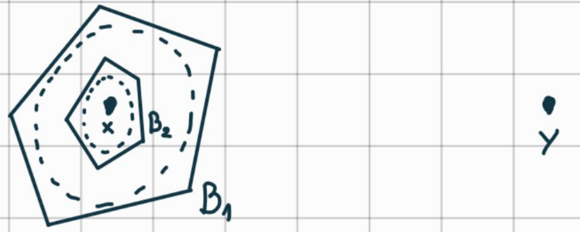
r, s dvojiška ulomka

$U_s - \overline{U_r}$ je neprazna odprta okolica x v X, ki se preslika za manj kot ε od $f(x)$.

Opomba: $(X, d) \supseteq A, B^{\text{zap, disj}}$

$$f(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

Cilj: normalen + 2-števen $\Rightarrow$ metrizabilen



$x \in \overline{B_2}, \quad y \in X - B_1$

$\Rightarrow \exists f : X \to [0,1]$
$f(\overline{B_2}) = 0, \quad f(X - B_1) = 1$

To lahko naredimo za poljubni bazični okolici $B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq B_1$.

V 2-števnem normalnem prostoru torej obstaja števen nabor takih funkcij $f_1, f_2, f_3, \dots$

$x \in X \mapsto (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$d((x_i), (y_i)) := \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$

Pogoj, da je ta metrika definirana je, da se omejimo na zaporedja, za katera je $\sum x_i^2 < \infty$ (kvadratno sumabilna zaporedja; oznaka: ℓ^2).

ℓ^2 je metrični prostor s kvadratno sumabilnimi zaporedij in z evklidsko metriko.

$f : X \to \ell^2$
$x \mapsto \left(f_1(x), \frac{f_2(x)}{2}, \frac{f_3(x)}{3}, \dots\right)$

f je vložitev (homeomorfizem na sliko)

Injektivnost

$x \neq y$
$\Rightarrow \exists i : f_i(x) \neq f_i(y)$
$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Zveznost funkcije

Topologija na ℓ^2 je produktna.

Komponente so zvezne, torej je funkcija zvezna.

Zveznost inverza

Uporabimo lastnost dveh okolic...

□

"Dokazali" smo torej:

Urisonov metrizacijski izrek:

Če je X normalen in 2-števen, potem je X metrizabilen.

Posledica: V 2-štetnih prostorih je metrizabilnost ekvivalentna regularnosti.

Nagata-Smirov izrek:

(Karakterizira metrizabilnost za poljubne prostore.)

$$X^{metr} \supseteq A, B^{zap,\ disj}$$

$$\begin{tikzcd}
f : & A \arrow[d] & \sqcup \arrow[dd, hook] & B \arrow[d] & \to & \mathbb{R} \\
 & 0 & & 1 & & \\
 & & X \arrow[uurrr, dashed, "F"'] & & &
\end{tikzcd}$$

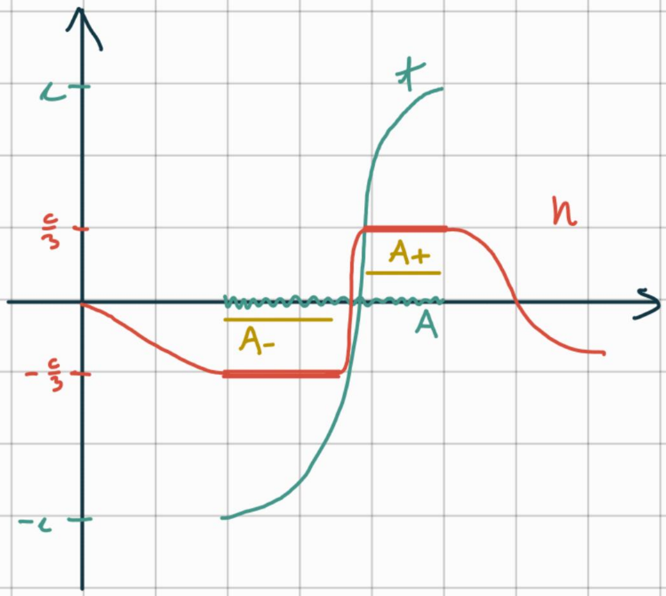
Lema: $A^{zap} \subseteq X^{norm}$

$f : A \to [-c, c]$

$\Rightarrow \exists h : X \to [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$:

$$|h(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3} c \quad \forall x \in A$$

Dokaz:



$$A_+ := \{x \in A \,;\, f(x) \geq \frac{c}{3}\}$$
$$A_- := \{x \in A \,;\, f(x) \leq -\frac{c}{3}\}$$

A_+, A_- disjunktni zaprti v X.

