$M = \{1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, k^{n_k}\}$, $n_1 + n_2 + \dots + n_k$

$\#$ permutacij $M = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$

Koliko različnih besed lahko sestavimo iz ABRAKADABRA?

A : 5
B : 2
R : 2
K : 1
D : 1

$\overline{11}$

$\Rightarrow \frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!}$

Koliko poti od $(2,1)$ do $(7,4)$, če so dovoljeni koraki desno in gor?

3x gor
5x desno

$\Rightarrow \frac{8!}{3! \cdot 5!}$

Dovolimo še korake diagonalno. Koliko poti je zdaj?

$0 \times \nearrow$: $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

$1 \times \nearrow$: $\binom{7}{1,2,4} = 105$

$2 \times \nearrow$: $\binom{6}{2,1,3} = 60$

$3 \times \nearrow$: $\binom{6}{3,0,2} = 10$

$+ : 231$

Pred blagajno je $m+n$ ljudi. Veselica stane 5 EUR.

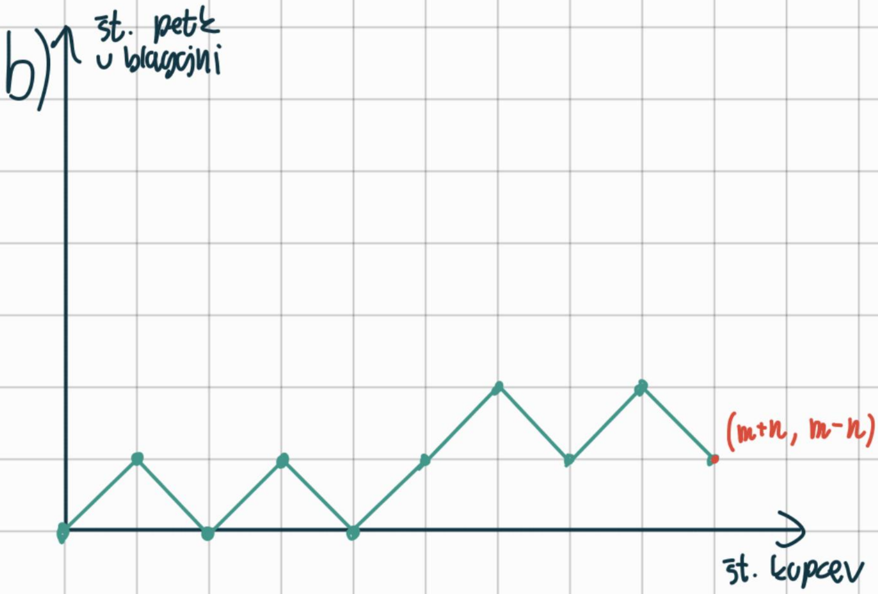
m : bankovec za 5 EUR
n : bankovec za 10 EUR

a) Na koliko načinov se lahko razporedijo v vrsto?

b) Na začetku je blagajna prazna. Na koliko načinov se lahko razporedijo, da lahko takoj vrne denar?

a) $\binom{m+n}{m,n}$

b)

