TEORIJA GRAFOV

Graf G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ množica vozlišč grafa G in $E(G)$ množica povezav grafa G, kjer je $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$

Primer: $G = (V(G), E(G))$

$V(G) = \{x, y, z, w, u, v, t\}$
$E(G) = \{\{x,y\}, \{x,w\}, \{t,u\}, \{y,t\}, \dots\}$

Če ne povemo drugače, bo $|V(G)| < \infty$.

Namesto $\{u,v\}$ pišemo krajše uv.

$e = uv \in E(G)$ ... u in v krajišči povezave e in u in v sta sosednji vozlišči

$u \sim_G v$ ... u je soseden z v v grafu G

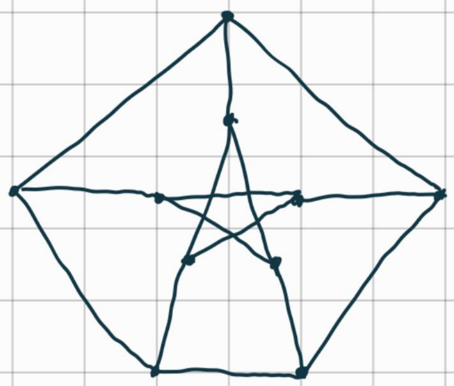
$u \in V(G)$:

$N_G(u) = \{v \, ; \, uv \in E(G)\}$ ... soseščina vozlišča u

$\deg_G(u) = |N_G(u)|$ ... stopnja vozlišča u

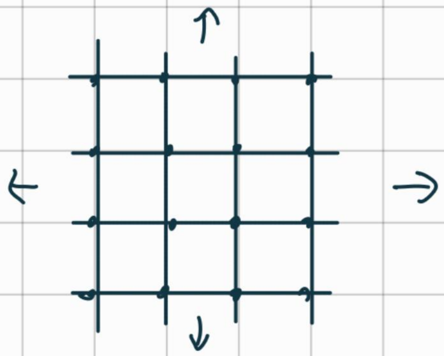
Graf G je regularen, če imajo vsa vozlišča isto stopnjo. Če je ta stopnja r, pravimo, da je G r-regularen graf.

Primer: Petersenov graf P:



P je 3-regularen graf.

Primer:



$$V(G) = \{(i,j) \; ; \; i,j \in \mathbb{Z}\}$$

$$(i,j) \sim (i',j') \overset{\text{def}}{\equiv} |i-i'| + |j-j'| = 1$$

G je 4-regularen graf.

graf $G \longmapsto$ matrika sosednosti $A(G)$ dimenzije $|V(G)| \times |V(G)|$

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1 \; ; & v_i \sim v_j \\ 0 \; ; & \text{sicer} \end{cases}$$

$$A(G) = (A(G))^T$$

Lema o rokovanju:

Če je G graf, potem je $\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2 \cdot |E(G)|$.

Dokaz:

$$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & \cdots & e_m \\ \hline v_1 & & 0 & & \\ v_2 & & 0 & & \\ \vdots & & 0 & & \\ & & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ v_n & & 0 & & \end{array}$$

$$v_i \overset{e_j}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet} v_k$$

V i-ti vrstici je stopnja vozlišča
V j-tem stolpcu sta dve vozlišči (krajišči povezave)

Posledica: Število vozlišč lihe stopnje danega grafa je sodo.

Dokaz: $2 \cdot |E(G)| = \overbrace{\sum_u \deg(u)}^{\text{sodo}} = \overbrace{\sum_{u \text{ sode stopnje}} \deg(u)}^{\text{sodo}} + \sum_{u \text{ lihe stopnje}} \deg(u)$

vse stopnje je sodo

$\Rightarrow \sum_{u \text{ lihe stopnje}} \deg(u)$ je sodo

Graf H je podgraf grafa G, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.

Podgraf H je vpet podgraf, če je $V(H) = V(G)$.