Definiramo Urisonovo funkcijo:

$$h : (X, A_-, A_+) \to ([-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}], -\frac{c}{3}, \frac{c}{3})$$

Titzejev izrek:

$$A^{zap} \subseteq X^{norm}$$

$$f^{zv} : A \to J^{int} \subseteq \mathbb{R}$$

$\exists F : X \to J$ razširitev f $(F|_A = f)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & J \\ X \arrow[ur, dashed, "\exists F"'] & \end{tikzcd}$$

$$\exists F : F \circ i = f$$

Dokaz: $f^{zv}: A^{zap} \to [-1,1]$ (BŠS)

lema: $\exists h_1 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$,
$|f - h_1| \leq \frac{2}{3} \quad \forall x \in A$

$$f - h_1 : A \longrightarrow [-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}]$$

lema: $\exists h_2 : X \to [-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}]$,
$|f - h_1 - h_2| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \quad \forall x \in A$

$$f - h_1 - h_2 : A \longrightarrow [-\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3}]$$

Nadaljujemo in dobimo funkcije $h_1, h_2, h_3, \dots$

$$F := h_1 + h_2 + h_3 + \dots$$

$$F : X \longrightarrow [-1, 1]$$

$$F|_A = f$$

$f : X \to \mathbb{R}$

nosilec $f := \overline{[f \neq 0]} = \overline{f^*(\mathbb{R} - \{0\})}$

$\{U_1, \dots, U_n\}$ odprto pokritje za X

Razčlenitev enote, podrejena pokritju $\{U_1, \dots, U_n\}$, je nabor $\rho_1, \dots, \rho_n : X \to [0,1]$, za katere velja:

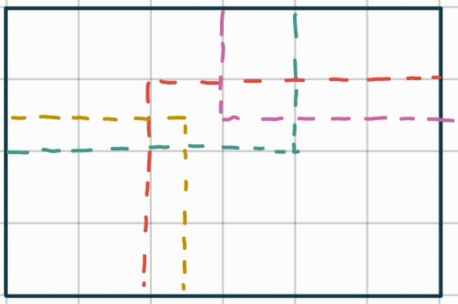
1) $\rho_1 + \dots + \rho_n = 1$

2) $\overset{\text{supp}(\rho_i)}{\overset{\|}{\text{nosilec}(\rho_i)}} \subseteq U_i$

Izrek: X^{norm}, $\{U_1, \dots, U_n\}$ odprto pokritje

$\Rightarrow \exists$ razčlenitev enote, podrejena temu pokritju

Dokaz:



Skrčimo do pokritja $\{V_1, \dots, V_n\}$, $\overline{V_i} \subseteq U_i$:

$A_1^{\text{zap}} := X - U_2 - \dots - U_n$

$\Rightarrow \exists V_1 : A_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$

$\{V_1, U_2, \dots, U_n\}$ je odprto pokritje.

To ponavljamo za vse U_i.

To naredimo še enkrat in dobimo odprto pokritje $\{W_1, \dots, W_n\}$, $W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$.

Definiramo Urisonovo funkcijo:

$\rho_i : X \to [0,1]$

$\rho_i(\overline{W_i}) = 1$
$\rho_i(X - V_i) = 0$

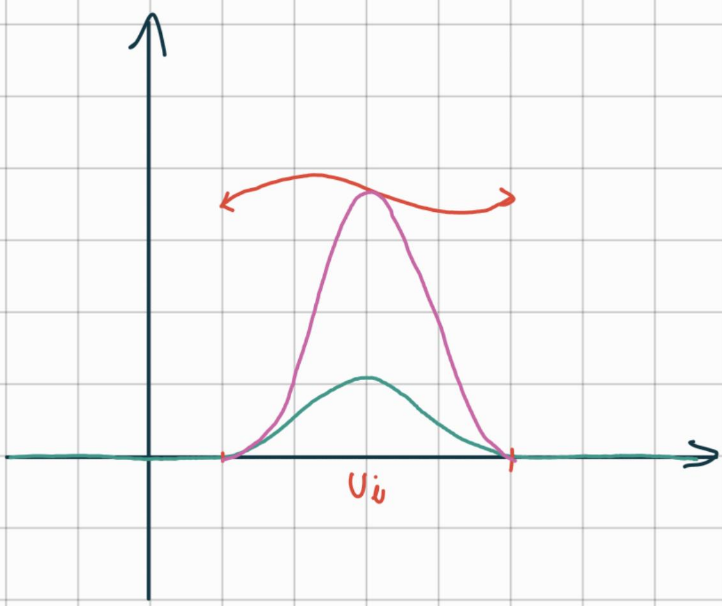
$\rho = \rho_1 + \ldots + \rho_n$ je povsod strogo večja od 0.

