TOPOLOŠKE LASTNOSTI

Primer: Zaporedja v prostorih s Hausdorffovo lastnostjo imajo največ eno limito.

Primer: Vsako omejeno zaporedje v kompaktnem prostoru ima konvergentno podzaporedje (Bolzano-Weierstrassov izrek).

Primer: Če v katerikoli povezanem prostoru funkcija, ki slika v $\mathbb{R}$, zavzame neko pozitivno in neko negativno vrednost, ima f nekje ničlo (Bolzanov izrek o vmesni vrednosti).

Primer: Presek padajočega zaporedja zaprtih podmnožic v kompaktu je neprazen (Cantorjev izrek o sendviču).

Primer: Metrični prostor, ki je števen in brez izoliranih točk, ne more biti poln (Baireov izrek).

Vrste topoloških prostorov:

- Ločljivost
- Povezanost
- Kompaktnost

LOČLJIVOST

$\mathcal{T}$ loči A in B, če obstajata $U, V \in \mathcal{T}$, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, da $U \cap B = \emptyset$ in $V \cap A = \emptyset$.

$\mathcal{T}$ ostro loči A in B, če obstajata $U, V \in \mathcal{T}$, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, da $U \cap V = \emptyset$.

Primer: $\mathcal{T}_{tri}$ ne loči disjunktnih množic.
$\mathcal{T}_{dis}$ ostro loči poljubni disjunktni množici.

$\overline{A}$ = točke, ki jih $\mathcal{T}$ ne loči od A

$(X, \mathcal{T})$ ima Hausdorffovo lastnost, če topologija $\mathcal{T}$ ostro loči (različne) točke.

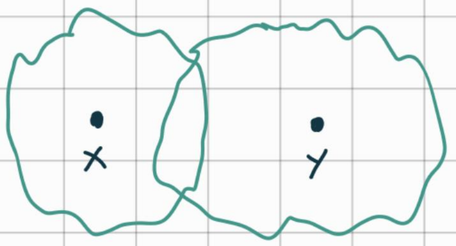
$\forall x \neq y \in X : \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset$

Primer: Vsi metrični prostori so Hausdorffovi:

$d(x,y) > 0$
$K(x, \frac{d(x,y)}{2})$
$K(y, \frac{d(x,y)}{2})$

ostro ločita x in y

Primer: $\mathcal{T}_{kk}$ na neskončni X ni Hausdorffova:



Trditev: Naslednje izjave so ekvivalentne:

1) Prostor X je Hausdorffov.

2) Če sta $x \neq y \in X$, potem obstaja odprta okolica $U \ni x$, da $y \notin \overline{U}$:

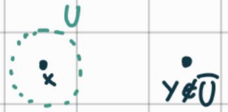
$$\bigcap_{U \ni x} \overline{U} = \{x\}$$

3) Diagonala $\Delta_X := \{(x,x) \in X \times X\}$ je zaprta v $X \times X$.

Dokaz: $(1) \Rightarrow (2)$:

$\rightsquigarrow y \notin \overline{U}$

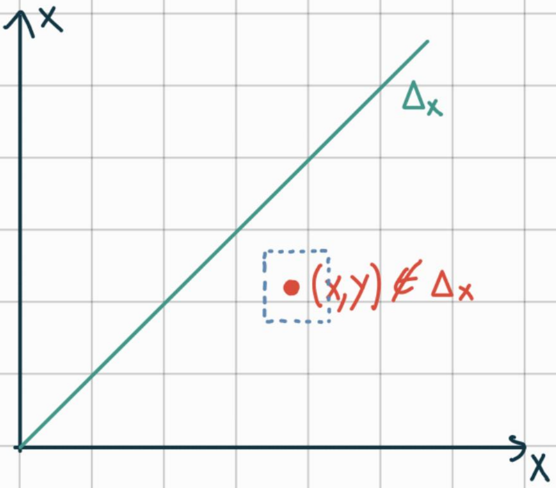
$(2) \Rightarrow (1)$:



$\rightsquigarrow \overline{U}^c$ je okolica od y

$\rightsquigarrow U, U^c$ sta disjunktni

$(1) \Rightarrow (3)$:



$(x,y) \notin \Delta_X$

$\rightsquigarrow x \neq y$

$\rightsquigarrow \exists\, U \ni x,\ V \ni y : U \cap V = \emptyset$

$\rightsquigarrow (x,y) \in U \times V$ ne seka Δ_X

$(3) \Rightarrow (1)$:

$x \neq y$

$\rightsquigarrow (x,y) \notin \Delta_X$

$\rightsquigarrow$ Obstaja bazična škatlasta okolica $(x,y) \in U \times V$, ki ne seka Δ_X

$\rightsquigarrow x \in U,\ y \in V,\quad U \cap V = \emptyset$

Izrek o lepoti Hausdorffovih prostorov:

Naj bo Y Hausdorffov prostor. Potem velja:

1) Končne podmnožice Y so zaprte (ekvivalentno: enojčki so zaprti).

2) Zaporedje v Y ima največ eno limito.

3) Naj bosta $f, g : X \to Y$ zvezni. Potem je $\{x \in X ;\ f(x) = g(x)\}$ zaprta v X.

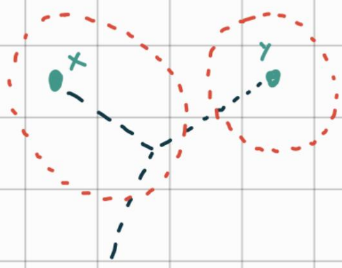
4) Naj bosta $f, g : X \to Y$ zvezni in A gosta v X. Če je $f|_A = g|_A$, potem $f = g$.

5) Graf zvezne preslikave $f : X \to Y$ je zaprta podmnožica v $X \times Y$.

Dokaz: 1) $\forall y \neq x : \exists U \ni y : x \notin U$

Očitno sledi iz Hausdorffove lastnosti.

2)



Ker $\mathcal{T}$ ostro loči x in y, ne moremo imeti hkrati dveh limit zaporedja.

3) $X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y$ je zvezna

zaprta po trditvi

$\{x \in X ; f(x) = g(x)\} = (f, g)^*(\Delta_X)$
je zvezna praslika zaprte množice torej je zaprta

4) $f|_A = g|_A \Rightarrow f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$

$\overline{A} = X \Rightarrow f = g$

5) $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y ; f(x) = y\}$
je množica ujemanja za funkciji

$X \times Y \xrightarrow{f \circ pr_X,\ pr_Y} Y$

$(X, \mathcal{T})$ je **Fréchetov**, če topologija $\mathcal{T}$ loči (različne) točke.

Primer: Hausdorffov $\Rightarrow$ Fréchetov

Primer: Trivialen prostor ni Fréchetov.