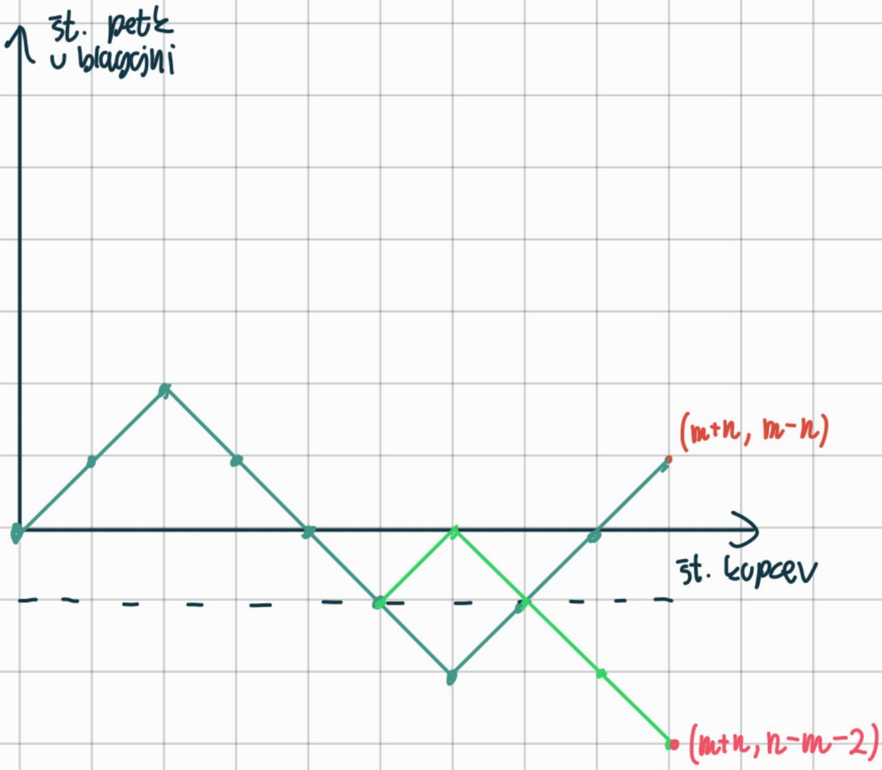


PDPDPPDPD

$\Leftrightarrow$ Število poti od $(0,0)$ do $(m+n, m-n)$, kjer ne gre pot pod x-os.

A ... ustrezne poti (ne gredo pod $y=0$)
B ... neustrezne poti (gredo pod $y=0$)
U ... vse poti

$|A| = |U| - |B|$



Ko prvič pridemo na $y=-1$, prezrcalimo pot.

C ... poti od $(0,0)$ do $(m+n, n-m-2)$

$|B| = |C|$

$|U| = \binom{m+n}{m,n}$ (iz (a))

$|C|$:

$m' \times$ gor
$n' \times$ dol

$m+n = m' + n'$
$n-m-2 = m' - n'$

$$\Rightarrow m' = n-1$$
$$n' = m+n-n+1 = m+1$$

$$|C| = \binom{m+n}{n-1,\, m+1}$$

$$|A| = |U| - |C| = \binom{m+n}{m,n} - \binom{m+n}{n-1,\, m+1} =$$

$$= \frac{(m+n)!}{m!\cdot n!} - \frac{(m+n)!}{(n-1)!\cdot(m+1)!} = (m+n)! \cdot \frac{(m+1)-n}{n!\cdot(m+1)!} =$$

$$= \binom{m+n}{n} \cdot \frac{m+1-n}{m+1}$$

Če je $m=n$:

$$\Rightarrow \binom{2m}{m} \cdot \frac{1}{m+1}$$

RAZČLENITVE

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$
$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$

$p(n) = \#$ razčlenitev n
$p_k(n) = \#$ razčlenitev n s k členi

Ferrersov diagram λ:

1. vrsta: λ_1 krožcev
2. vrsta: λ_2 krožcev

Konjugirana razčlenitev $\bar{\lambda}$:
Ima transponiran Ferrersov diagram

$\lambda = (7,5,3,3,3,1,1)$

Fernsov diagram:

• • • • • • •
• • • • •
• • •
• • •
• • •
•
•

Transponiran Fenrusov diagram:

• • • • • • •
• • • • •
• • • • •
• •
• •
•
•

$\overline{\lambda} = (7,5,5,2,2,1,1)$

Pokaži, da je število razčlenitev največ m členov $p_m(n)$ enako številu razčlenitev n, kjer je največji člen največ m.

A: razčlenitve največ m členov
B razčlenitve, kjer je največji člen največ m

$f: A \to B$
$\lambda \mapsto \overline{\lambda}$

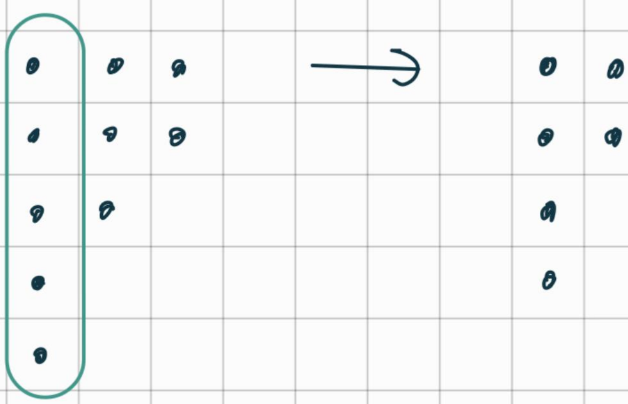
$\lambda \in A$: največ m členov $\Leftrightarrow$ največ m vrstic
$\lambda \in B$: največji člen največ m $\Leftrightarrow$ največ m vrstic

(transponiramo Ferrensov diagram)

