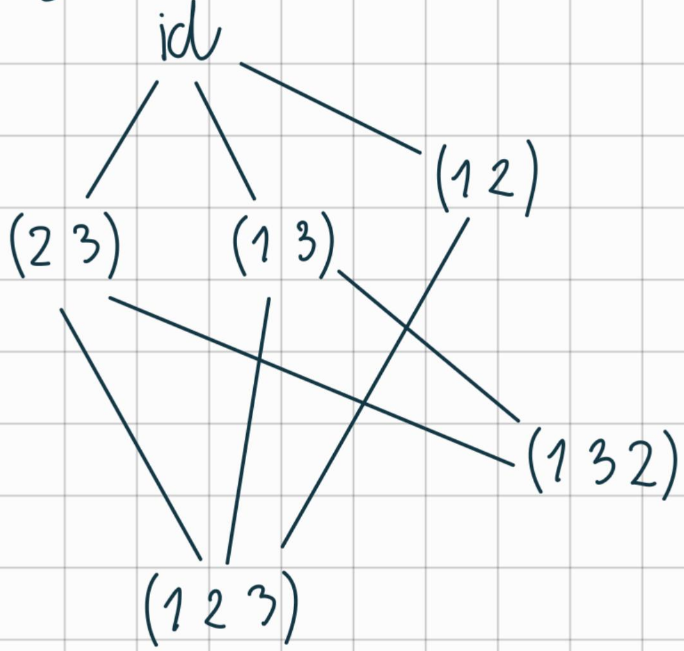
n-permutacijski graf G_n

$V(G_n) = S_n$

$\pi_1 \sim \pi_2 \;:\Leftrightarrow\; \exists\, \tau$ transpozicija, da velja $\pi_1 = \tau \pi_2$
$(\tau \pi_1 = \pi_2)$

G_3:



G_n:

Ali je regularen? Kaj so stopnje vozlišč, število povezav?
Ali je dvodelen?

Stopnje vozlišč:

Vsaka transpozicija nam da enega soseda.

$\Rightarrow \deg = \binom{n}{2}$

$\Rightarrow$ Je regularen.

Lema o rokovanju: $2|E| = \sum_{v \in V} \deg v$

Število vozlišč: $n!$

Število povezav: $|E| = \frac{1}{2} \cdot n! \cdot \binom{n}{2}$

Je dvodelen:

X je sode permutacije
Y je lihe permutacije

Trditev: $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 2$

$\Rightarrow$ G vsebuje vsaj dve vozlišči, ki imata isto stopnjo

Dokaz: Ločimo primere:

1) $\exists u \in V(G): \deg u = n-1$

$\Rightarrow \forall v \in V(G): \deg v > 0$

Imamo $n-1$ možnih stopenj in n vozlišč.

$\Rightarrow$ Po Dirichletovem načelu obstaja taka stopnja, ki jo imata dve vozlišči.

2) $\nexists u \in V(G): \deg u = n-1$

Imamo n-1 možnih stopenj in n vozlišč.

—||—

Sandi Klavžar, Presek, letnik 26, številka 2, strani 72-78

---

4 pari klovnov
2 rdeča, 2 modra, 2 zelena, 2 rumena

Dva klovna iste barve se nikoli ne zaletita.

Prvi rdeči klovn vpraša ostale klovne, v koliko klovnov so se zaleteli. Dobi same različne odgovore.

V koliko klovnov se je zaletel drugi rdeči klovn?

$G = (V, E)$

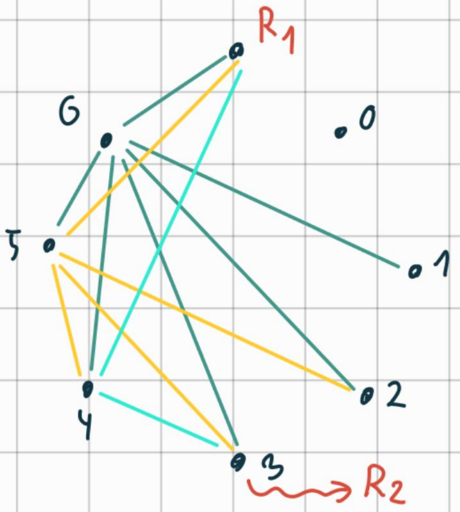
$V = \{R_1, R_2, M_1, M_2, Z_1, Z_2, Ru_1, Ru_2\}$

$x \sim y :\Longleftrightarrow$ klovna x in y sta se zaletela

$\deg(R_2) = ?$

$x_i \nsim x_j$, $x = R, M, Z, Ru$

$\deg(x) \neq \deg(y)$, $x \neq y$, $x, y \neq R_1$



$\deg(x) \leq 6 \quad \forall x$

$\Rightarrow$ Vse stopnje so 0–6

Vozlišče stopnje 6 je povezano z vsemi, razen z vozliščem stopnje 0.

$\Rightarrow$ Vozlišči stopnje 0 in 6 sta iste barve A (ne rdeče).

Vozlišče stopnje 5 je povezano z vsemi, razen z vozlišči stopnje 0 in 1.

$\Rightarrow$ Vozlišči stopnje 1 in 5 sta iste barve B (ne rdeče).

Vozlišče stopnje 4 je povezano z vsemi, razen z vozlišči stopnje 0, 1 in 2.

$\Rightarrow$ Vozlišči stopnje 2 in 4 sta iste barve C (ne rdeče).

$\Rightarrow$ Vozlišče stopnje 3 je rdeče $\Rightarrow R_2$

Zaporedje $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ je grafovsko, če obstaja graf z n vozlišči, ki imajo stopnje $d_1, d_2, \dots, d_n$.

Trditev: Naj bo $n \geq 2$, $d_1 \geq 1$, $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. Potem je zaporedje $(d_1, \dots, d_n)$ grafovsko natanko tedaj, ko je grafovsko zaporedje $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n) = z'$.

Dokaz: $(\Leftarrow)$ Predpostavimo, da je z' grafovsko zaporedje.

$\Rightarrow$ Obstaja graf G' s takimi stopnjami.

Definiramo graf G.

$V(G) = V(G') \cup \{v\} \quad (v \notin V(G'))$

Vozlišče v povežemo vozlišči stopnje $d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1$.

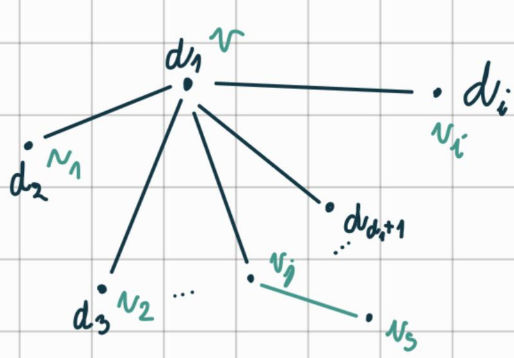
$\Rightarrow$ v ima stopnjo d_1

Vse povezave v G' obdržimo.