Podgraf H je porojen/induciran, če velja:
$u, v \in V(H)$: $u \sim_G v \Rightarrow u \sim_H v$

NEKAJ DRUŽIN GRAFOV

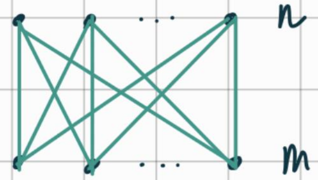
$n \geq 1$: K_n ... polni graf na n vozliščih (vsa vozlišča sosedna)

$n \geq 1$: P_n ... pot na n vozliščih

$$v_1 - v_2 - v_3 \cdots v_{n-1} - v_n$$

$n \geq 3$: C_n ... cikel na n vozliščih ($P_n + v_1 v_n$)

$n,m \geq 1$: $K_{n,m}$ ... polni dvodelni grafi



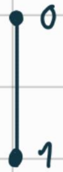
$K_{1,1} = K_2$
$K_{1,2} = P_3$
$K_{2,2} = C_4$

$n \geq 1$: Q_n ... n-kocke

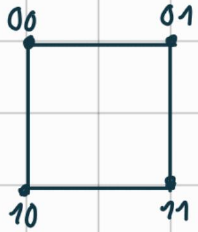
$V(Q_n) = \{0,1\}^n$
$|V(Q_n)| = 2^n$

$b_1 \cdots b_n \sim b_1' \cdots b_n' :\equiv \exists!\, i \in [n] : b_i \neq b_i'$

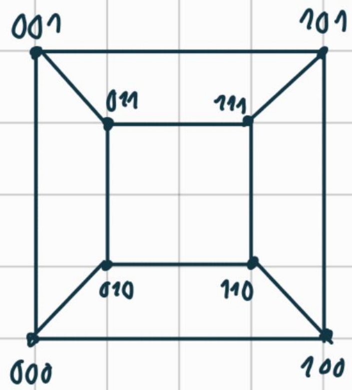
$Q_1 = K_2$:



$Q_2 = C_4$:



Q_3:



$$\sum \deg = 2|E|$$
$$\sum \deg = 2^n \cdot n$$

$$\Rightarrow |E(Q_n)| = n \cdot 2^{n-1}$$

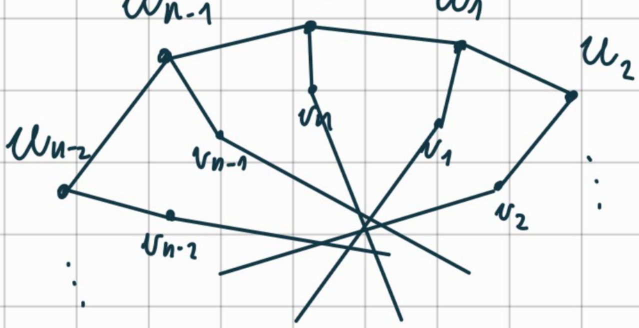
$k < \frac{n}{2}$: $P_{n,k}$ ... posplošeni Petersenovi grafi

vozlišča:

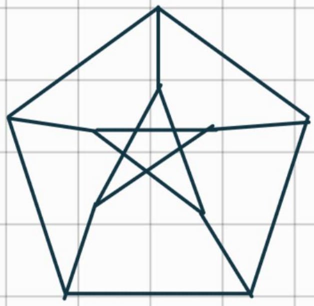
$$\{u_0, \dots, u_{n-1}\} \cup \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$$

povezave:

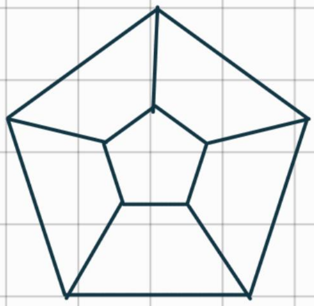
$$\{u_i u_{i-1} ; i \in \mathbb{Z}_n\} \cup$$
$$\{u_i v_i ; i \in \mathbb{Z}_n\} \cup$$
$$\{v_i v_{i+k} ; i \in \mathbb{Z}_n\}$$



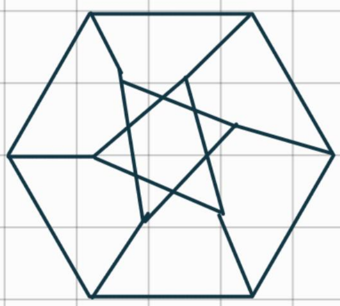
$P_{5,2}$:



$P_{5,1}$:



$P_{6,2}$:



SPREHODI IN POTI V GRAFIH

Sprehod v G je zaporedje vozlišč grafa G, $v_0, v_1, \dots, v_k$, tako, da je $v_i v_{i+1} \in E(G)$ za $i \in [k-1]$.

