DVANAJSTERA POT

$f: N \to K$, $|N| = n$, $|K| = k$

ločimo N	ločimo K	poljubne	injektivne	surjektivne
da	da	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k! \cdot S(n,k)$
ne	da	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$
da	ne			
ne	ne			

---

5 pivcev – k
12 vrčkov piva – n

a) različne vrste piva v vrčkih
b) povsod ista vrsta piva
c) a + vsak vsaj enega
d) b + vsak vsaj enega

a) $k^n = 5^{12}$
b) $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{12+5+1}{5-1} = \binom{16}{4}$
c) $k! \cdot S(n,k) = 5! \cdot S(12,5)$
d) $\binom{n-1}{k-1} = \binom{12-1}{5-1} = \binom{11}{4}$

$9699690 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

Na koliko načinov lahko to zapišemo kot produkt dveh ali več faktorjev, večjih od 1, če je vrstni red pomemben?

Fiksiramo K = faktorji, $k = |K|$.

N = praštevilski faktorji, $n = |N|$

Štejemo surjektivne funkcije $f: N \to K$, ločimo oboje.

$k! \cdot S(n,k)$

Odgovor je:

$$\sum_{k=2}^{8} k! \cdot S(8,k) = 545\,834$$

Mečemo kovanec.

A ... pade številka
B ... pade slika

AAABBABABBBBAABAA

AA ... 4x
BB ... 4x
AB ... 4x
BA ... 4x

16

Kovanec vržemo 15x.

AA ... 2x
AB ... 3x
BA ... 4x
BB ... 5x

$\overline{}$ 14

Koliko je takih zaporedij?

AB se pojavi 3x, BA pa 4x
$\Rightarrow$ Zaporedje se začne z B in konča z A

B A B A B A

Ostane še:

2× A
5× B

A:

Kroglice so A-ji, jih ne ločimo: $n=2$
Škatle so mesta, jih ločimo: $k=4$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{2+4-1}{4-1} = \binom{5}{3} = 10$$

B:

$n=5$
$k=4$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

$\# = 56 \cdot 10 = 560$

NAČELO VKLJUČITEV IN IZKLJUČITEV

A, B, C končne množice

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

Koliko je števil 1-1000, ki so deljivi z vsaj enim od 6, 7 in 10.

$$A_i = \{k \in [1000];\ i \mid k\}$$

$$|A_6 \cup A_7 \cup A_{10}| = *$$

$$|A_6| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$$
$$|A_7| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$$
$$|A_{10}| = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100$$

$$|A_6 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{lcm}(6,7)} \right\rfloor = 23$$
$$|A_6 \cap A_{10}| = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{lcm}(6,10)} \right\rfloor = 33$$
$$|A_7 \cap A_{10}| = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{lcm}(7,10)} \right\rfloor \quad 14$$

$$|A_6 \cap A_7 \cap A_{10}| = \left\lfloor \frac{1000}{\mathrm{lcm}(6,7,10)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor = 4$$

$$* = 166 + 142 + 100 - 23 - 33 - 14 + 4 = 342$$

---

a) Koliko je permutacij iz S_6, ki imajo vsaj eno liho fiksno točko?

b) Koliko je permutacij iz S_6, ki imajo natanko eno liho fiksno točko?

a) $A_i = \{\pi \in S_6 \,;\, \pi(i) = i\}$

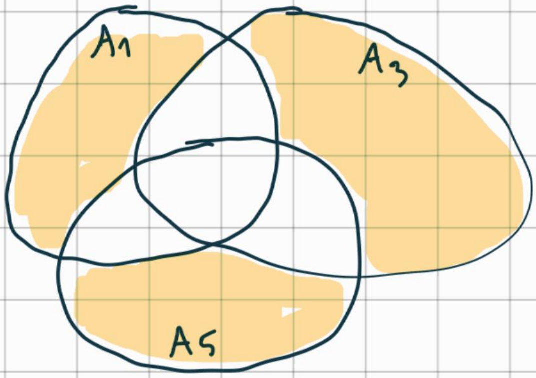
$|A_i| = 5!$

$|A_i \cap A_j| = 4! \qquad i \neq j$

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 3! \qquad i \neq j \neq k$

$|A_1 \cup A_3 \cup A_5| = 3 \cdot 5! - 2 \cdot 4! + 3! = 294$

b) 1. način:



$|A_1 \cup A_3 \cup A_5| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + 2|A_1 \cap A_3 \cap A_5| =$

$= 294 - 3!(3 \cdot 4 + 2) = 294 - 60 = 234$

2. način:

$B_1 = \{\pi \in S_6 \,;\, \pi(1) = 1,\ \pi(3) \neq 3,\ \pi(5) \neq 6\}$

$B_3 = \dots$

$B_5 = \dots$

disjunktne

$|B_1 \cup B_3 \cup B_5| = |B_1| + |B_3| + |B_5| =$

1 in 3 sta fiksni

1 je fiksna ali 1 in 5 sta fiksni

$|B_1| = 5! - |C_3 \cup C_5| = 5! - 4! - 4! + 3! = 78$

$|B_3| = \dots$

$|B_5| = \dots$

5-mestna števila

a) Vsaj ena števka je 9.
b) Vsaj ena števka je 9 ali 8.
c) Vsaj ena števka je 9 in vsaj ena 8.

$A = \{$petmestna števila z vsaj eno $9\}$
$B = \{$petmestna števila z vsaj eno $8\}$

a) $|A| = \text{vse} - \text{brez } 9 = 9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4 = 37512$

b) $\text{vse} - \text{brez } 9 \text{ in } 8 = 9 \cdot 10^4 - 7 \cdot 8^4 = 61328 = |A \cup B|$

c) $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 2 \cdot 37512 - 61328 = 13696$

Števila med 1 in 10^9, ki vsebujejo 123 (lahko večkrat).