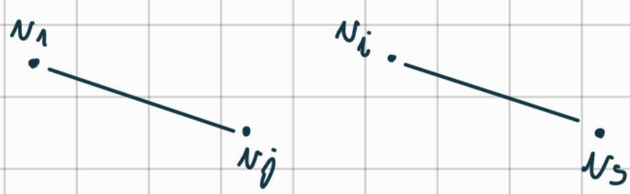
$\Rightarrow$ G ima stopnje $z = (d_1, \dots, d_n)$.

$\Rightarrow$ Zaporedje z je grafovsko.

($\Rightarrow$) Naj bo G graf s stopnjami $d_1, \dots, d_n$.



Če obstaja $i > d_1+1$, da sta v_1, v_i povezana, potem obstaja $j \le d_1+1$, da v, v_j nista povezana.



Obstaja s, da je v_s sosed od v_j in ni sosed od v_i.

V grafu G odstranimo povezavi $v_1 v_i$ in $v_s v_j$, ter dodamo povezavi $v_1 v_j$ in $v_s v_i$.

Dobimo nov graf z enakimi stopnjami, v katerem je v povezan z v_j.

Postopek ponavljamo, dokler v ni povezan z vsemi vozlišči stopenj $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$. Dobimo graf G'.

Definirajmo graf G'': $G'' := G' - v$

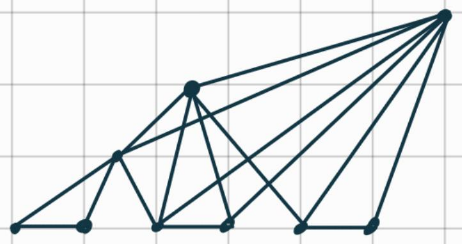
G'' ima stopnje $\underline{d}'$

$\Rightarrow \underline{d}'$ je grafovsko

Preveri, ali so zaporedja grafovska.

a) $(6,5,5,4,3,3,2,2,2)$
$(4,4,3,2,2,1,2,2)$
$(4,4,3,2,2,2,2,1)$
$(3,2,1,1,2,2,1)$
$(3,2,2,2,1,1,1)$
$(1,1,1,1,1,1)$

Je grafovsko.



b) $(5,5,4,3,3,3,2)$
$(4,3,2,2,2,2)$
$(2,1,1,1,2)$
$(2,2,1,1,1)$
$(1,0,1,1)$

Imamo tri vozlišča lihe stopnje. To ne gre.

Ni grafovsko.

Lahko bi opazili takoj, ker imamo liho vozlišč lihe stopnje.

c) $(7,6,6,5,3,3,2,1,1)$
$(5,5,4,2,2,1,0,1)$
$(5,5,4,2,2,1,1,0)$
$(4,3,1,1,0,1,0)$
$(4,3,1,1,1,0,0)$
$(2,0,0,0,0,0)$

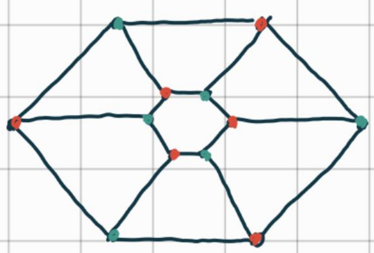
Ni grafovsko.

$P_{n,k}$ ... posplošen Petersenov graf

$V = \{u_0, \dots, u_{n-1}, v_0, \dots, v_{n-1}\}$

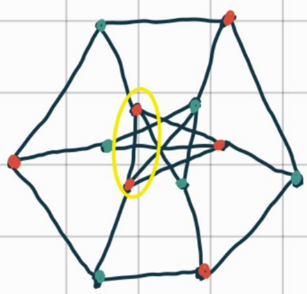
E: $u_i \sim u_{i+1}$
$v_i \sim v_{i+k}$
$u_i \sim v_i$

$P_{6,1}$:



Je dvodelen.

$P_{6,2}$:



Ni dvodelen (ima lih cikel).

- n lih:

Ni dvodelen, ker je zunanji obroč lih cikel $u_0 u_1 \cdots u_{n-1} u_0$.

- n sod:
  - k sod:

    Ni dvodelen, ker imamo lih cikel $u_0 v_0 v_k u_k u_{k-1} \cdots u_1 u_0$ dolžine $k+3$.

  - k lih:

    Barve 1 so u_{2i}, v_{2i+1}.
    Barve 2 so u_{2i+1}, v_{2i}.

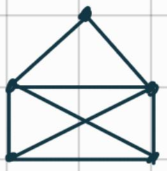
    Je dvodelen.

Naj bosta G, H grafa.

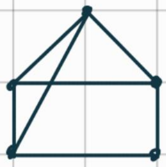
$\varphi : V(G) \to V(H)$ je izomorfizem, če je φ bijekcija in $uv \in E(G) \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$.

Ali sta grafa izomorfna?

a) G_1:



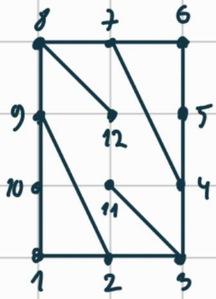
H_1:



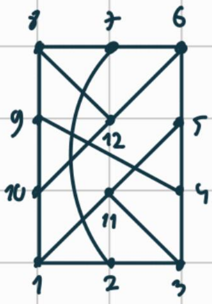
H_1 nima vozlišča stopnje 2, G_1 pa ga ima

$\Rightarrow$ Nista izomorfna

b) G_2:



H_2:



Cikli dolžine 4 v G_2:

1, 2, 3, 11
1, 2, 9, 10
3, 4, 5, 11
4, 5, 6, 7
6, 7, 8, 12
8, 9, 10, 12

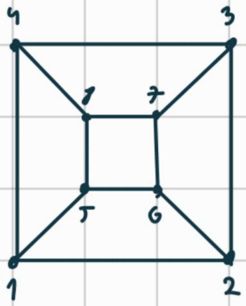
Cikli dolžine 4 v H_2:

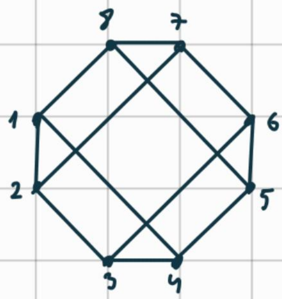
1,2,3,11
3,4,5,11
6,7,8,11
8,9,10,11

Ne ujemata se v številu ciklov

$\Rightarrow G_2 \not\cong H_2$

c) G_3: H_3:

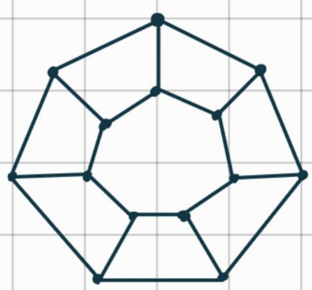


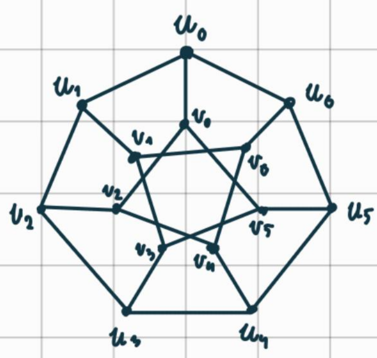


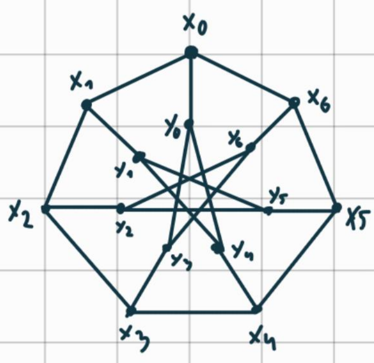
$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow G_3 \cong H_3$

d) $P(7,1)$: $P(7,2)$: $P(7,3)$:







$P(7,1) \not\cong P(7,2)$, saj ima le $P(7,1)$ cikel dolžine 4.