$\frac{\rho_1}{\rho}, \frac{\rho_2}{\rho}, \ldots, \frac{\rho_n}{\rho}$ se seštejejo v 1, so zvezne, so še vedno nosilci, vsebovani v U_i.

Torej so razčlenitev enote.

$f_i : U_i \to \mathbb{R}$

$$f_i \cdot \rho_i(x) := \begin{cases} f_i(x) \cdot \rho_i(x) & ; x \in U_i \\ 0 & ; x \in X - \text{nosilec}(\rho_i) \end{cases}$$



$f_i : U_i \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$

Razčlenitev enote $\rho_1, \ldots, \rho_n$ podrejena $\{U_i\}$

$\rightsquigarrow f := f_1 \rho_1 + \ldots + f_n \rho_n \; : X \to \mathbb{R}$

Izrek: Naj bo X kompakten, T_2. Naj ima vsaka točka okolico, ki je homeomorfna $\mathbb{R}^n$ (n-razsežna topološka mnogoterost). Potem X lahko vložimo v nek evklidski prostor.

Dokaz: Obstaja pokritje $U_1, \dots, U_m$.

$$U_i \underset{f_i}{\xrightarrow{\approx}} \mathbb{R}^n$$

Izberimo razčlenitev enote $\rho_1, \dots, \rho_m$.

$$f := (\underbrace{\rho_1, \dots, \rho_m}_{\mathbb{R}}, \underbrace{f_1 \rho_1}_{\mathbb{R}^n}, \dots, \underbrace{f_m \rho_m}_{\mathbb{R}^n}) : X \to \mathbb{R}^{m(m+1)}$$

f je zvezna, ker so vse koordinate zvezne.

$f(x) = f(y)$, $\rho_i(x) = \rho_i(y) > 0$

$f_i(x) = f_i(y) \Rightarrow x = y$

f je injektivna.

f je vložitev, ker slika iz kompakta v T_2.

STONE-WEIERSTRASSOV IZREK

Weierstrassov izrek:

Polinomi so gosti v $\mathcal{C}([a,b])$.

Torej lahko vsako zvezno funkcijo $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ enakomerno aproksimiramo s polinomi.

Dokaz: Bernsteinovi polinomi:

$$1=((1-x)+x)^n=$$

$$=(1-x)^n+\binom{n}{1}(1-x)^{n-1}x+\dots+\underbrace{\binom{n}{i}(1-x)^{n-i}x^i}+\dots+x^n$$

Bernsteinov (n,i) polinom:

$$B_{n,i}(x)=\binom{n}{i}(1-x)^{n-i}x^i$$

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ zvezna

$$f_n(x):=\sum_{i=0}^{n}f\left(\tfrac{i}{n}\right)B_{n,i}(x)$$

$$f_n(x)\longrightarrow f(x)$$

$$M:=\max\{|f(x)|\,;\,x\in[0,1]\}$$

$$f_n(x)-f(x)=\sum_i f\left(\tfrac{i}{n}\right)\cdot B_{n,i}(x)-f(x)\cdot\sum_i B_{n,i}(x)=$$

$$=\sum_i\left(f\left(\tfrac{i}{n}\right)-f(x)\right)\cdot B_{n,i}(x)$$

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\sum_i\left|f\left(\tfrac{i}{n}\right)-f(x)\right|\cdot B_{n,i}(x)=*$$

$$\varepsilon>0$$

$\rightsquigarrow$ obstaja $\delta>0$: $|x-x'|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}$

$$*=\underbrace{\sum_{i,\,|x-\frac{i}{n}|<\delta}\overbrace{\left|f\left(\tfrac{i}{n}\right)-f(x)\right|}^{<\frac{\varepsilon}{2}}\cdot B_{n,i}(x)}_{<\frac{\varepsilon}{2}}+\sum_{i,\,|x-\frac{i}{n}|\geq\delta}\left|f\left(\tfrac{i}{n}\right)-f(x)\right|\cdot B_{n,i}(x)$$

$$\sum_{i,\,|\frac{i}{n}-x|\geq\delta}\overbrace{\left|f\left(\tfrac{i}{n}\right)-f(x)\right|}^{\leq 2M}B_{n,i}(x)\leq 2M\sum_{i,\,|\frac{i}{n}-x|\geq\delta}B_{n,i}(x)\leq *$$

Velja: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(x-\frac{i}{n}\right)^2\cdot B_{n,i}(x)=\frac{x(1-x)}{n}$

$$* \leq 2M \sum_i \frac{(\frac{i}{n}-x)^2}{\delta^2} \cdot B_{n,i}(x) = \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \leq$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2 \cdot n} \overset{\text{izberemo } n}{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

$\mathcal{C}(X, A)$ ... algebra

Najmanjša unitalna podalgebra $\mathcal{C}(X,A)$, ki vsebuje $f_1, f_2, f_3, \dots$, je sestavljena iz $p(f_{i_1}, \dots, f_{i_n})$, kjer je p polinom n spremenljivk in f_{i_k} so iz nabora.