Trditev: X je Fréchetov $\Leftrightarrow$ Enojčki so zaprti $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_{kk}$

Dokaz: $(\Rightarrow)$

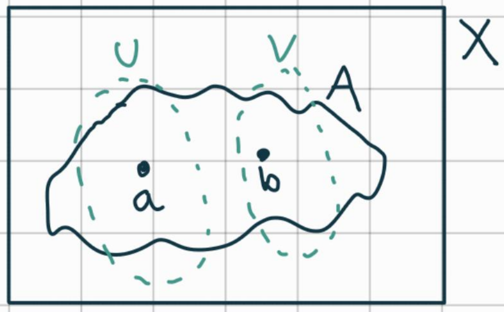
$(\Leftarrow)$

$$x \in X \setminus \{y\} \qquad y \in X \setminus \{x\}$$

Trditev: Hausdorffova in Fréchetova lastnost sta dedni in multiplikativni.

dedna: X ima lastnost $\Rightarrow$ $A \subseteq X$ ima lastnost
multiplikativna: X, Y imata lastnost $\Rightarrow$ $X \times Y$ ima lastnost

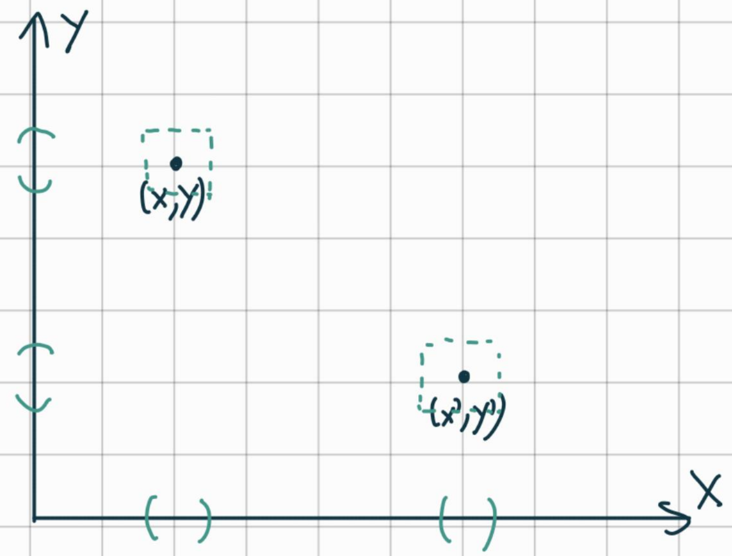
Dokaz: Hausdorffova je dedna



$\exists\, U, V$ odprti v X,
$U \ni a$, $V \ni b$, $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow A \cap U$, $A \cap V$ ostro ločita a in b v A

Hausdorffova je multiplikativna



$(x,y) \neq (x',y')$

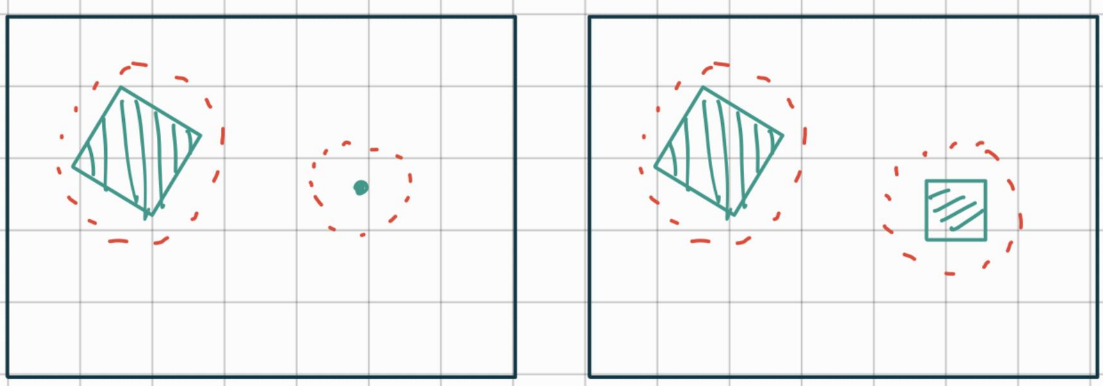
Če je $x \neq x'$, ju ostro loči U, U' odp v X.
Potem $U \times Y$ in $U' \times Y$ ostro loči (x,y) in (x',y').

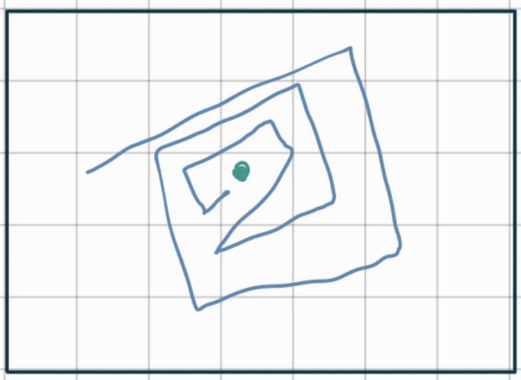
Če je $y \neq y'$, podobno.

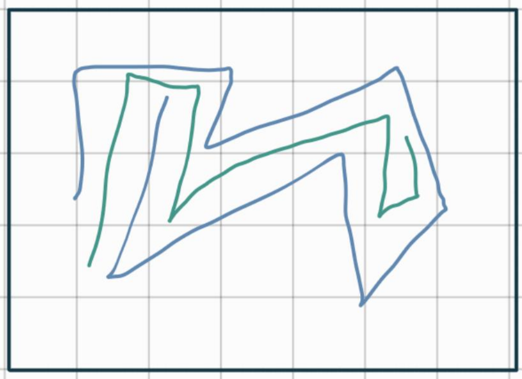
Frechetova enako, samo spustimo ostro.

X je regularen, če je Fréchetov in topologija ostro loči točke od zaprtih množic.

X je normalen, če je Fréchetov in topologija ostro loči (disjunktne) zaprte množice.







normalnost $\Rightarrow$ regularnost $\Rightarrow$ Hausdorff $\Rightarrow$ Fréchet

Implikacije veljajo samo v eno smer.

Primer: Naj bo $\mathcal{T}$ Hausdorffova. Če $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$, potem je tudi $\mathcal{T}'$ Hausdorffova.

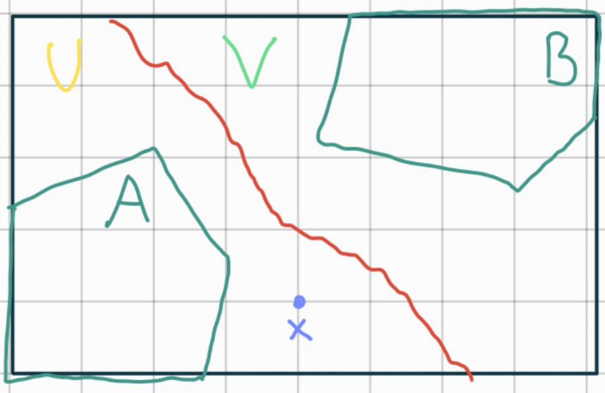
Primer: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{evkl})$

$\mathcal{T}'$ najmanjša topologija, ki vsebuje evklidsko in je $\mathbb{Q} \in \mathcal{T}'$.

$\mathcal{T}'$ je Hausdorffova, vendar točke 0 ne more ostro ločiti od iracionalnih števil $\mathbb{Q}^c$, ker je $\mathbb{R}$ edina odprta množica, ki vsebuje $\mathbb{Q}^c$. Torej $\mathcal{T}'$ ni regularna.

Trditev: Vsak metrični prostor je normalen.

Dokaz: Frechetovo smo že dokazali.