$g: B \to A$
$\lambda \mapsto \overline{\lambda}$

$$\underbrace{p_n}\overset{A}{\underbrace{(2n)}} = \underbrace{p}\overset{B}{\underbrace{(n)}}$$

$\lambda = (3,3,2,1,1) \in A$



$f: A \to B$
$$(\lambda_1, \dots, \underset{\substack{\vee \\ 1}}{\lambda_k}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-k}) \longmapsto (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_k - 1)$$

$\underline{f}\,(\underline{\lambda}) \in \underline{B}$

$$\lambda_1 - 1 + \dots + \lambda_k - 1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_k - k =$$
$$= 2m - m + k - k =$$
$$= m$$

$\varphi : B \to A$
$(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_k + 1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-k})$

$g(\lambda) \in A$

Podobno.

BINOMSKI IZREK

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Koeficient pri x^{10} v $(x^2+4)^8$.

$n = 8$
$k = 5$

$\binom{8}{5} (x^2)^5 \, 4^{8-5}$

$\Rightarrow \binom{8}{5} \cdot 4^3$

Koeficienta pri x in x^2 v $(1-4x)^6 \cdot (1+3x)^8$.

$$\sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} (-4x)^i \Big) \Big(\sum_{j=0}^{8} \binom{8}{j} (3x)^j \Big)$$

$1 : a_0 b_0$
$x : a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1$
$x^2 : a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = c_2$

$a_0 = \binom{6}{0} = 1$
$a_1 = -4 \cdot \binom{6}{1} = -24$
$a_2 = \binom{6}{2} \cdot 16 = 240$
$b_0 = \binom{8}{0} = 1$
$b_1 = 3 \cdot \binom{8}{1} = 24$
$b_2 = \binom{8}{2} \cdot 9 = 252$

$c_1 = 1 \cdot 24 + 1 \cdot (-24) = 0$
$c_2 = 1 \cdot 252 + (-24)(24) + 1 \cdot 240 = -84$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$$

Koliko podmnožic sode moči ima množica z n elementi?

Če je n lih in je $A \subseteq [n]$ soda, potem je A^c lih.

f: sode $\to$ lihe
$A \mapsto A^c$

Če je n sod, gledamo $[n] \setminus \{n\}$. TODO

STIRLINGOVA ŠTEVILA 2. VRSTE

$S(n,k)$ ... število razdelitev $[n]$ na k blokov

$S(n,0) = \delta_{n,0}$
$S(n,1) = S(n,n) = 1$
$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$

št. surjekcij $[n] \to [k]$: $k! \cdot S(n,k)$

---

6 barvic različnih barv
barvamo ploskve izgleda kocke z 3 barvami

izberemo 3 barve : $\binom{6}{3}$
surjekcije $\underset{\text{ploskve}}{[6]} \to \underset{\text{barve}}{[3]}$: $3! \cdot S(6,3)$

$\# = \binom{6}{3} \cdot 3! \cdot S(6,3) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 3! \cdot S(6,3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 90$

Pokaži: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot S(k,m) = S(n+1, m+1)$, $n \geq m$

D: $[n+1]$ damo v $m+1$ blokov

L: $\underbrace{n+1 \quad \underbrace{O \; O \cdots O}_{m}}_{m+1}$

En člen vsote pomeni, da izberemo k elementov izmed n elementov in jih razdelimo v k blokov ($S(k,m)$). Ostale damo v blok z elementom $n+1$. Ko k preteče $1, \dots, n$, dobimo vse možne razdelitve $[n+1]$ v $m+1$ blokov.

$d(n,k)$ ... število permutacij iz S_n, ki imajo natanko k negibnih točk

$d(0,0) = 1$
$d(n,k) = 0$ za $k < 0$

$d(n,n) = 1$ (id)
$d(n,n-1) = 0$
$d(n,n-2) = \binom{n}{2}$

$$f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k)\cdot(n-k-1) + f(n-1,k+1)\cdot(k+1)$$

za $n \geq 1$, $k \geq 0$

n je negiben $\qquad (n)\overbrace{(\ )\cdots(\ )}^{k-1}$

n dodamo v cikel dolžine 1 $\qquad (x\ n)\overbrace{(\ )\cdots(\ )}^{k}$

n dodamo v cikel dolžine več kot 1

$\pi \in S_{n-1}$ ima $k+1$ negibnih točk, izberemo 1 negibno točko in jo dodamo v cikel (n)