Sprehod je **enostaven**, če so vse njegove povezave paroma različne.

Pot v G je sprehod s samimi različnimi vozlišči.

pot $\Rightarrow$ enostaven sprehod $\Rightarrow$ sprehod

Če je začetek sprehoda konec sprehoda, je to **sklenjen sprehod**.

Enostaven sklenjen sprehod je sklenjen sprehod s paroma različnimi povezavami.

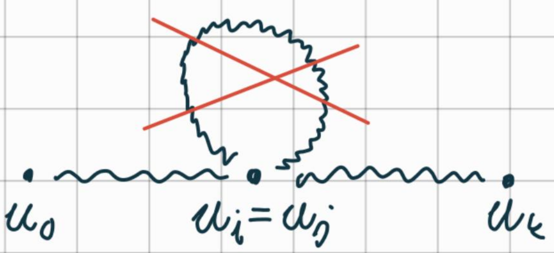
Cikel v G je sklenjen sprehod s samimi različnimi vozlišči (razen začetka in konca).

Lema 1: Če v grafu G obstaja uv sprehod, obstaja tudi uv pot.

Dokaz: Naj bo $u = u_0 u_1 \cdots u_k = v$ sprehod.

Če so vsi u_i paroma različni, je to iskana pot.

Sicer obstajata $i \neq j$, da je $u_i = u_j$. Lahko rečemo $i < j$.

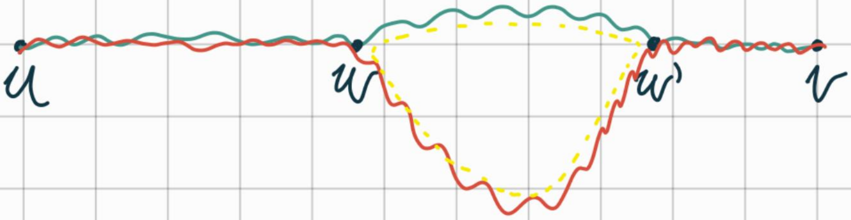


Potem je $u = u_0, \ldots, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_k$ tudi uv sprehod in krajši.

To delamo, dokler ne dobimo uv poti. Po končnem številu korakov dobimo uv pot.

Lema 2: Če v grafu G obstajata dve različni uv poti, potem ima G vsaj en cikel.

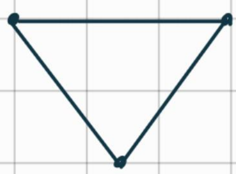
Dokaz: Naj bosta P, Q različni uv poti. Naj bo w prvo vozlišče za P in Q, da naslednje vozlišče ni več skupno. Naj bo w' prvo vozlišče od w naprej po Q, da je tudi na P.



Lema 3: Če v G obstaja sklenjen sprehod lihe dolžine, obstaja v G tudi cikel lihe dolžine.

Dokaz: Naj bo Q sprehod dolžine $2k+1$, $k \geq 1$. Dokažimo z indukcijo po k.

$k=1$:

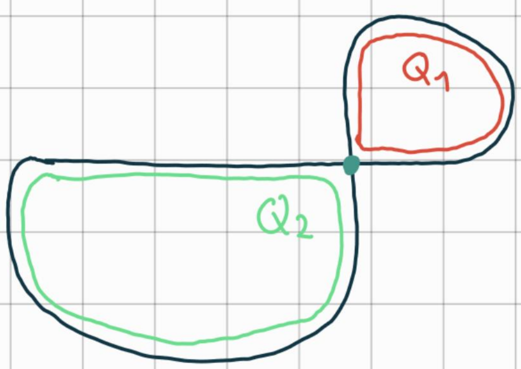


✓

$k \to k+1$:

Če je Q cikel, je že v redu.

Sicer se na Q ponovita dve vozlišči.



Q_1 in Q_2 sta sklenjena krajša sprehoda.

$\underset{\text{lih}}{|Q|} = |Q_1| + |Q_2|$

Eden od njiju je lih, torej po I.P. vsebuje cikel.

Opomba: Za sode sklenjene sprehode to ne velja:

Graf G je **povezan**, če za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ obstaja uv-sprehod (ekvivalentno uv-pot).

Maksimalni podgrafi grafa, ki so povezani, so **komponente**.