$U := \{x \in X \,;\, d(x,A) < d(x,B)\}$
$V := \{x \in X \,;\, d(x,A) > d(x,B)\}$

$d(x, A) := \inf\{d(x,a) ; a \in A\}$
$d(x, B) := \inf\{d(x,b) ; b \in B\}$

$A \subseteq U, \; B \subseteq V, \; U \cap V = \emptyset$

U je odprta

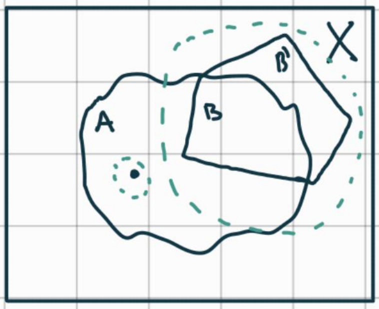
$x \in U : \; d(x,A) < d(x,B)$

$r := \frac{d(x,B) - d(x,A)}{2} : \; x \in K(x,r) \subseteq U$

Trditev: 1) Če je X regularen in $A \subseteq X$, potem je A regularen (regularnost je dedna).

2) Če je X normalen in $A^{zap} \subseteq X$, potem je A normalen (normalnost je dedna na zaprte).

Dokaz: 1)



$\exists B'^{\,zap} \subseteq X : \; B = A \cap B'$

$U, V^{\,odp} \subseteq X : \; a \in U, \; B' \subseteq V$

$\Rightarrow A \cap U, A \cap V$ ostro ločita a in B

2)

Problem je, če se podaljški B in C v X vedno sekajo.

Če pa je A zaprt, sta B in C že sama zaprta v X, zato ju ne rabimo podaljševati in ju lahko že takoj ločimo.

Aksiom T_0: $\forall x \neq y \in X : \exists U \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \notin U$

(Kolmogorov)

Aksiom T_1: $\forall x \neq y \in X : \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V \wedge x \notin V \wedge y \notin U$

(Fréchet)

Aksiom T_2: $\forall x \neq y \in X : \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset$

(Hausdorff)

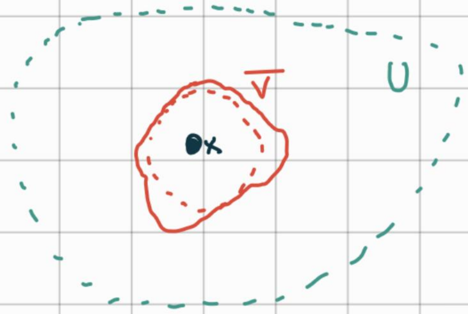
Aksiom T_3: $\forall x \in X, A^{zap} \subseteq X, x \notin A : \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge A \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset$

Aksiom T_4: $\forall A^{zap}, B^{zap} \subseteq X, A \cap B = \emptyset : \exists U, V \in \mathcal{T} : A \subseteq U \wedge B \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset$

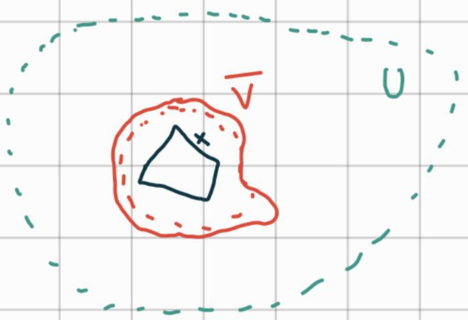
Opomba: regularnost $= T_3 + T_1$
normalnost $= T_4 + T_1$

Opomba: $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

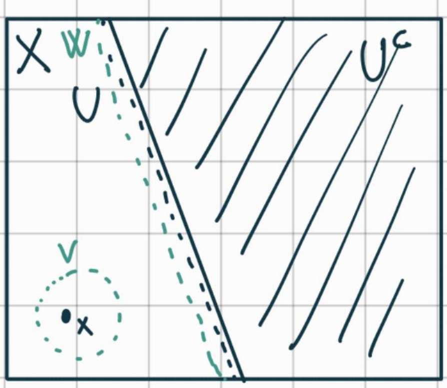
Trditev: Prostor $(X, \mathcal{T})$ je $T_3 \iff$
$\iff \forall x \in U \in \mathcal{T} : \exists V \in \mathcal{T} : x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$



Prostor $(X, \mathcal{T})$ je $T_4 \iff$
$\iff \forall A^{zap} \subseteq U \in \mathcal{T} : \exists V \in \mathcal{T} : A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$



Dokaz: $(\Rightarrow)$ Uporabimo T_3 na paru x, U^c.



$\exists V : x \in V$
$\exists W : U^c \subseteq W$

$V \cap W = \emptyset$

$\Rightarrow \overline{V}$ ne seka U^c

$\Rightarrow x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

$(\Leftarrow)$ x, $A^{zap} \not\ni x$

$x \in A^c$, $\exists V: x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq A^c$

$W := \overline{V}^c$

$\Rightarrow W^{odp} \supseteq A$, $V \cap W = \emptyset$

Za drugi del podobno.

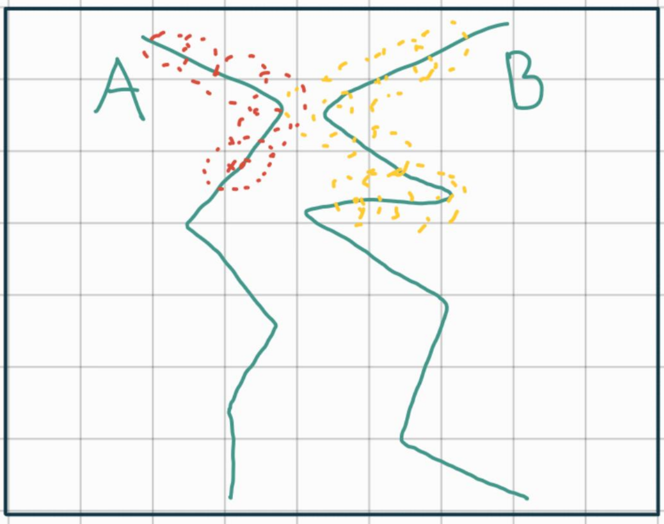
Trditev: Lastnost T_3 je multiplikativna.

Posledica: Regularnost je multiplikativna.

Izrek Tihonovega:

$(X, \mathcal{T})$ je regularen in 2-števen
$\Rightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ je normalen

Dokaz:



$\forall x \in A: \exists U \in \cancel{\mathcal{T}}: x \in U \wedge \overline{U}$ ne seka B
$\in$ števne baze $\mathcal{B}$ za $\mathcal{T}$

$\forall y \in B: \exists V \in \mathcal{B}: y \in V \wedge \overline{V}$ ne seka A

Zaenkrat se $\bigcup U$ in $\bigcup V$ še lahko sekata (samo ločimo, ne pa strogo ločimo). To bomo popravili s števnostjo ...