Stone-Weierstrassov izrek:

Če je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X)$, X normalen, unitalna podalgebra, ki loči točke, potem je $\mathcal{C}(X) = \overline{\mathcal{A}}$ v CO topologiji.

loči točke: $\forall x, x' \in X : \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(x')$

Če je v $\mathcal{A}$ vsaj ena injektivna funkcija, potem $\mathcal{A}$ loči točke.

$f(x) = x$ ... dobimo polinome (Weierstrassov izrek)

$\sin x, \cos x$ ... dobimo Fourierjeve vrste

Dokaz: $k(t) = \sqrt{t}$ je enakomerna limita polinomov na $[0,1]$ po Weierstrassovem izreku.

$\mathcal{A}$ podalgebra $\Rightarrow$ $\overline{\mathcal{A}}$ podalgebra

$f \in \mathcal{A}, f \geq 0 : \sqrt{f} \in \overline{\mathcal{A}}$

$f \in \mathcal{A} : |f| = \sqrt{f^2} \in \overline{\mathcal{A}}$

$f, g \in \mathcal{A}: \max\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2} \in \overline{\mathcal{A}}$

$\min\{f, g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2} \in \overline{\mathcal{A}}$

$\max\{f_1, \ldots, f_n\}, \min\{f_1, \ldots, f_n\} \in \overline{\mathcal{A}}$

$x \neq x'$

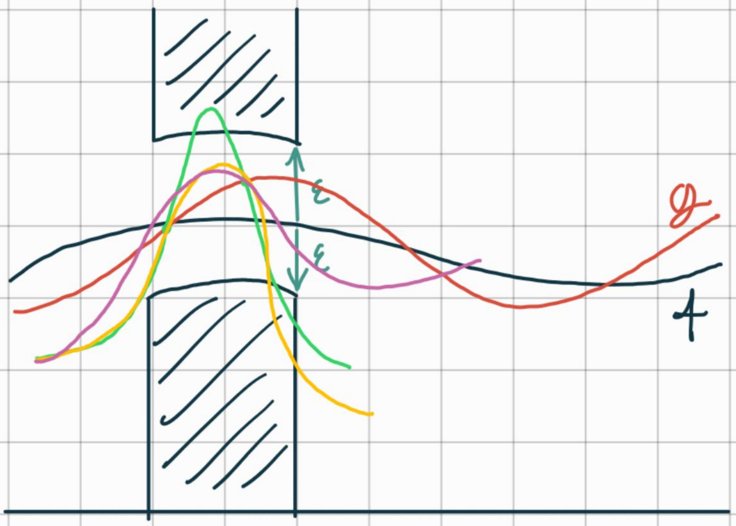
$\exists g \in \mathcal{A}: g(x) \neq g(x')$

$\Rightarrow \forall a, b: \exists h \in \mathcal{A}: h(x) = a, h(x') = b$

$h(t) := a + \frac{b-a}{g(x')-g(x)} \cdot (g(t) - g(x))$

$f \in \mathcal{C}(X), \langle f, K, \varepsilon \rangle$

Iščemo $g \in \mathcal{A} \cap \langle f, K, \varepsilon \rangle$.



$\forall u, v \in K$

$h_{u,v}: X \to \mathbb{R}$

$h_{u,v}(u) = f(u)$
$h_{u,v}(v) = f(v)$

Fiksiramo u.

$U_v := \{x \in K \,;\, h_{u,v}(x) < f(x) + \varepsilon\}$

U_v je okolica v.

$\{U_v\}$ je odprto pokritje K.

$\rightsquigarrow U_{v_1}, \dots, U_{v_n}$

$h_u := \min\{h_{u,v_1}, \dots, h_{u,v_n}\} \in \overline{\mathcal{A}}$

$\forall u \in K$

$V_u := \{x \in K \,;\, h_u(x) > f(x) - \varepsilon\} \ni u$

$\{V_u\}$ je odprto pokritje K.

$\rightsquigarrow V_{u_1}, \dots, V_{u_m}$

$h := \max\{h_{u_1}, \dots, h_{u_m}\} \in \overline{\mathcal{A}}$