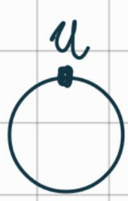
$\Omega(G)$ ... število komponent grafa G

$\Omega(G) = 1 \overset{:}{\Longleftrightarrow} G$ povezan

INAČICE KONCEPTA GRAF

- Lahko dopuščamo vzporedne povezave in zanke.

$E(G) = \{\langle u,v \rangle, \langle u,v \rangle, \dots\}$



$E(G) = \{\langle u,u \rangle, \dots\}$

Graf je **enostaven**, če nima nič od tega. Za nas bodo vsi grafi enostavni.

- $G = (V(G), E(G), w)$, kjer je $w: V(G) \to \mathbb{R}$
  ... uteženi grafi

  $G = (V(G), E(G), \ell)$, kjer je $\ell: E(G) \to \mathbb{R}$
  ... omrežje

- Usmerjeni grafi ali digrafi:
  $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$

- Hipergrafi

RAZDALJA V GRAFIH IN DVODELNI GRAFI

G povezan graf
$u, v \in V(G)$

Razdalja med u in v $d_G(u,v)$ je število povezav v najkrajši uv-poti.

$d_G(u,v) = 0 \iff u = v$
$d_G(u,v) = 1 \iff uv \in E(G)$

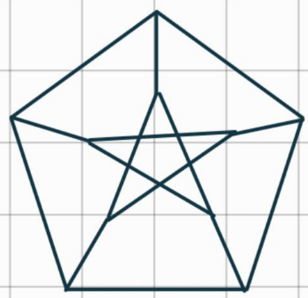
$(V(G), d_G)$ je metrični prostor.

Ekscentričnost vozlišča u $ecc_G(u) = \max_{v \in V(G)} d_G(u,v)$.

Premer grafa $diam(G) = \max_{u \in V(G)} ecc_G(u) = \max_{u,v \in V(G)} d_G(u,v)$.

Polmer grafa $rad(G) = \min_{u \in V(G)} ecc_G(u)$.

Primer:



$$\mathrm{diam}(P_{5,2}) = \mathrm{rad}(P_{5,2}) = 2$$

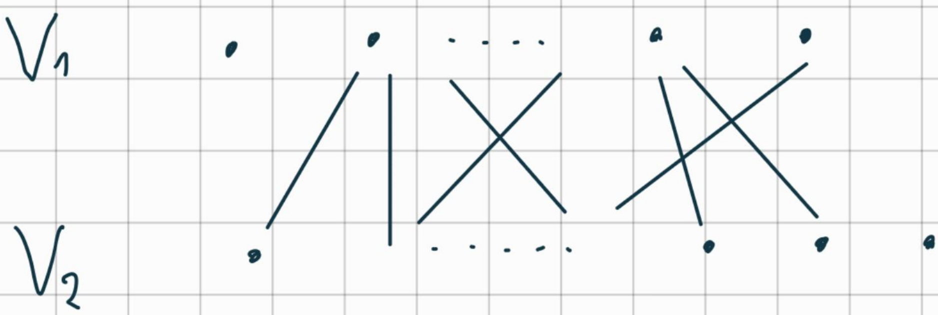
Primer:

$$\mathrm{diam}(P_n) = n-1$$
$$\mathrm{rad}(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

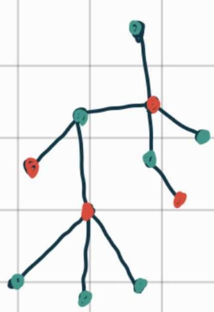
Definicija: Graf G je dvodelen, če obstaja razdelitev $V(G) = V_1 \cup V_2$, tako, da velja:

$$uv \in E(G) \Rightarrow u \in V_1 \text{ in } v \in V_2$$

Primer:

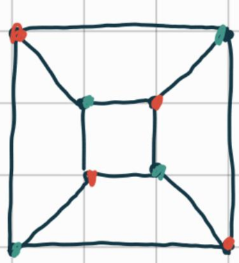


Primer:



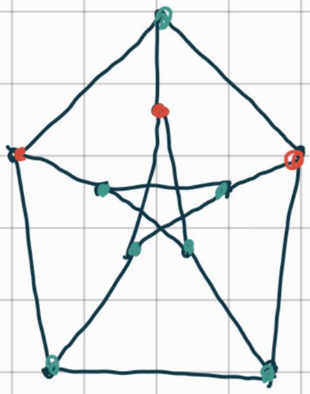
Je dvodelen graf.