$\Rightarrow$ $U_1, U_2, \dots$ odprto pokritje A, $\overline{U_i}$ ne seka B
$V_1, V_2, \dots$ odprto pokritje B, $\overline{V_i}$ ne seka A

$$U_1' := U_1 - \overline{V_1}$$
$$U_2' := U_2 - \overline{V_1} - \overline{V_2}$$
$$U_3' := U_3 - \overline{V_1} - \overline{V_2} - \overline{V_3}$$
$$\vdots$$

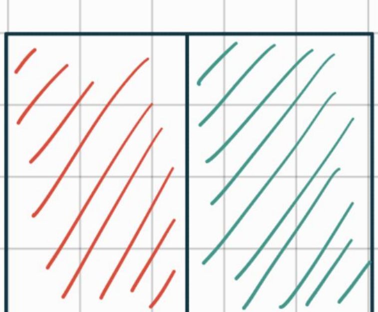
$$V_1' := V_1 - \overline{U_1}$$
$$V_2' := V_2 - \overline{U_1} - \overline{U_2}$$
$$V_3' := V_3 - \overline{U_1} - \overline{U_2} - \overline{U_3}$$
$$\vdots$$

U_i' so še vedno odprte in pokrijejo A
V_i' so še vedno odprte in pokrijejo B

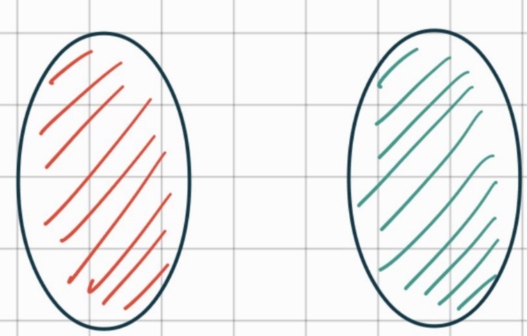
$$U := \bigcup U_i' \supseteq A$$
$$V := \bigcup V_i' \supseteq B$$

$\Rightarrow U \cap V = \emptyset$

POVEZANOST



imata skupno mejo



nimata skupne meje

Definicija: Prostor $(X,\mathcal{T})$ je nepovezan, če obstajata $A,B \in \mathcal{T}$, A,B neprazni, disjunktni, da je $X = A \cup B$.

$$X = A + B \quad \text{oz.} \quad X = A \amalg B$$

Definicija: Prostor $(X,\mathcal{T})$ je povezan, če ni nepovezan.

Trditev: Ekvivalentne so naslednje trditve:

1) $(X,\mathcal{T})$ je nepovezan

2) Obstajata neprazni disjunktni zaprti podmnožici A, B, da je $X = A \cup B$ $(X = A + B)$.

3) Obstaja prava neprazna odprto-zaprta podmnožica $A \subset X$.

   (V vsakem topološkem prostoru sta $\emptyset$ in X vedno odprto-zaprti. Če drugih ni, je prostor povezan.)

4) Obstaja zvezna surjekcija $f: X \to \{0,1\}$ z diskretno topologijo.

Opomba: X je povezan $\Leftrightarrow$ Ne obstaja netrivialni razcep na dve odprti množici $\Leftrightarrow$ Ne obstaja netrivialni razcep na dve zaprti množici $\Leftrightarrow$ Ne obstaja netrivialna odprto-zaprta množica $\Leftrightarrow$ Ne obstaja zvezna surjekcija $X \to \{0,1\}$

Izrek: $X \subseteq \mathbb{R}$ je povezana $\Leftrightarrow$ X je interval

Dokaz: Značilnost intervala:

$a,b \in I,\ a<b.\ \forall a \le c \le b.\ c \in I$

($\Rightarrow$) Recimo, da X ni interval. Obstajajo $a<c<b$, da $a,b \in X$, $c \notin X$.

$$X = X \cap (-\infty, c) \amalg X \cap (c, \infty)$$

je netrivialen razcep na dve odprti množici

($\Leftarrow$) Naj bo X interval, ki ima netrivialen razcep na dve odprto-zaprti podmnožici.

$$X = \underset{\substack{\ni \\ a}}{U} \underset{<}{\amalg} \underset{\substack{\ni \\ b}}{V}$$

$$c := \sup\{x \in \mathbb{R};\ [a,x) \subseteq U\}$$

$$c \le b \Rightarrow c \in X$$

U zaprta $\Rightarrow c \in U$
U odprta $\Rightarrow \exists (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq U$

(definicija supremuma)

Izrek: 1) $f: X \to Y$ zvezna in X povezan
$\Rightarrow f_*(X)$ povezan

(povezanost je topološka lastnost)

2) $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ povezane podmnožice X in $\bigcap A_\lambda \neq \emptyset$
$\Rightarrow \bigcup A_\lambda$ je povezana

3) Produkt povezanih prostorov je povezan.

4) Če za poljubne $a, b \in X$ obstaja pot od a do b ($\gamma: [0,1] \to X$ zvezna, $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$), je X povezan.

(Ni pa ekvivalence.)

5) $\overset{\text{povezana}}{A} \subseteq X$ in $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$
$\Rightarrow B$ povezana

Dokaz: 1) Recimo, da $Y = U + V$ netrivialen razcep na odprti množici. Potem je $f^*(U) + f^*(V) = X$ netrivialen razcep.

$\twoheadrightarrow$ surjekcija
$\rightarrowtail$ injekcija

Alternativno:

$X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y \overset{s}{\twoheadrightarrow} \{0,1\}$

2) $\bigcap A_\lambda \ni a$

$s^{zv}: \bigcup A_\lambda \to \{0,1\}$

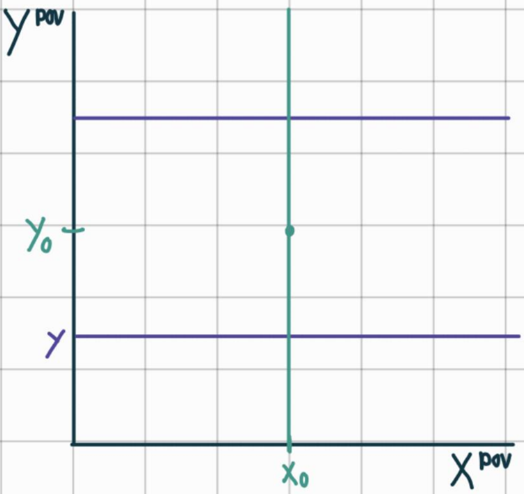
$s(a)$ je ali 0 ali 1 (recimo 0)

$\Rightarrow \forall \lambda: s(A_\lambda) = 0$

$\Rightarrow s(\bigcup A_\lambda) = 0$

$\Rightarrow s$ ni surjektivna

3)



$A_y := \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y\}$
povezana in vsebuje (x_0, y_0)

$X \times Y = \bigcup A_y$

Uporabimo prejšnjo točko.

4) X ni povezan

$\Rightarrow \exists f^{\text{zvezna}} : X \to \{0,1\}$

$\Rightarrow \exists a,b \in X : s(a) = 0,\ s(b) = 1$

$\Rightarrow \exists \gamma : [0,1] \to X : \gamma(0) = a,\ \gamma(1) = b$

$[0,1] \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{s} \{0,1\}$

$\gamma \circ s$ je zvezna surjekcija $[0,1] \to \{0,1\}$

$\times$

5) $B = U^{odp} + V^{odp}$ neprazni

$$A = A \cap U + A \cap V$$

$A \cap U$ odprta v A

$A \cap V$ odprta v A

Neprazni sta, ker je $B \subseteq \overline{A}$.