_ _ _ 1 2 3 _ _ _

A_i = zaporedja, kjer se 123 začne na mestu i

$$\# = \left|\bigcup_{i=1}^{7} A_i\right|$$

$|A_i|$ = imamo 123 in še 6 prostih mest $= 10^6$

$$|A_i \cap A_j| = \begin{cases} 0 ; & |i-j| < 3 \\ 10^3 ; & \text{sicer} \end{cases}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \begin{cases} 1 ; & \{i,j,k\} = \{1,4,7\} \\ 0 ; & \text{sicer} \end{cases}$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{7} A_i\right| = \sum_{i=1}^{7}|A_i| - \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=i+1}^{7}|A_i \cap A_j| + 1 =$$

$$= 7\cdot 10^6 - \overset{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{4\cdot 5}{2}}\cdot 10^3 + 1 = 6990001$$

---

a) Na koliko načinov lahko posedemo 3 poročene pare okoli okrogle mize?

b) Isto, ampak mož in žena ne sedita skupaj.

a) $(6-1)! = 120$ (ciklične permutacije)

b) vse − vsaj dva sedita skupaj

A_i − i-ti par sedi skupaj

$$|A_i| = \underset{}{\overset{\text{MŽ/ŽM}}{2}} \cdot \overset{\text{vrstni red ostalih in para}}{4!} = 48$$

$$|A_i \cap A_j| = \overset{\text{MŽ/ŽM}}{2}\cdot \overset{\text{MŽ/ŽM}}{2} \cdot \overset{\text{4 enote ciklično uredimo}}{(4-1)!} = 24$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2\cdot 2\cdot 2\cdot (3-1)! = 16$$

$$\# = 120 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 120 - 3\cdot 48 + 3\cdot 24 - 16 = 32$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

Koliko je celoštevilskih rešitev enačbe?

a) $x_i \geq 0$
b) $x_i \geq 1$
c) $0 \leq x_i \leq 7$
d) $2 \leq x_1 \leq 6,\ -2 \leq x_2 \leq 1,\ 0 \leq x_3 \leq 6,\ 3 \leq x_4 \leq 8$

a) šibke kompozicije:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{18+4-1}{4-1} = \binom{21}{3} = 1330$$

b) kompozicije:

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{18-1}{4-1} = \binom{17}{3} = 680$$

c) vse šibke kompozicije − prevelike:

$A_i = \{ \text{kompozicija} ; x_i > 7 \}$

$\Rightarrow$ vse $- |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$

$|A_i|$: $x_i \geq 8$

$$\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$$

$x_1 = 8 + x_1'$ in rešujemo enačbo
$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 18 - 8 = 10$

$|A_i \cap A_j|$ za različna i,j:

$x_i \geq 8$, $x_j \geq 8$

$18 - 2 \cdot 8 = 2$

$$\binom{2+4-1}{4-1} = \binom{5}{3} = 10$$

$|A_i \cap A_j \cap A_k|$ za različne i,j,k:

$x_i \geq 8$, $x_j \geq 8$, $x_k \geq 8$

ne obstaja

$\Rightarrow 0$

$\Rightarrow$ vse − prevelike $= 1330 - 4\cdot 286 + \binom{4}{2}\cdot 10 - 0 = 246$

d) $y_1 = x_1 - 2$
$y_2 = x_2 + 2$
$y_3 = x_3$
$y_4 = x_4 - 3$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3 = 18 - 3 = 15$

$0 \leq y_1 \leq 4$
$0 \leq y_2 \leq 3$
$0 \leq y_3 \leq 6$
$0 \leq y_4 \leq 5$

Rešujemo podobno kot pri c), samo da je več dela.

$\Rightarrow 20$?

Pokaži: $k! \cdot S(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$

L: Število surjekcij iz $[n]$ v $[k]$.

D: Uporabimo načelo vključitev in izključitev.

$k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1} + 0$

vse funkcije $[n] \to [k]$

izberemo element, ki ga damo stran

vse funkcije $[n] \to [k-1]$

Od vseh funkcij odštevamo slabe (nesurjektivne).

Na koliko načinov lahko pobarvamo zastavo, ki ima n navpičnih pasov z m barvami?

a) Vsako barvo vsaj enkrat.
b) Dva zaporedna pasova nimata iste barve.
c) (a) in (b) hkrati

a) Štejemo surjektivne preslikave iz pasov v barve:
$[n] \to [m]$

$m! \cdot S(n,m)$

b) izbira za prvo polje $\cdot$ izbire za ostala =

$= m \cdot (m-1)^{n-1}$

c) $A_i = \{$ surjektivna barvanja ; i in $i+1$ iste barve $\}$

$\# = m! \cdot S(n,m) - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| = ?$

$|A_i| = m! \cdot S(n-1,m)$ ~ združimo ta dva pasova

$|A_i \cap A_j| = m! \cdot S(n-2,m)$

$\# = m! \cdot S(n,m) - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n-1}{i} m!\, S(n-i,m) =$

$= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} \binom{n-1}{i} m!\, S(n-i,m)$

Na drug način:

$B_i = \{$ barvanja, ki dva zaporedna pasova nimata iste barve in ne uporabimo i-te barve $\}$

$$\# = \text{vse} - \left|\bigcup_{i=1}^{m-1} B_i\right|$$

$$|B_i| = (m-1)(m-2)^{n-1}$$

$$|B_i \cap B_j| = (m-2)(m-3)^{n-1}$$

$$\# = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)(m-i-1)^{n-1}$$

Izkaže se:

$$\# = n! \cdot S(m-1, n-1)$$???