Primer:



Je dvodelen graf.

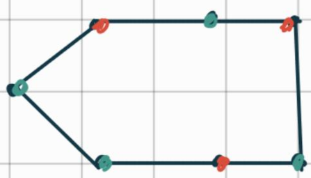
Primer:



Ni dvodelen graf.

Trditev: Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje lihih ciklov.

Dokaz: $(\Rightarrow)$ Recimo, da G vsebuje lih cikel.



Potem G ni dvodelen.

$(\Leftarrow)$ Naj bo G graf brez lihih ciklov. Brez škode za splošnost je G povezan.

Izberimo poljuben $x \in V(G)$.

$V_1 := \{ u \in V(G) ; d(x,u) \text{ soda} \}$
$V_2 := \{ u \in V(G) ; d_G(x,u) \text{ liha} \}$

$\Rightarrow x \in V_1$

$V(G) = V_1 \cup V_2$ disjunktna

Če dokažemo, da znotraj V_1 in znotraj V_2 ni povezav, bo G dvodelen.

$u, v \in V_1$:

(i) $d(x,u) \neq d(x,v)$ (BŠS: $<$)

Če bi obstajala $uv \in E(G)$, potem bi
$d(x,v) \leq d(x,u) + 1$

$\times$

(ii) $d(x,u) = d(x,v)$

P najkrajša xu-pot
Q najkrajša xv-pot

$P - uv - Q$ je sklenjen sprehod
dolžine $2 \cdot |P| + 1$

$\Rightarrow$ Po lemi v G obstaja lih cikel.

$\times$

Za V_2 isto.

MORFIZMI GRAFOV

Definicija: Naj bosta G, H grafa.

Preslikava $f: V(G) \to V(H)$ je **homomorfizem**, če velja:

$\forall u, v \in V(G): uv \in E(G) \Rightarrow f(u)f(v) \in E(V)$

$(u \sim_G v \Rightarrow f(u) \sim_H f(v))$

Injektivni homomorfizem je **vložitev grafa G v H**.

Vložitev G v H je **izometrična**, če velja:

$\forall u,v \in V(G): \; d_G(u,v) = d_H(f(u), f(v))$

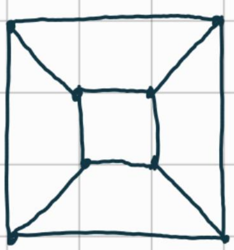
Preslikava $f: V(G) \to V(H)$ je **izomorfizem**, če velja:

1) f je bijekcija
2) f je homomorfizem (f slika povezave v povezave)
3) f^{-1} je homomorfizem (f slika nepovezave v nepovezave)

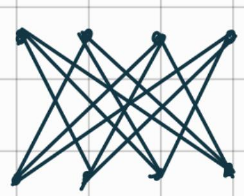
Grafa sta **izomorfna** ($G \cong H$), če obstaja izomorfizem med njima.

Avtomorfizem grafa G je izomorfizem $G \to G$.

Primer:



$\cong$



$\mathrm{Aut}(G) = \{\varphi : \varphi \text{ je avtomorfizem grafa } G\}$

Grupa avtomorfizmov grafa G: $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$

$\mathrm{Aut}(K_n) \cong \mathrm{Sym}([n])$
$\mathrm{Aut}(P_n) \cong \mathbb{Z}_2$
$\mathrm{Aut}(C_n) \cong D_{2n}$

OPERACIJE Z GRAFI IN POVEZANOST

Naj bo G graf.

$v \in V(G)$: $G - v$ ... graf brez vozlišča v

$e \in E(G)$: $G-e$ ... graf brez povezave e

$X \subseteq V(G)$: $G-X$ ... graf brez vozlišč iz X

$F \subseteq E(G)$: $G-F$ ... graf brez povezav iz F

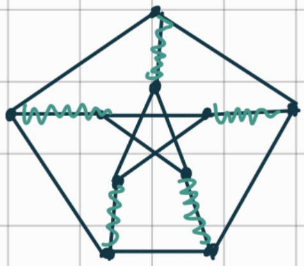
$e \in E(G)$: G/e ... skrčitev grafa G po e:

Identificiramo krajišči povezave e in odstranimo morebitne večkratne povezave.

Primer: G: G/e:

Definicija: Graf H je minor grafa G, če ga lahko dobimo iz nekega podgrafa G s skrčitvijo nekaj povezav.