Alternativno:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\text{zvezna}"] & \{0,1\} \\ A \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

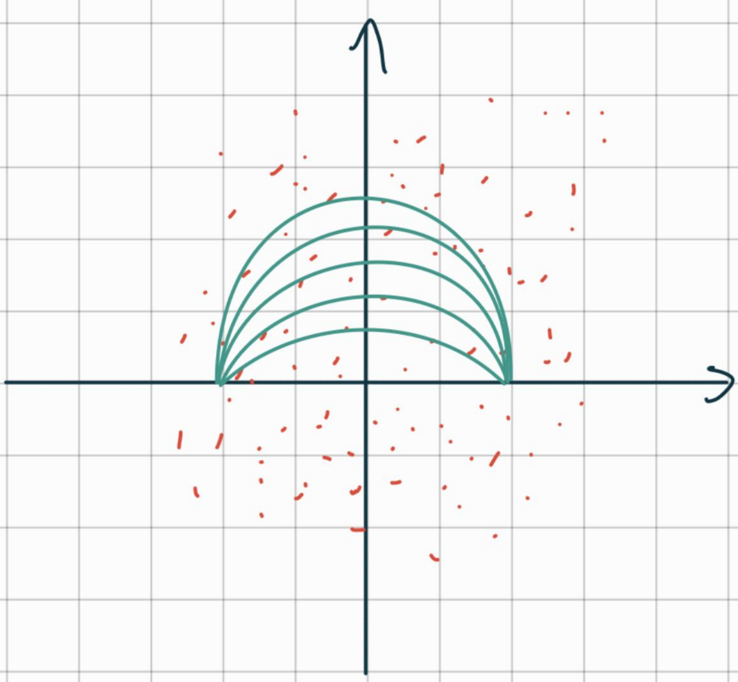
Primer: Vsaka konveksna podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je povezana.

Primer: Vsaka zvezdasta podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je povezana.

Primer: Komplement končne množice v $\mathbb{R}^{n>1}$ je povezan.

Trditev: Komplement števne množice v $\mathbb{R}^{n>1}$ je povezan.

Dokaz:



$Q^{\text{števna}} \subseteq \mathbb{R}^n$
$a, b \in \mathbb{R}^n \setminus Q$

Le števno lokov bo sekalo Q.

Posledica: Za $n > 1$ velja $\mathbb{R} \not\approx \mathbb{R}^n$.

Dokaz: Recimo, da obstaja $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n$.

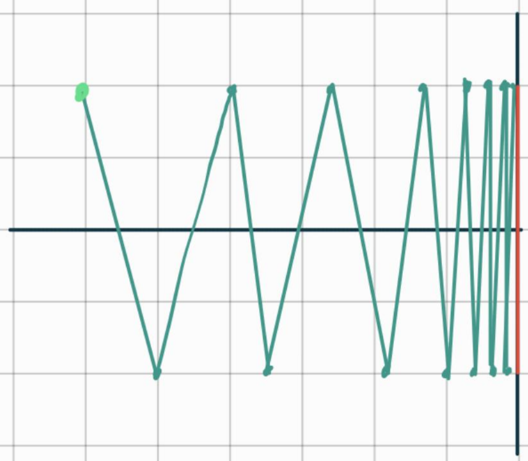
$$\rightsquigarrow f : \underbrace{\mathbb{R}\setminus\{0\}}_{\text{nepovezan}} \xrightarrow{\approx} \underbrace{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}_{\text{povezan}}$$

Izrek o vmesni vrednosti:

$f^{\text{zv}} : X^{\text{pov}} \to \mathbb{R}$
$\Rightarrow f_*(X)$ interval

Posebej, če $f_*(X)$ zavzame pozitivne in negativne vrednosti, potem ima f ničlo.

Primer:



$f : [-1, 0) \to \mathbb{R}^2$

$L := f_*([-1,0))$ povezana

$\Rightarrow \overline{L} = L \cup \{0\} \times [-1, 1]$ povezana

Vendar ne obstaja pot med $(-1,1) \in L$ in katerokoli točko na $\{0\} \times [-1,1]$.

Privzemimo, da obstaja $\gamma^{zv}: [0,1] \to \overline{L}$, $\gamma(0) = (-1,1)$, $\gamma(1) = (0,0)$.

$\gamma_1^*(0) \subseteq [0,1)$ ima minimum m

$[0,1] \to \overline{L}$
$[0,m) \to L$

γ ni zvezna v m

Na vsaki okolici $(m-\varepsilon, m]$ zavzame γ_2 vse vrednosti med -1 in 1. To je v nasprotju z zveznostjo γ_2.

$\sin\frac{1}{x} \cup$ limitna daljica

Varšavski lok ali lok Sierpinskega

Prostor X je povezan s potmi, če med poljubnima točkama $a, b \in X$ obstaja pot v X od a do b.

X povezan s potmi $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ X povezan

KOMPONENTE

$x \in X$

$C(x) :=$ unija vseh povezanih podmnožic X, ki vsebujejo x

Trditev: 1) $x \in C(x)$
2) $C(x)$ je povezana
3) $C(x)$ je maksimalna povezana podmnožica X
4) $C(x)$ je zaprta v X

Primer: V diskretnem prostoru so komponente točke.

Primer: Komponente $\mathbb{Q}$ so točke, ker so edine povezane podmnožice $\mathbb{R}$ intervali.

X je povsem nepovezan, če so komponente X enojčki.

Trditev: $f^{zv}: X \to Y$ in $C(x)$ komponenta v X
$\Rightarrow f(C(x))$ vsebovana v komponenti $C(f(x))$ v Y

Trditev: Komponente X tvorijo particijo X na disjunktne podmnožice.

Dokaz: $C(x_1) \cup C(x_2) \cup C(x_3)$

$C(x_1) \cap C(x_2) \neq \emptyset \Rightarrow C(x_1) = C(x_2)$

$C(x_1) \overset{=}{\subseteq} C(x_1) \cup C(x_2) \overset{=}{\supseteq} C(x_2)$

$x \sim x' :\Leftrightarrow \exists A^{pov} \subseteq X : x, x' \in A$

Komponente so ekvivalenčni razredi za to relacijo.

Primer: Komponente $\mathbb{Q}$ so zaprte, vendar niso odprte v evklidski topologiji.

Če ima X končno mnogo komponent, so komponente odprte, ker je vsaka komplement unije ostalih.

Prostor X je lokalno povezan, ~~če ima vsaka točka $x \in X$ neko povezano okolico, oziroma ekvivalentno,~~ če ima X bazo topologije iz povezanih množic.

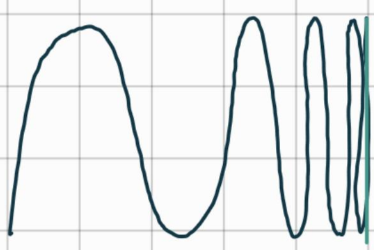
Prostor X je lokalno povezan s potmi, če ima X bazo topologije iz (odprtih) množic, ki so povezane s potmi.

Primer: Odprte krogle v $\mathbb{R}^n$ so lokalno povezane s potmi, ker so krogle konveksne.

Primer: $\mathbb{Q}$ ni lokalno povezan.