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ y_0 & y_3 & y_6 & y_2 & y_5 & y_1 & y_4 & x_0 & x_3 & x_6 & x_2 & x_5 & x_1 & x_4 \end{pmatrix}$$

$\varphi(u_i) = y_{(3i \bmod 7)}$

$\varphi(v_i) = x_{(3i \bmod 7)}$

$u_i \sim v_i$ in očitno $x_{(3i \bmod 7)} \sim y_{(3i \bmod 7)}$
$u_i \sim u_{i+1}$ in velja $x_{(3i \bmod 7)} \sim x_{(3(i+1) \bmod 7)}$
$v_i \sim v_{i+2}$ in velja $y_{(3i \bmod 7)} \sim y_{(3(i+2) \bmod 7)} = y_{(3i-1 \bmod 7)}$

Izrek:

$n \geq 3,\ k \geq 1,\ l < \frac{n}{2}$

$k \cdot l \equiv \pm 1 \pmod n$

$\Rightarrow P(n,k) \cong P(n,l)$

Dokaz:

$$\varphi : P(n,k) \to P(n,l)$$
$$u_i \mapsto y_{li}$$
$$v_i \mapsto x_{li}$$

$k \cdot l \equiv 1 \pmod n$

$\Rightarrow n+1 = kln \pmod n$ in $n, n+1$ tuji

$\Rightarrow D(k,n) = 1,\ D(l,n) = 1$

$y_{li} = y_{lj}$

$\Rightarrow li = lj \pmod n$

$\Rightarrow i = j$ zaradi tujosti

$\Rightarrow$ je bijektivno

Podobno kot prej dokažemo ohranitev povezav.

Naj bo G graf. Komplement grafa definiramo kot:

- $V(\overline{G}) := V(G)$
- $u \sim_{\overline{G}} v :\Longleftrightarrow u \not\sim_G v$

$\Rightarrow \deg_G u + \deg_{\overline{G}} u = n-1$ za $n = |V(G)|$

$\Rightarrow |E(\overline{G})| = \binom{n}{2} - |E(G)|$

Naj bo $G \cong \overline{G}$, $|V(G)| = n$. Pokaži, da je $n \equiv 0 \pmod 4$ ali $n \equiv 1 \pmod 4$.

$\Rightarrow |E(\overline{G})| = |E(G)|$

$\Rightarrow 2|E(G)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow |E(G)| = \frac{n(n-1)}{4}$

$\Rightarrow 4 \mid n$ ali $4 \mid (n-1)$

$\Rightarrow n \equiv 0 \pmod 4$ ali $n \equiv 1 \pmod 4$

Poišči vse grafe G, $|V(G)| = 5$, da je $G \cong \overline{G}$.

Po prejšnji nalogi je $|E(G)| = \frac{n(n-1)}{2} = 5$.

Stopnje v G: $d_1 \leq \ldots \leq d_5$

$$\overline{d_i} = 4 - d_i$$

$$\Rightarrow \overline{d_5} \leq \ldots \leq \overline{d_1}$$

$$d_1 = 4 - d_5$$
$$d_2 = 4 - d_4$$
$$\vdots$$
$$d_5 = 4 - d_1$$

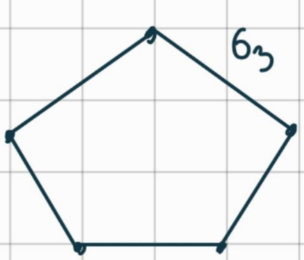
$$\Rightarrow d_3 = 4 - d_3 \Rightarrow d_3 = 2$$

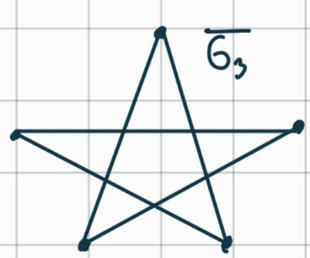
Če bi bil $d_1 = 0$ bi bil $d_5 = 4$.

$$\Rightarrow d_1 = 1 \text{ ali } d_1 = 2$$

(i) $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = (1,1,2,3,3) \rightsquigarrow G_1$
(ii) $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = (1,2,2,2,3) \rightsquigarrow G_2$
(iii) $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = (2,2,2,2,2) \rightsquigarrow G_3$

G_3:

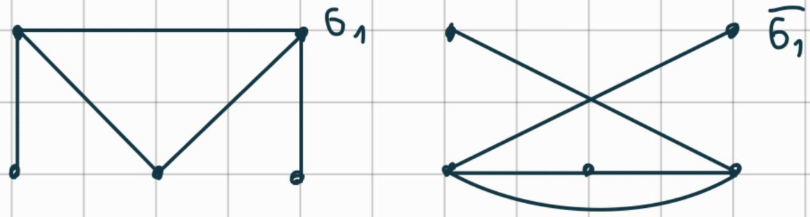




$$G_3 \cong \overline{G_3}$$

G_1:

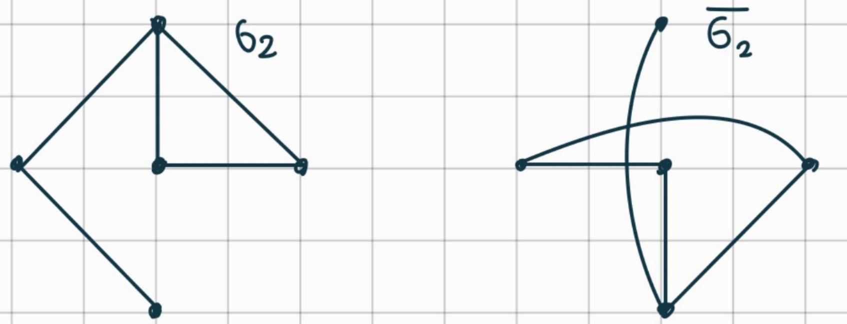
Vozlišči stopnje 3 morata biti sosednji.



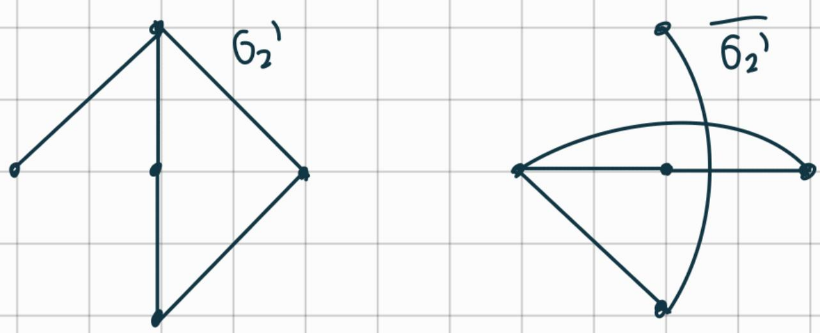
$G_1 \cong \overline{G_1}$

G_2:

Vozlišče stopnje 3 povežemo z vsemi stopnje 2 ali enim 1.