Primer:



$\longrightarrow K_5$

$\Rightarrow K_5$ je minor Petersenovega grafa

Velja: Graf H je minor grafa G natanko tedaj, ko ga lahko dobimo s poljubnim vrstnim redom operacij:

- odstrani vozlišče
- odstrani povezavo
- skrči povezavo

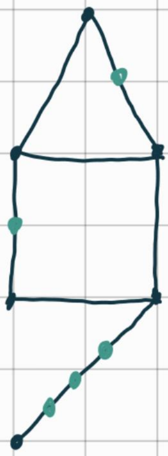
Definicija: **Subdivizija** povezave e je zamenjava povezave s potjo dolžine 2.

Oznaka: $G^+(e)$

Primer: G: $\quad\quad\quad\quad$ $G^+(e)$

Definicija: Graf H je **subdivizija** grafa G, če graf H lahko dobimo z zaporednjem subdivizij povezav.

Primer:



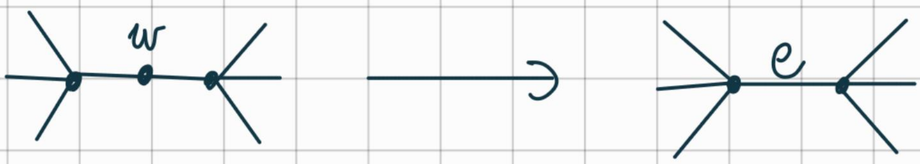
Trditev: Vsako povezavo lahko nadomestimo z neko potjo in vse te poti so paroma disjunktne po povezavah.

Definicija: Grafa G in H sta **homeomorfna**, če obstaja graf X tako, da sta G in H subdiviziji grafa X.

Definicija: Obratna operacija od subdivizije operacije je **glajenje vozlišča** stopnje 2.

Oznaka: $G^-(w)$

Primer: G: $\quad\quad\quad\quad$ $G^-(w)$



Definicija: Kartezični produkt $G \square H$:

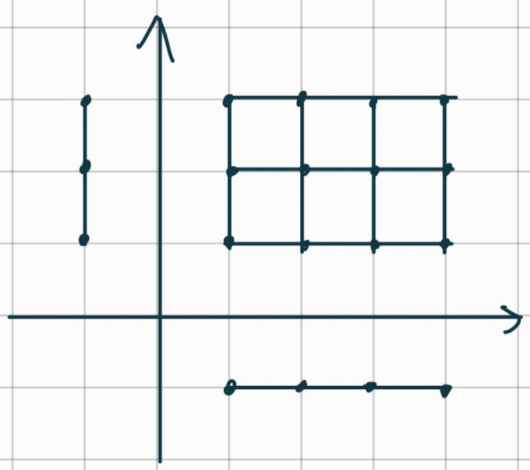
$$V(G \square H) = V(G) \times V(H)$$

$(g,h) \sim_{G \square H} (g',h')$, če je:

$(g = g'$ in $hh' \in E(H))$ ali

$(gg' \in E(G)$ in $h = h')$

Primer: $P_4 \square P_3$:



$$G \square K_1 = G$$

$$G \square H = H \square G$$

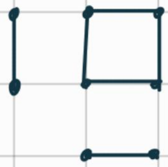
$$(G \square H) \square K = G \square (H \square K)$$

$\cup$ ... disjunktna unija grafov

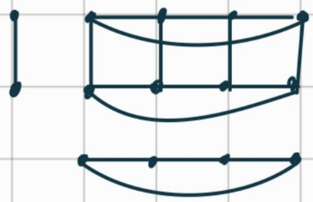
$(\mathcal{G}, \square, \cup)$ polkolobar

$G^{n,\square} := \underbrace{G \square \dots \square G}_{n}$

Primer: $K_2 \square K_2 = C_4$



$K_2 \square K_2 \square K_2 = Q_3$



$\Rightarrow K_2^{n,\square} = Q_n$

Vozlišče u grafa G je **prerezno**, če je $\Omega(G-u) > \Omega(G)$.

Povezava f grafa G je **prerezna** ali **most**, če je $\Omega(G-f) > \Omega(G)$.

Množica vozlišč S grafa G je **prerez**, če je $\Omega(G-S) > \Omega(G)$.

Množica povezav F grafa G je **povezavni prerez**, če je $\Omega(G-F) > \Omega(G)$.