Primer: Diskreten prostor je lokalno povezan, ni pa povezan.

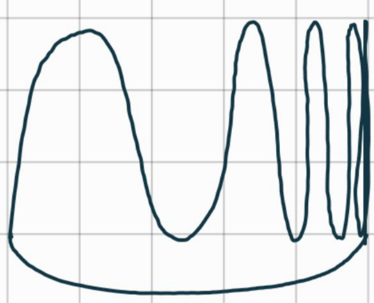
Primer:



Varšavski lok je povezan, ni pa lokalno povezan.

Prostor X je lokalno povezan, če za vsako točko $x \in X$ in vsako odprto okolico $U^{odp} \ni x$ obstaja V^{pov}, da je $x \in V \subseteq U$.

Primer:



Ta prostor je povezan s potmi, ni pa lokalno povezan s potmi.

Trditev: X lokalno povezan $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Komponente X odprte

Trditev: X lokalno povezan $\iff$ Komponente vsake odprte množice v X so odprte

Dokaz: ($\Rightarrow$) $U^{odp} \subseteq X$, baza iz povezanih za X.
$\Rightarrow$ Baza iz povezanih za U.

($\Leftarrow$) $\mathcal{B} :=$ { komponente odprtih množic v X } je baza topologije na X iz povezanih množic, ker so odprte po privzetku, povezane, ker so komponente, in baza, ker je vsaka odprta množica unija svojih komponent, torej elementov $\mathcal{B}$.

Trditev: Če je X lokalno povezan s potmi, potem so komponente X iste kot komponente X za povezanost s potmi.

Dokaz: Naj bo X prostor in C komponenta X. Morda ima C več potnih komponent.

C' potna komponenta $\subseteq C$

X lokalno povezan s potmi.

$\Rightarrow$ Vse potne komponente so odprte.

C' je komplement unije ostalih potnih komponent.

$\Rightarrow$ C' je zaprta

$\Rightarrow$ C' je odprta in zaprta v C^{povezana}

$\Rightarrow$ $C' = C$

Posledica: Recimo, da je X lokalno povezan s potmi. Potem je X povezan natanko takrat, ko je X povezan s potmi.

Posledica: Odprte množice v $\mathbb{R}^n$ so povezane natanko takrat, ko so povezane s potmi.

KOMPAKTNOST

Prostor X je **kompakten**, če v vsakem odprtem pokritju obstaja končno podpokritje.

Opomba: Dovolj je gledati pokritja z baznimi okolicami.

Opomba: Kompaktnost podprostora $A \subseteq X$ lahko testiramo na odprtih pokritjih v X.

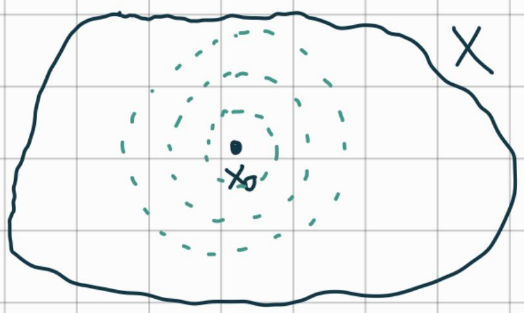
Primer: Vsaka končna množica je kompaktna.

Primer: $x_1, x_2, \ldots \longrightarrow x$
$\{x_1, x_2, \ldots\} \cup \{x\}$ je kompakten

Primer: $\mathbb{R}$ z običajno topologijo niso kompaktna.

Trditev: V metričnih prostorih je vsaka kompaktna množica omejena.

Dokaz:

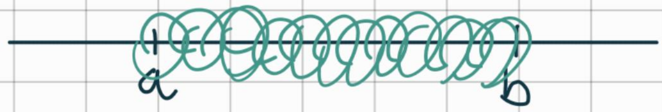


$$\bigcup_r K(x_0, r) = X$$

Če obstaja končno podpokritje, potem je X vsebovan v največji krogli.

Zgled: $[a,b]$ je kompakten.

Dokaz:



Naj bo $\mathcal{U}$ odprto pokritje od $[a,b]$.

$c := \sup\{x \,;\, [a,x] \text{ ima končno podpokritje v } \mathcal{U}\}$

$c \in U \in \mathcal{U}$

$\exists \varepsilon : (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq U$

$[a, c-\frac{\varepsilon}{2}]$ ima končno podpokritje $\{U_1, \dots, U_n\}$

$\Rightarrow \{U_1, \dots, U_n, U\}$ je končno podpokritje za $[a, c+\frac{\varepsilon}{2}]$

Če $c<b$, dobimo protislovje.

Trditev: Zvezna slika kompakta je kompakt.

Dokaz: Naj bo $f^{zv} : X^{komp} \to Y$.

Naj bo $\mathcal{U}$ odprto pokritje za Y.

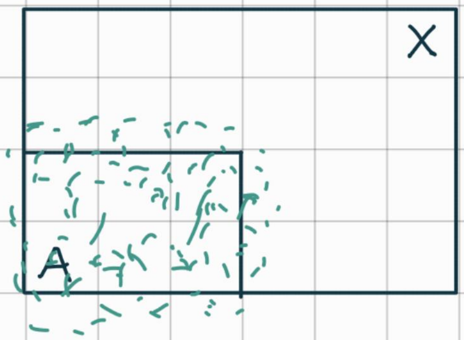
$\{f^*(U) \,;\, U \in \mathcal{U}\}$ so odprto pokritje za X.

$\{f^*(U_1), \dots, f^*(U_n)\}$ končno podpokritje za X.

$U_1, \dots, U_n$ končno podpokritje za Y.

Trditev: Zaprta podmnožica kompakta je kompaktna.

Dokaz:



$\mathcal{U}$ pokritje A z odprtimi v X

$\mathcal{U} \cup X \setminus A$ odprto pokritje X

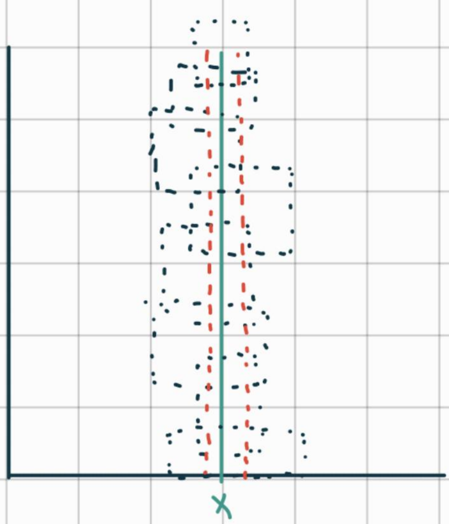
$U_1, \dots, U_n$ končno podpokritje

Odstranimo $X \setminus A$ in dobimo končno podpokritje za A.

Izrek: Če sta prostora X in Y kompaktna, potem je tudi $X \times Y$ kompakten.

Dokaz: Naj bo $\mathcal{U}$ poljubno pokritje produkta $X \times Y$ s škatlami.

$x \in X$: $\{x\} \times Y$



Za vsak $x \in X$ obstaja $\{U_{\lambda_1} \times V_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n} \times V_{\lambda_n}\}$, ki pokriva $\{x\} \times Y$.