$G_2 \not\cong \overline{G_2}$



$G_2' \not\cong \overline{G_2'}$

Naj bo G graf. Pokaži, da je G povezan ali $\overline{G}$ povezan.

Recimo, da G ni povezan.

Naj bosta $u, v \in V(\overline{G})$.

(i) Če sta u, v v različnih komponentah, po definiciji $\overline{G}$ obstaja povezava uv in je pot v $\overline{G}$.

(ii) Če sta u, v v isti komponenti, potem obstaja w v drugi komponenti in je $u\,w\,v$ pot v $\overline{G}$.

Naj bo G graf in $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, kjer je $n = |V(G)|$.
Pokaži, da je G povezan.

Recimo, da G ni povezan. Potem ima vsaj dve komponenti.

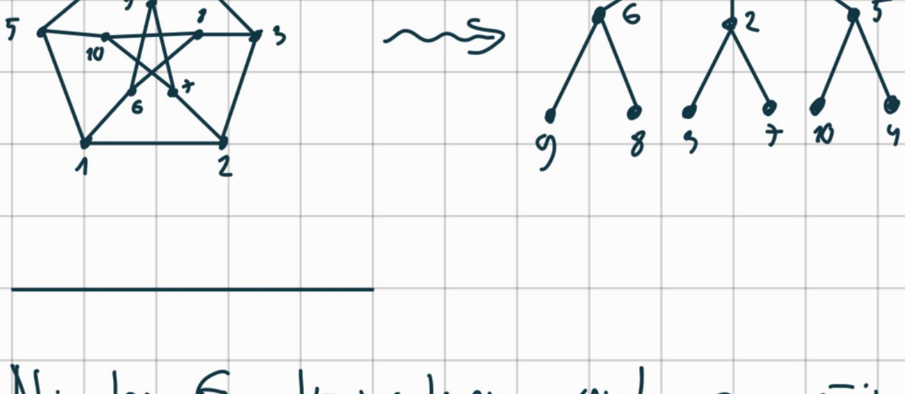
$\Rightarrow$ Obstajata vozlišči u, v različnih komponent.

V komponenti u je vsaj $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ vozlišč ter v komponenti v tudi.

$\Rightarrow |V(G)| = 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 > n$

Razdaljna particija grafa G glede vozlišča v je
$D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_d$, kjer je $D_i = \{u \in V(G);\ d(u,v) = i\}$,
kjer je $d = \mathrm{diam}(G)$.

Petersenov graf:



Naj bo G k-regularen graf z ožino 4 (najkrajši cikel).
Pokaži, da ima G vsaj $2k$ vozlišč.

$|D_1| = k$ in v D_1 ni povezav, saj bi sicer imeli trikotnike, in vsi elementi D_1 rabijo še $k-1$ povezav.

$\Rightarrow |D_2| \geq k-1$

$|V(G)| \geq |D_1| + |D_2| + 1 \geq 2k$

Enakost dosežena pri $K_{k,k}$.

Naj bo G k-regularen graf z ožino 5. Pokaži $|V(G)| \geq k^2+1$.

Podobno kot prej $|D_1| = k$ in $|D_2| = k(k-1)$ in znotraj D_i ni povezav, sicer bi imeli ožino manj kot 5.

$|V(G)| \geq 1 + |D_1| + |D_2| = 1 + k + k^2 - k = k^2 + 1$

Enakost dobimo pri C_5 in $P(5,2)$.

Moorovi grafi so C_5, $P(5,2)$, Hoffman-Singleton (in mogoče $|V(G)| = 3250$, st. 57).

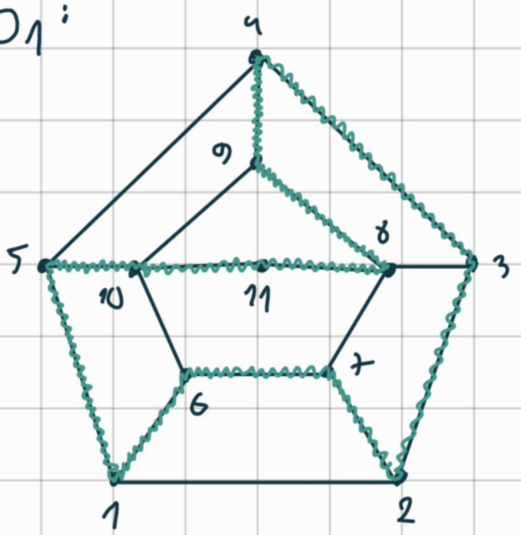
HAMILTONOVI GRAFI

Hamiltonov cikel je cikel, ki prehodi vsa vozlišča.

Hamiltonov graf je graf, ki vsebuje Hamiltonov cikel.

Če ima $G \setminus S$ več komponent kot $|S|$, potem G nima Hamiltonovega cikla.

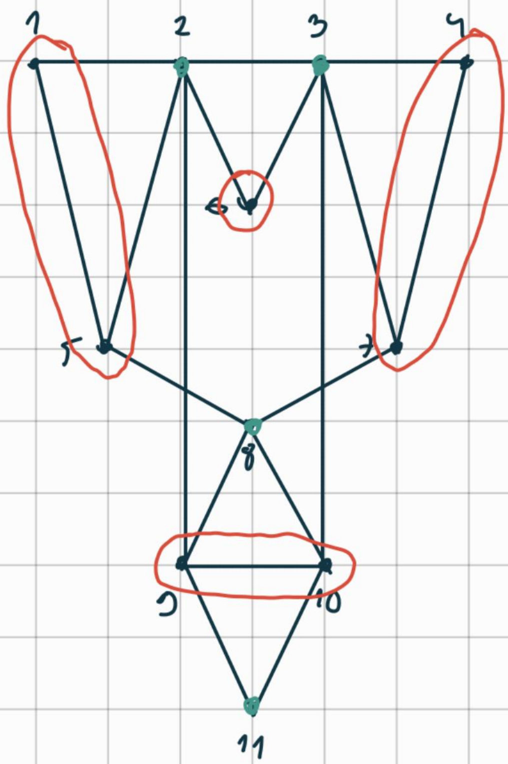
G_1:



Imam Hamiltonov cikel

$\Rightarrow$ Je Hamiltonov

G_2:

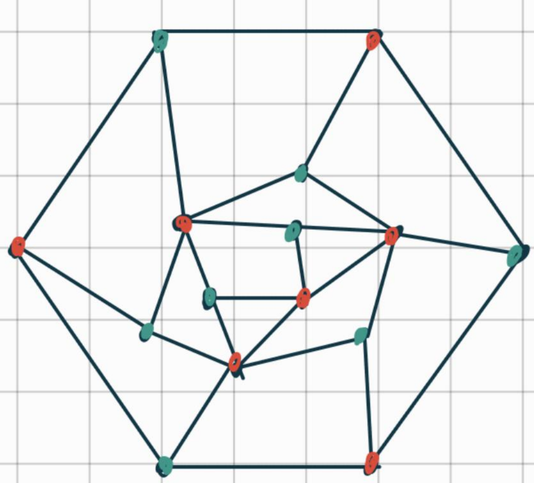


$S = \{8,2,3\}$
$|S| = 3$

$G \setminus S$ ima 4 komponente

$\Rightarrow$ Ni Hamiltonov

G_3:



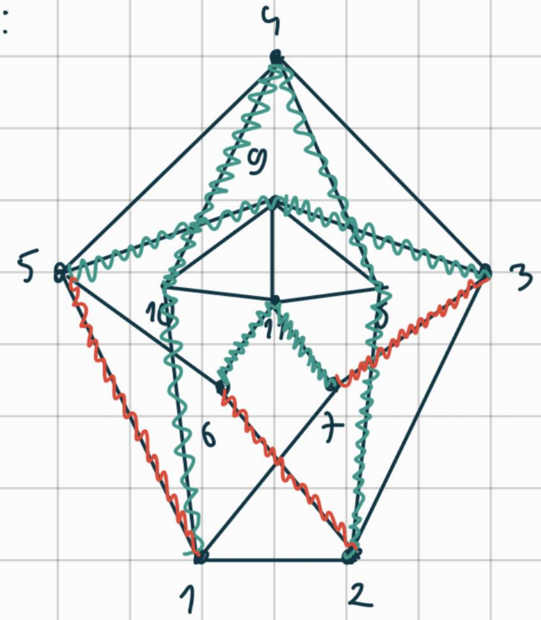
Je dvodelen

$|\text{zeleni}| = 8$
$|\text{rdeči}| = 9$

Enih je več kot drugih

$\Rightarrow$ Ni Hamiltonov

G_4:



Ima Hamiltonov cikel

$\Rightarrow$ Je Hamiltonov

šahovnica 3×4

šahovski konjiček

ali lahko obišče vsa polja in konča na začetku

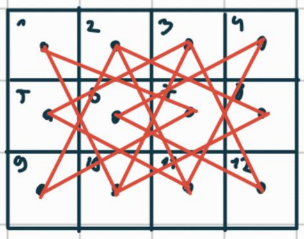
ali lahko vsaj obišče vsa polja

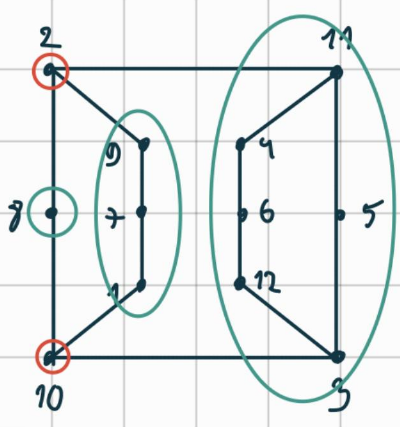
v obeh primerih vsako polje le enkrat

$G = (V, E)$

V = polja šahovnice

$u \sim v \iff$ lahko skoči iz u na v



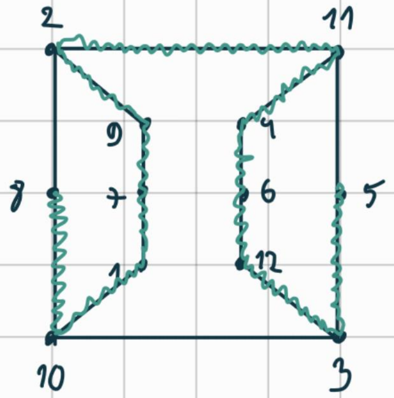


$S = \{2, 10\}$

$|S| = 2$

$G \setminus S$ ima 3 komponente

⇒ G ni Hamiltonov ⇒ Ni Hamiltonovega cikla



Ima pa Hamiltonovo pot

Diracov izrek: G graf, $|V(G)| = n \geq 3$, $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$

⇒ G ima Hamiltonov cikel

G graf, $|V(G)| = n \geq 3$, $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$

Dokaži: G ima Hamiltonovo pot

~~Od prej vemo, da je G povezan, ker $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$.~~

Naredimo graf G' tako, da grafu G dodamo eno novo vozlišče v in ga povežemo z vsemi: $G' = G * v$

v ima stopnjo n, ostalim pa se stopnja poveča za 1, torej $\frac{n+1}{2}$.

$|V(G')| = n+1$

$\delta(G') \geq \frac{n+1}{2} = \frac{|V(G')|}{2}$

Po Diracovem izreku ima G' Hamiltonov cikel.

$C = v v_1 \cdots v_n$

$P = v_1 \cdots v_n$

Imamo torej Hamiltonovo pot v G.

DREVESA

Naj bo T drevo na k vozliščih. Dokažite, da vsak graf z min. stopnjo vsaj $k-1$ vsebuje podgraf, izomorfen drevesu T.

Uporabimo indukcijo na k.

$k = 1$:

$T = \bullet$

min. st. $= 0$

Poljuben graf z min. st. 0 vsebuje vozlišče. To je izomorfno T.

Naj ima T k vozlišč in naj trditev velja za drevesa z manj kot k vozlišči.

Naj bo G tak, da je $\delta(G) \geq k-1$.

Naj bo x list v T in $T' = T - x$.

Lahko najdemo podgraf izomorfen T' v G po I.P.

Naj bo y sosed x v T.

$f(y)$ ima znotraj $f(T')$ največ $k-2$ sosedov, ker $|V(T')| = k-1$.

$\Rightarrow \exists z \in V(G) \setminus V(f(T'))$: $z f(y) \in E(G)$

Razširimo f z $f(x) := z$.

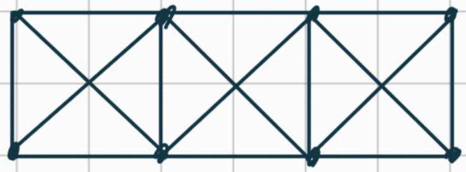
$\Rightarrow T \cong T' \cup \{ z f(y) \}$

RAVNINSKI GRAFI

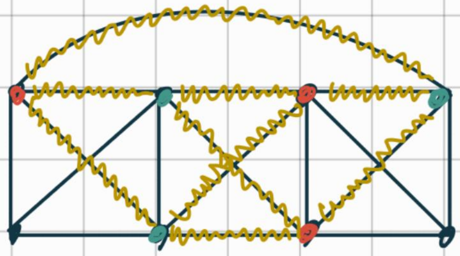
Graf je ravninski, če ga lahko v ravnino narišemo tako, da se povezave ne sekajo.