$\pi \in S_{n-1}$ ima k negibnih točk $\qquad \overbrace{(\ )\cdots(\ )}^{k}\overbrace{(\ )\cdots(\ )\cdot(\ )}^{n-k-1}$

v enega od ciklov dolžine vsaj 2 dodamo element n

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	1	0	1			
3	2	3	0	1		
4	9		6	0	1	
5		$\square$		10	0	1

$$\begin{aligned} f(5,1) &= f(4,0) + f(4,1)\cdot 3 + f(4,2)\cdot 2 = \\ &= 9 + 3\cdot f(4,1) + 12 = \\ &= 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4,1) &= f(3,0) + f(3,1)\cdot 2 + f(3,2)\cdot 2 = \\ &= 2 + 3\cdot 2 + 0\cdot 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} f(n,k) = n!$$

BELLOVA ŠTEVILA

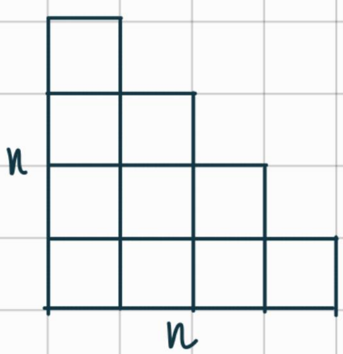
$B(n)$ ... število razdelitev $[n]$ na neprazne bloke

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(n-k)$$

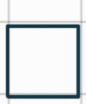
$B(0) = 1$
$B(1) = 1$
$B(2) = 2$
$B(3) = S(3,1) + S(3,2) + S(3,3) = 1+3+1 = 5$
$B(4) = 15$

šahovnica trikotne oblike s stranico n



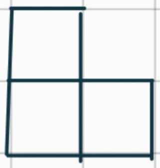
a_n ... število načinov za postavitev trdnjav na trikotno šahovnico $n \times n$, da se ne napadajo (najmanj 0, največ n trdnjav)

$n = 1$:



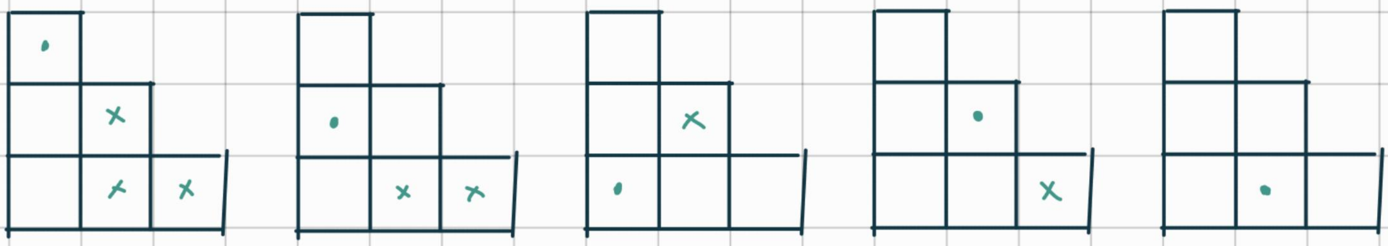
$$a_1 = \overset{0}{1} + \overset{1}{1} = 2$$

$n=2$:



$$a_2 = \overset{0}{1} + \overset{1}{3} + \overset{2}{1} = 5$$

$n=3$:



$$a_3 = \overset{0}{1} + \overset{1}{6} + \overset{2}{7} + \overset{3}{1} = 15$$

$\underline{a_n = B(n+1)}$

Če na diagonalo postavimo natanko i trdnjav, ni več dovoljenih i vrstic, i stolpcev in cela diagonala.

Ostane šahovnica velikosti $n-i-1$.

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a_{n-i-1} + 1$$

n trdnjav na diagonalo

$$a_1 = 2 = B(2) \checkmark$$

I.P.: $a_{n-1} = B(n)$

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a_{n-i-1} + 1 \overset{\text{I.P.}}{=}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B(n-i) + \overset{B(0)}{\overset{\parallel}{1}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(n-1) =$$

$$= B(n+1)$$

LAHOVA ŠTEVILA

$L(n,k)$ ... število razdelitev $[n]$ na k linearno urejenih blokov

$$L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1) \cdot L(n-1,k)$$
za $1 \leq k \leq n-1$

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}$$

Dokaži: $L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1) \cdot L(n-1,k)$

L: # razdelitev na k linearno urejenih blokov

D: 1.) n je v svojem bloku, ostalih $n-1$ pa razdelimo v linearno urejene bloke

2.) n ni v svojem bloku, ostalih $n-1$ razdelimo v k blokov, n pa vrinemo na $n-1+k$ načinov