$U_x := U_{\lambda_1} \cap \ldots \cap U_{\lambda_n}$ odprt

$\Rightarrow$ $U_x \times Y$ ima končno podpokritje iz $\mathcal{U}$.

$\Rightarrow$ $\{U_x \,;\, x \in X\}$ odprto pokritje za X

$\Rightarrow$ $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ končno podpokritje

Vsako izmed $U_{x_1} \times Y, \ldots, U_{x_n} \times Y$ je pokritje s končno mnogo elementi iz $\mathcal{U}$.

$\Rightarrow$ Obstaja končno podpokritje za $X \times Y$.

Posledica: $X_1, \ldots, X_n$ kompaktne $\Rightarrow$ $X_1 \times \ldots \times X_n$ kompakten

Opomba: Velja tudi za poljuben produkt kompaktov.

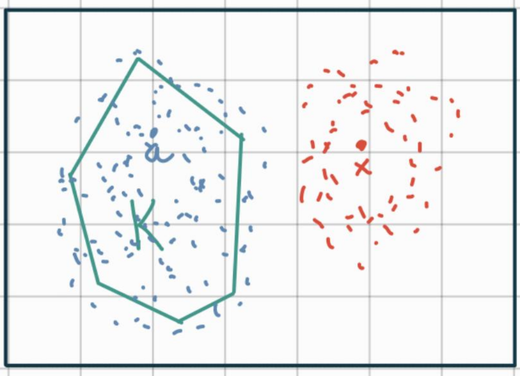
Posledica: Vsaka zaprta in omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je kompaktna.

Dokaz: $X^{\text{omejena}} \Rightarrow X \subseteq [a,b]^n$ kompaktna

$X^{\text{zaprta}} \Rightarrow X$ kompaktna

Trditev: Če je X Hausdorffov in $K \subseteq X$ kompaktna, potem je K zaprta v X.

Dokaz:



$\forall a \in K : U_a \ni a,\ V_a \ni x,\ U_a \cap V_a = \emptyset$

$\{U_a ; a \in K\}$ odprto pokritje za K

$\Rightarrow \{U_{a_1}, \dots, U_{a_n}\}$ končno podpokritje za K

$V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$ odprta okolica x, ki ne seka K

$\Rightarrow K^c$ je odprta

$\Rightarrow K$ je zaprta

Zraven smo dokazali tudi:

Izrek: Vsaka Hausdorffova topologija ostro loči točke od kompaktov.

Iz te in prejšnjih trditev sledi tudi:

Heine-Borel-Lebesgue izrek:

Podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko takrat, ko je zaprta in omejena.

Opomba: Naj bo M metričen prostor. Zaprte krogle so kompaktne natanko takrat, ko velja Heine-Borel-Lebesgue izrek.

Posledica: $X^{komp} \subseteq \mathbb{R}^n : \forall f^{zvez} : X \to \mathbb{R}$ je omejena in doseže min in max.

Dokaz: $f_*(X)$ je kompakt v $\mathbb{R}$, torej je omejen, torej ima inf in sup. Ker je zaprt, sta to min in max.

Trditev: V kompaktu ima vsaka neskončna množica stekališče.

Dokaz: Naj bo X kompakten in $A \subseteq X$ brez stekališča.

$\forall x \in X : \exists U_x \supseteq X : U_x \cap A$ je končen

$\{U_x ; x \in X\}$ odprto pokritje za X

$\Rightarrow \{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ končno pokritje za X

$\Rightarrow$ Tudi pokritje za A

$\Rightarrow A$ je končna

Bolzano-Weierstrassov izrek:

Vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima konvergentno podzaporedje.

Dokaz: $x_1, x_2, x_3, \dots \subseteq [a,b]^n$

Ločimo primera:

1) Množica elementov zaporedja je končna

$\Rightarrow$ Vsaj kakšen člen se ponovi neskončnokrat

$\Rightarrow$ Konstantno podzaporedje je konvergentno

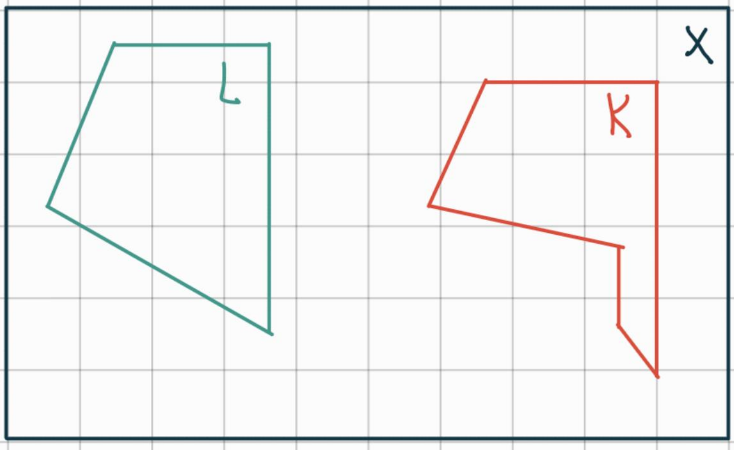
2) Množica elementov zaporedja je neskončna

⇒ Po trditvi ima množica stekališče

⇒ Stekališče je limita nekega podzaporedja

Izrek: Kompakten in Hausdorffov prostor je normalen.

Dokaz:



$\forall x \in L : \exists U_x, V_x : K \subseteq U_x,\ x \in V_x,\ U_x \cap V_x = \emptyset$

$\{V_x ; x \in L\}$ odprto pokritje za L

$\Rightarrow \{V_{x_1}, \dots, V_{x_m}\}$ odprto pokritje za L

$U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_m} \supseteq K$
$V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m} \supseteq L$

Sta disjunktni.

S tem smo dokazali, da vsaka Hausdorffova topologija ostro loči kompakte.

Če je X kompakten in Hausdorffov:

$A, B^{\text{zap, disj}} \subseteq X \Rightarrow A, B^{\text{komp}}$

$\Rightarrow \exists U, V^{\text{odp}} : A \subseteq U,\ B \subseteq V,\ U \cap V = \emptyset$

$\forall \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}^{odp} : \bigcup U_\lambda = X \longleftrightarrow \{U_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda}^{zap} : \bigcap U_\lambda^c = \emptyset$

$\exists \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}\} : U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n} = X \longleftrightarrow U_{\lambda_1}^c \cap \dots \cap U_{\lambda_n}^c = \emptyset$

Trditev: X je kompakten, ko v vsaki družini zaprtih podmnožic s praznim presekom obstaja končna poddružina, katere presek je prazen.

Cantorjev izrek:

Naj bo X^{komp}, $F_1^{zap} \supseteq F_2^{zap} \supseteq \dots$ padajoče zaporedje zaprtih nepraznih množic.

$\Rightarrow \bigcap F_i \neq \emptyset$

Dokaz: Če bi veljalo $\bigcap F_i = \emptyset$, potem bi po trditvi imeli končno poddružino $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} = \emptyset$, vendar je ta presek enak najmanjši od teh množic, ki pa ni prazna.

Cilj: $f : X^{komp, metr} \to Y^{metr}$ zvezna $\Rightarrow f$ enakomerno zvezna

$\mathcal{U}^{odp\ pokr}$ X, $\lambda > 0$ je Lebesguovo število pokritja $\mathcal{U}$, če vsaka podmnožica s premerom $< \lambda$ leži v celoti v enem elementu $\mathcal{U}$.