Kuratowski: G je ravninski $\Leftrightarrow$ G ne vsebuje subdivizije $K_{3,3}$ ali K_5

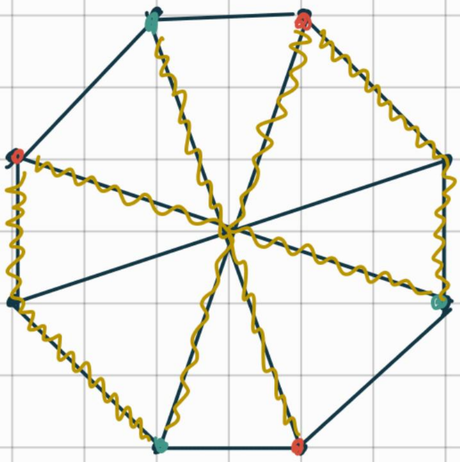
G_1 :



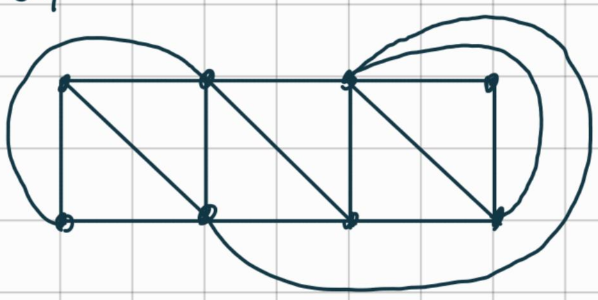
G_2 :



G_3 :



G_1 :



$\Rightarrow$ Je ravninski.

G_3 :

Imamo subdivizijo $K_{3,3}$.

$\Rightarrow$ Ni ravninski.

G_2 :

Imamo $K_{3,3}$.

$\Rightarrow$ Ni ravninski.

G povezan ravninski in vložen v ravnino

$n = |V(G)|$
$m = |V(G)|$
$f = |F(G)|$

Eulerjeva formula: $n - m + f = 2$

G povezan: $m \leq 3n - 6$

g ožina G

G povezan: $m \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$

G povezan dvodelen: $m \leq 2n - 4$

---

n_i … # vozlišč stopnje i
f_i … # lic dolžine i

Lema o rokovanju:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg v = \sum_{i \geq 1} i \cdot n_i$$

$$2m = \sum_{i \geq 3} i \cdot f_i$$

Pokažite, da ima povezan kubičen graf, vložen v ravnino, pri katerem so vsa lica 5 ali 6 kotniki, natanko 12 5 kotnikov.

Fuleren … povezan kubičen graf, vložen v ravnino, pri katerem so vsa lica 5 ali 6 kotniki

$n_3 = n$
$f_5 + f_6 = f$

Euler:

$$n - m + f = 2$$

Rokovanje:

$$2m = 3n_3$$
$$2m = 5f_5 + 6f_6$$

$$6n - 6m + 6f = 12$$
$$4m - 6m + 6f = 12$$
$$-2m + 6f = 12$$
$$-5f_5 - 6f_6 + 6f = 12$$
$$-5f_5 - 6f_6 + 6f_6 + 6f_5 = 12$$
$$f_5 = 12$$

Naj bo G regularen povezan graf stopnje $p \geq 3$, vložen v ravnino tako, da imajo vsa lica isto dolžino $q \geq 3$.

Koliko je lahko (p, q)?

$$n = n_p$$
$$f = f_q$$

$$n - m + f = 2$$
$$2m = p n_p = p \cdot n$$
$$2m = q \cdot f_q = q \cdot f$$

$$n = \frac{2m}{p}$$
$$f = \frac{2m}{q}$$

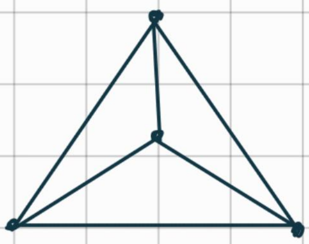
$$\frac{2m}{p} - m + \frac{2m}{q} = 2$$
$$\frac{2}{p} - 1 + \frac{2}{q} = \frac{2}{m}$$
$$\frac{2}{p} + \frac{2}{q} = \frac{2}{m} + 1$$

p	q	$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}$	
3	3	$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$	✓
3	4	$\frac{2}{3}+\frac{2}{4}=\frac{14}{12}$	✓
4	3		✓
3	5	$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{5}$	✓
5	3		✓
3	6	$\frac{2}{3}+\frac{2}{6}=1$	//
4	4	$\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=1$	//

$$m = \frac{2}{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}$$

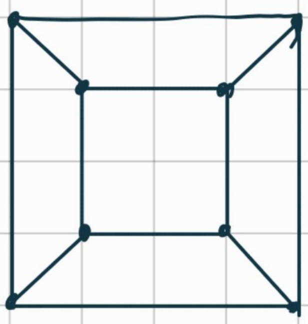
$p=3,\ q=3$:

$$\frac{2}{m}+1=\frac{4}{3}$$
$$\frac{2}{m}=\frac{1}{3}$$
$$m=6$$

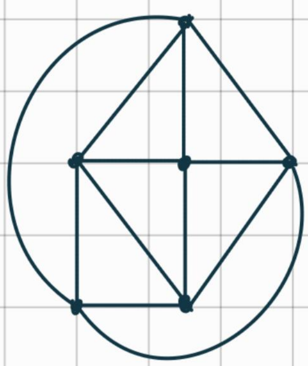


$p=3,\ q=4$:

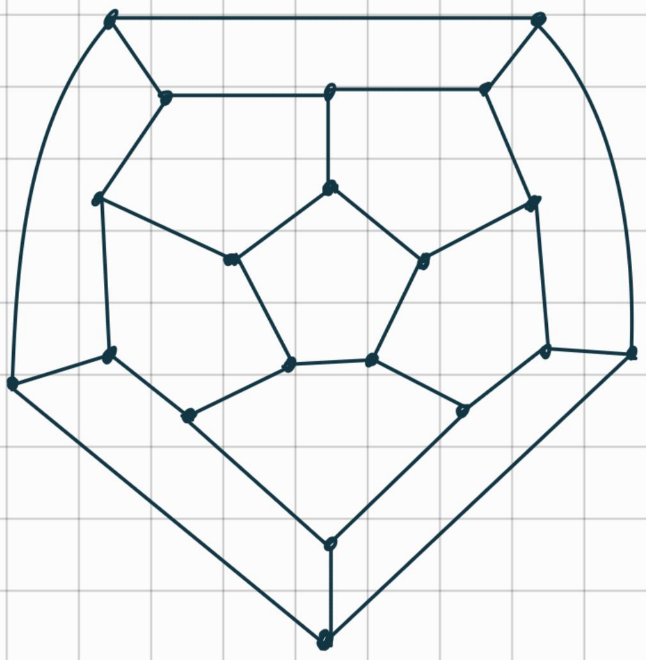
$$m=2$$



$p=4,\ q=3$:



$p=3,\ q=5$:



Dodekaeder.

$p=5,\ q=3$:

Ikozaeder.

Pokažite, da ima vsak povezan ravninski graf vsaj eno vozlišče stopnje največ 5.

$n = |V(G)|$
$m = |E(G)|$
$f = |F(G)|$

Ker je G ravninski, je $m \leq 3n-6$.