Povezan graf G je **k-povezan**, če ima vsaj $k+1$ vozlišč in nima prerezov moči strogo manj kot k.

Povezanost grafa G, $\kappa(G)$, je največji k, za katerega je G k-povezan.

Vsak graf, ki ni poln graf, ima prereze.

Primer: $\mathcal{K}(K_n) = n-1$

$\mathcal{K}(K_1) = 0$ (pri čemer je K_1 povezan graf)

Primer: $\mathcal{K}(P_{n\geq 2}) = 1$

Primer: $\mathcal{K}(C_{n\geq 3}) = 2$

$\mathcal{K}(G) \leq \delta(G)$

Primer: $\mathcal{K}(Q_n) = n$

$Q_n = Q_{n-1} \square Q_2$

$u,v \in V(G)$: uv-poti P in Q sta notranje disjunktni, če je $V(P) \cap V(Q) = \{u,v\}$.

Whitneyev izrek:

Graf G je 2-povezan natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč u in v grafa G, $u \neq v$, obstajata vsaj dve disjunktni uv-poti.

2-povezan $\overset{\text{def}}{\equiv}$ $\mathcal{K} \geq 2$

Dokaz: $(\Leftarrow)$ $\forall u,v \in V(G)$: $\exists$ notranje disjunktni uv-poti

G nima prereza moči 1

$x \in V(G)$: $\{x\}$ ni prerez

$G-x$ je povezan

$u,v \in V(G-x)$

Po predpostavki obstajata notranje disjunktni uv-poti.

$x \in P \Rightarrow x \notin Q$

Torej še vedno ostane vsaj ena od njiju.

($\Rightarrow$) Obstoj notranje disjunktnih poti bomo dokazali z indukcijo po $d_G(u,v)$.

$d_G(u,v) = 1$:

e ni most

Če bi bila most in bi jo odstranili, bi dobili dve komponenti.

Ker je $|V(G)| \geq 3$, obstaja sosed od u ali sosed od v.

Recimo $vw \in E(G)$.

Potem je v prerezno vozlišče.

Ampak to je protislovje s tem, da je G 2-povezan.

$\Rightarrow G-e$ je povezan.

$\Rightarrow$ V G-e obstaja uv-pot Q.

Torej imamo notranje disjunktni poti (uv in Q).

$d_G(u,v) = k \geq 2$:

Naj bo P najkrajša uv-pot in w sosed od v na P.

$v \neq w$

$u \neq w$ $(k \geq 2)$

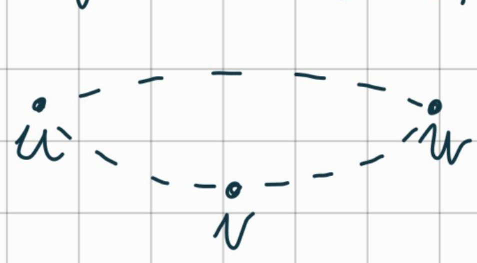
$d_G(u,w) = k-1$

Po I.P. obstajata notranje disjunktni uw-poti Q_1 in Q_2.

1. primer:

$v \in V(Q_1) \cup V(Q_2)$

Torej sta to že disjunktni uv-poti.

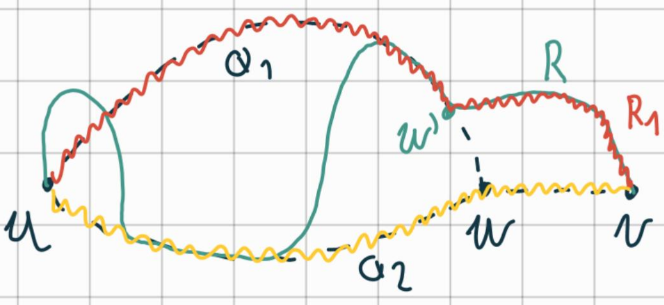


2. primer:

G je 2-povezan

$\Rightarrow \{w\}$ ni prerez

$\Rightarrow$ V $G - w$ obstaja uv-pot R



Naj bo w' zadnje vozlišče na R v smeri od u do v, ki leži na $Q_1 \cup Q_2$.

BŠS: $w' \in Q_1$

R_1: $u \xrightarrow{Q_1} w' \xrightarrow{R} v$

R_2: $u \xrightarrow{Q_2} w \xrightarrow{wv} v$

R_1 in R_2 sta notranje disjunktni poti.