Trditev: Za vsako odprto pokritje kompaktnega metričnega prostora obstaja Lebesguovo število.

Dokaz: $\mathcal{U}^{odp\ pokr}$ za X^{komp}

$U_1, \dots, U_n$ končno podpokritje

$\forall x \in X: \quad d(x, U_1^c), \ldots, d(x, U_n^c)$

$f(x) = \max\{d(x, U_1^c), \ldots, d(x, U_n^c)\}$

$f: X \to \mathbb{R}_{>0}$ je zvezna

$\lambda := \min_{x \in X} f(x) > 0$

Posledica: Če je $f: X^{\text{komp, metr}} \longrightarrow Y^{\text{metr}}$ zvezna, potem je enakomerno zvezna.

Dokaz: Naj bo $\varepsilon > 0$. Y pokrijemo s kroglami $K(y, \frac{\varepsilon}{2})$ za vse $y \in Y$.

$\Rightarrow \{f^*(K(y, \frac{\varepsilon}{2}))\ ;\ y \in Y\}$ pokritje X

$\delta :=$ Lebesguovo število

$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Prostor X je lokalno kompakten, če ima vsaka točka X kompaktno okolico:

$\forall x \in X: \exists K^{\text{komp}} \subseteq X: x \in \operatorname{Int} K$

Trditev: Naj bo X Hausdorffov. Potem je X lokalno kompakten natanko tedaj, ko ima njegova topologija bazo iz relativno kompaktnih odprtih množic.

Množica je relativno kompaktna, ko je njeno zaprtje kompaktno.

Primer: Vsak kompakten prostor je lokalno kompakten, ker lahko za kompaktno okolico vzamemo cel prostor.

Primer: $\mathbb{R}^n$ je lokalno kompakten, ker je okolica vsake točke lahko zaprta krogla. Ni pa kompakten.

Primer: Vsak diskreten prostor je lokalno kompakten. Diskreten prostor je kompakten natanko tedaj, ko je končen.

Primer: $\mathbb{Q}$ ni lokalno kompakten.

Naj bo $(X,\mathcal{T})$ poljuben prostor.

$$X \cup \{\infty\} =: X^+ \quad \rightsquigarrow \quad (X^+, \mathcal{T}^+)$$

$$\mathcal{T}^+ := \mathcal{T} \cup \{\infty \cup K^c \,;\, K \overset{\text{komp}}{\subseteq} X\}$$

<u>$\mathcal{T}^+$ je topologija na X^+.</u>

Preverimo sami.

<u>X^+ je kompakten.</u>

Naj bo $\mathcal{U}$ odprto pokritje za X^+.

$$\infty \in U \in \mathcal{U}$$

$$\rightsquigarrow U^c \text{ je kompakt}$$

$\rightsquigarrow U^c$ ima končno podpokritje iz $\mathcal{U}$

Primer: Naj bo X števna diskretna množica. Potem je $X^+ \approx \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \cup \{0\}$.

Primer: Naj bo $X = [0,1)$. Potem je $[0,1)^+ \approx [0,1]$.

Primer: Naj bo $X = (0,1)$. Potem je $(0,1)^+ \approx S^1$.

Primer: Naj bo $X = \mathbb{Q}$. Potem pa $\mathbb{Q}^+$ ni Hausdorffov prostor. To je zato, ker $\mathbb{Q}$ ni lokalno kompakten.

Prostoru X^+ rečemo **kompaktifikacija Alexandrova** ali **kompaktifikacija z eno točko**.

Trditev: X je lokalno kompakten in Hausdorffov $\iff$ X^+ je kompakten in Hausdorffov.

Dokaz: Dokazati moramo, da je X^+ Hausdorffov.

Če je $x, x' \in X$, velja očitno.

Če je $x \in X$, $x' = \infty$, potem je $x \in \operatorname{Int} K$, $K \overset{\text{komp}}{\subseteq} X$, in $\infty \in K^c \cup \{\infty\}$. Torej sta $\operatorname{Int} K \ni x$ in $K^c \cup \{\infty\}$ odprti disjunktni v X^+

Trditev: Če je X lokalno kompakten in Hausdorffov, potem je X regularen.

Dokaz: X lokalno kompakten Hausdorffov

$\Rightarrow X^+$ kompakten Hausdorffov

$\Rightarrow X^+$ normalen, torej regularen

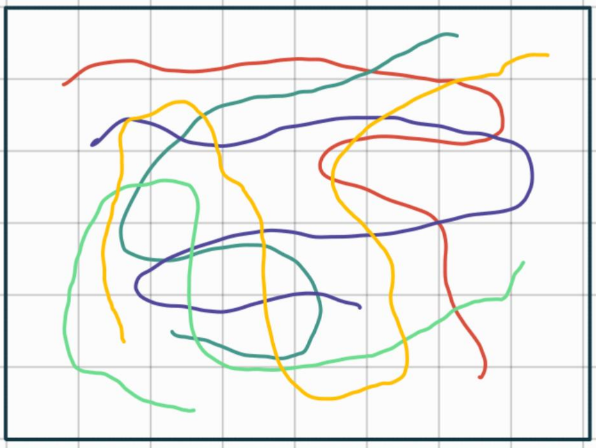
Regularnost je dedna

$\Rightarrow X$ je regularen

Baireov izrek:

Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov. Naj bo $F_1, F_2, F_3, \ldots$ zaporedje zaprtih množic v X s prazno notranjostjo. Potem ima $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots$ tudi prazno notranjost.

Primer:



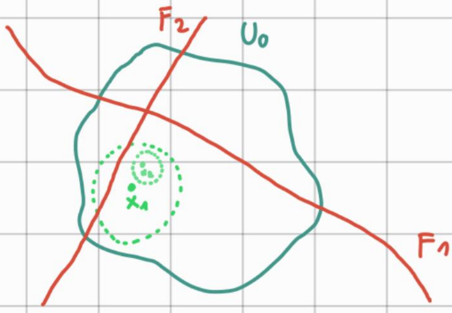
Opomba: Izrek velja tudi za polne metrične prostore.

Tej lastnosti rečemo **Baireova lastnost**.

Dokaz: Naj bo $U_0 \overset{odp}{\subseteq} X$.

$\exists x_1 \in U_0 - F_1$

$\rightsquigarrow \exists U_1 : \overline{U_1}^{komp}, \ x_1 \in U_1, \ U_1 \cap F_1 = \emptyset$



$\exists x_2 \in U_1 - F_2$

$\rightsquigarrow \exists U_2 : \overline{U_2} \subseteq U_1$

$\rightsquigarrow x_2 \in U_2 \subseteq \overline{U_2} \subseteq U_1 - F_2$

Dobimo $\overline{U_1} \supseteq \overline{U_2} \supseteq \overline{U_3} \supseteq \dots$ padajoče zaporedje kompaktov

$$\rightsquigarrow \bigcap \overline{U_i} \neq \emptyset$$
$$\cap\!|$$
$$U_0$$

$\rightsquigarrow U_0$ ni pokrit z $\{F_i\}$