Denimo, da so vsa vozlišča stopnje vsaj 6.

$$2m = \sum_{v \in V} \deg v \geq \sum_{v \in V} 6 = 6n$$

$m \geq 3n$

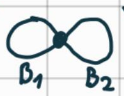
VPETA DREVESA

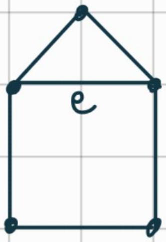
$\tau(G)$ ... # vpetih dreves grafa G

$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G/e)$

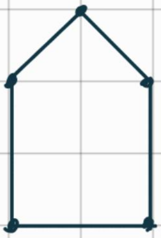
$\tau(\text{drevo}) = 1$

$\tau(\text{cikel}) = n$

$\tau($  $) = \tau(B_1) \cdot \tau(B_2)$



$G_1 = G - e$:



$\tau(G_1) = 5$

$G_2 = G/e$:

$$\tau(G_2) = \tau(C_2) \cdot \tau(C_3) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\tau(G) = \tau(G_1) + \tau(G_2) = 5 + 6 = 11$$

BARVANJE VOZLIŠČ GRAFOV

$\chi(G) = 2 \iff G$ dvodelen in ima vsaj eno povezavo

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \;; & n \text{ sod} \\ 3 \;; & n \text{ lih} \end{cases}$$

$$\chi(K_n) = n$$

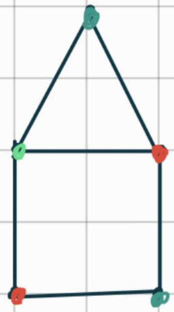
$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

velikost največje klike

G ni lih cikel ali podgraf $\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$

$H \leq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G)$

G_1:

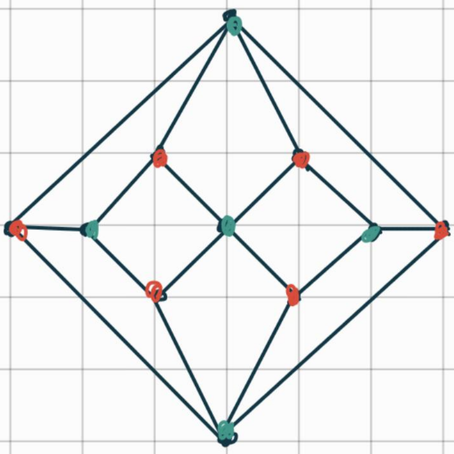


lih cikel $\Rightarrow \chi(G_1) \geq 3$

pobarvali smo ga $\Rightarrow \chi(G_1) \leq 3$

$\Rightarrow \chi(G_1) = 3$

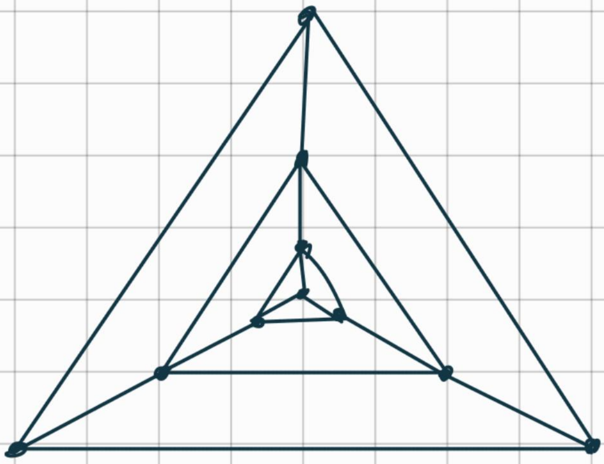
G_2:



dvodelen

$\Rightarrow \chi(G_2) = 2$

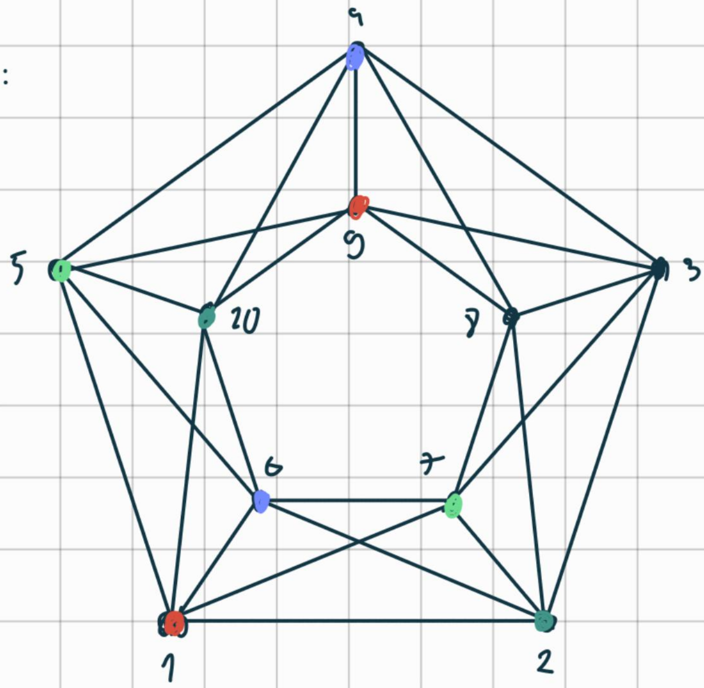
G_3:



$K_4 \subseteq G_3 \Rightarrow \chi(G_3) \geq 4$
$\Delta(G_3) = 4 \Rightarrow \chi(G_3) \leq 4$

$\Rightarrow \chi(G_3) = 4$

G_4:



$\omega(G_4) = 4 \Rightarrow \chi(G_4) \geq 4$
$\Delta(G_4) = 5 \Rightarrow \chi(G_4) \leq 5$

1,2,6,7 so K_4
1,6,5,10 so K_4
5,10,4,9 so K_4
4,9,8,3 so K_4

ne moremo samo s 4 barvami

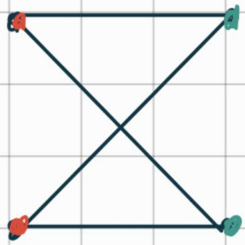
$\Rightarrow \chi(G_4) = 5$

$\chi(\overline{C_n}) = ?$ za $n \geq 3$

$n = 3$:

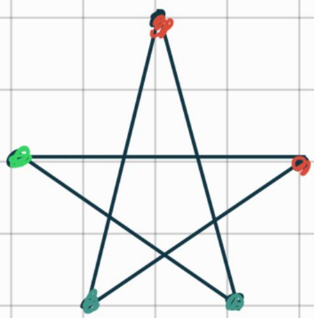
$\chi(\overline{C_3}) = 1$

$n = 4$:



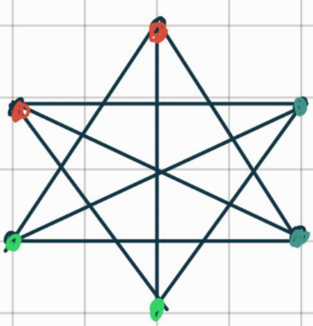
$\chi(\overline{C_4}) = 2$

$n = 5$:



$\chi(\overline{C_5}) = 3$

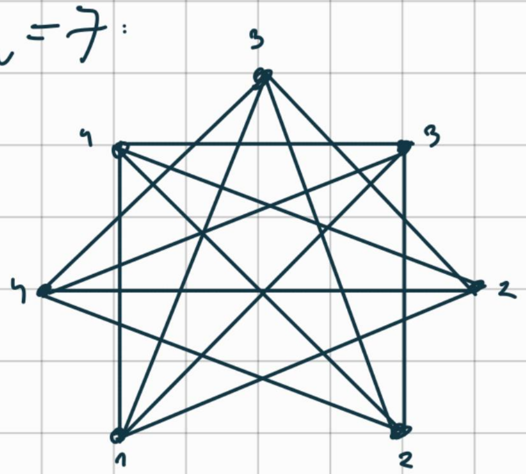
$n = 6$:



$\chi(\overline{C_6}) \geq 3$ (vsebuje trikotnik)

$\chi(\overline{C_6}) = 3$

$n=7$:



$\chi(\overline{C_7}) \geq 3$ (vsebuje lih cikel)
$\chi(\overline{C_4}) \leq 4$ ($\Delta(\overline{C_4}) = 4$)

$\chi(\overline{C_7}) = 4$

Trditev: $n \geq 4$:

$$c : V(\overline{C_n}) \to \mathbb{N}$$
$$v_i \mapsto \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$$

c je dobro barvanje grafa $\overline{C_n}$

Dokaz: v_{2i}, v_{2i+1} sta barve i in nista sosednji

$\Rightarrow \chi(\overline{C_n}) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

$n = 2k$: $v_1, v_3, \dots, v_{2k-1}$ tvorijo kliko K_k

$\Rightarrow \chi(\overline{C_{2k}}) \geq k$

$\Rightarrow \chi(\overline{C_{2k}}) = k$

$n = 2k+1$: $v_1, v_3, \dots, v_{2k-1}$ tvorijo kliko K_k
$v_2, v_4, \dots, v_{2k}$ tvorijo kliko K_k
vsako kliko pobarvamo s k barvami
ostane nam vozlišče v_{2k+1}
pobarvati ga moramo z novo barvo

$\Rightarrow \chi(\overline{C_{2k+1}}) \geq k+1$

$\Rightarrow \chi(\overline{C_{2k+1}}) = k+1$

$\rightsquigarrow \chi(\overline{C_n}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Izrek 4 barv: G ravninski graf $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$

Izrek 6 barv: G ravninski graf $\Rightarrow \chi(G) \leq 6$

Dokaz z indukcijo na $|V(G)|$ ...

Če je $|V(G)| \leq 6$, je očitno.

Naj bo G graf in $|V(G)| = n+1$. Ker je G ravninski graf, obstaja v G vozlišče v stopnje največ 5.

$G' = G - v$

G' je še vedno ravninski. Po I.P. lahko G' pobarvamo z največ 6 barvami.

Ker je v stopnje največ 5, zanj ostane vsaj ena barva.

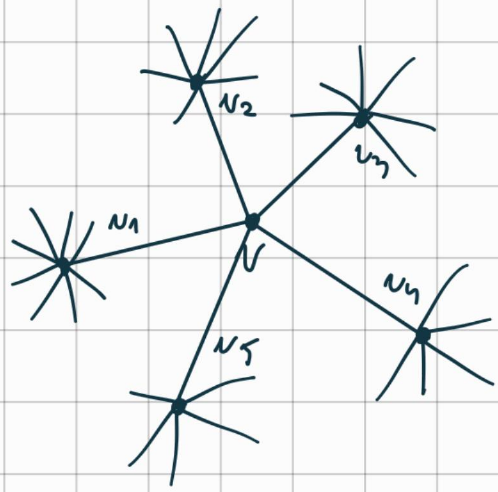
Izrek 5 barv: G ravninski graf $\Rightarrow \chi(G) \leq 5$

Dokaz z indukcijo na $|V(G)|$ ...

Če je $|V(G)| \leq 5$, je očitno.

Naj bo G graf in $|V(G)| = n+1$. Če v G obstaja vozlišče stopnje največ 4, dokažemo na isti način kot prej.

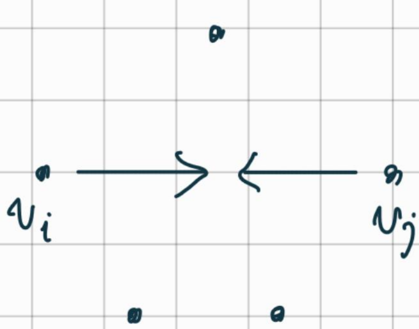
Recimo, da je torej $\delta(G) \geq 5$. Obstaja vsaj eno vozlišče v stopnje 5, ker je G ravninski.



Naj bodo $v_1, \dots, v_5$ sosedi od G.

Vsi sosedi ne morejo biti vsi paroma povezani, saj bi dobili K_5 in torej G ne bi bil ravninski. Torej vsaj dve vozlišči v_i in v_j nista povezani med sabo.

$H = G - v \;/\; v_i = v_j$ (združimo v_i in v_j)



H je še vedno ravninski in $|V(H)| = n-1$. Po I.P. ga lahko pobarvamo s 5 barvami. Ker so sosedi $v_1, \dots, v_5$ pobarvani z največ 4 različnimi barvami, za v ostane še ena barva.

BARVANJE POVEZAV GRAFOV

$\chi'(G)$ ... kromatični indeks

$\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G)+1\}$

$P(n,k)$ je dvodelen $\iff$ n sod in k lih

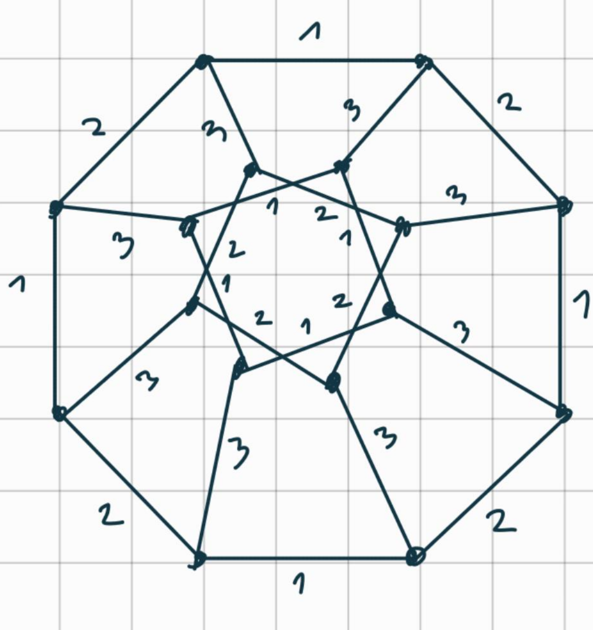
$\chi'(P(4n,3)) = ?$

$P(4n,3)$ je dvodelen.

$\Rightarrow \chi'(P(4n,3)) = \Delta(P(4n,3)) = 3$

$\chi'(P(4n,2)) = ?$

Možnosti sta le 3 in 4.



Zunanji cikel izmenično z dvema barvama.
Notranji cikel izmenično z dvema barvama.
Prečke s tretjo barvo.

$\Rightarrow \chi'(P(4n,2)) = 3$

Izrek: G kubičen Hamiltonov graf $\Rightarrow$ G je razreda I

$(\Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G) = 3)$

Poiščemo Hamiltonov cikel in ga izmenično pobarvamo z dvema barvama (vemo, da je cikel sod, saj je graf kubičen in ima sodo število vozlišč).

Preostale povezave pobarvamo s tretjo barvo.

$\Rightarrow \chi'(G) \leq 3$

$\Rightarrow \chi'(G) = 3$