DREVESA

Gozd je graf brez ciklov.

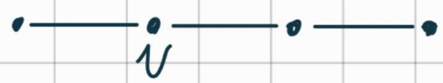
Drevo je povezan gozd.

List je vozlišče stopnje 1.

Lema 1: Naj bo T drevo z vsaj dvema vozliščema. Potem T premore list.

Dokaz: $v \in V(T)$:

Če je $\deg(v) = 1$, je to po definiciji list.



Sicer gledamo soseda. To se enkrat ustavi, ker imamo končen graf brez ciklov. To je naš list.

Opomba: Če imamo več kot dve vozlišči, imamo vsaj dva lista.

Dokažemo z lemo o rokovanju.

Lema 2: Če je T drevo, je $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

Dokaz: Indukcija po $|V(T)|$.

Baza:

$$0 = 1 - 1$$

Indukcijski korak:

$$|V(T)| \geq 2$$

Po lemi 1 obstaja list v T.

$T - v$ ima po I.P. $|E(T-v)| = |V(T-v)| - 1$.

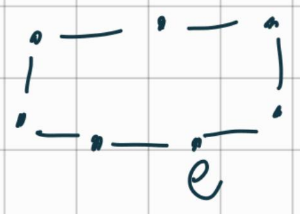
$$|E(T-v)| = |E(T)| - 1$$

$$|V(T-v)| = |V(T)| - 1$$

$$\Rightarrow |E(T)| = |V(T)| - 1$$

Lema 3: Če je G povezan graf in $e \in E(G)$ leži na nekem ciklu, potem je $G-e$ povezan graf.

Dokaz:



$u, v \in G-e$:

G je povezan

$\Rightarrow \exists$ uv-pot P v G

(i) $e \notin P$: Tedaj je P uv-pot tudi v $G-e$.

(ii) $e \in P$: V P nadomestimo povezavo e s potjo okoli cikla. Dobimo uv-sprehod, kar je dovolj.

Lema 4: Če je G povezan graf, je $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

Dokaz: Če je drevo, imamo enačaj. Če ni drevo, ima cikle. Po lemi lahko odstranjujemo cikle.

Izrek: Za graf G so ekvivalentne naslednje trditve:

1) G je drevo.

2) Za vsak par vozlišč obstaja enolična pot med njima.

3) G je povezan in vsaka povezava je most.

4) G je povezan in $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Dokaz: $(1) \Rightarrow (2)$:

Če bi imeli dve poti med vozliščema, potem bi imeli cikel.

$(2) \Rightarrow (3)$:

Če povezava ni most in bi jo odstranili, imamo še eno drugo. Torej ni enolične poti.

$(3) \Rightarrow (4)$:

Z indukcijo ... Vzamemo poljuben most. Dobimo dve manjši drevesi, za kateri velja indukcijska predpostavka. Skupaj tudi velja.

$(4) \Rightarrow (1)$:

Je povezan po predpostavki. Nima ciklov po po lemi 4 in lemi 3.

Vpeto drevo grafa je vpet podgraf, ki je drevo.

$\tau(G)$:= število vpetih dreves grafa G

Trditev: Graf je povezan $\Leftrightarrow$ Graf vsebuje vpeto drevo

Dokaz: $(\Leftarrow)$ Očitno.

$(\Rightarrow)$ Z zaporedno uporabo leme 3 v vsakem povezanem grafu lahko najdemo vpeto drevo.

Primer: $\tau(C_n) = n$

$\tau($$) = 8$

G/e ... skrčitev povezave e

Obravnavajmo skrčitev G/e tako, da nastalih vzporednih povezav ne odstranimo.

Trditev: Če vzporednih povezav v G/e ne odstranimo, je:

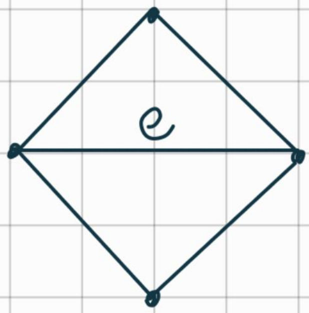
$$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G/e)$$

Dokaz: Naj bo T vpeto drevo v G.

Če $e \notin T$, potem je takih vpetih dreves $\tau(G-e)$.

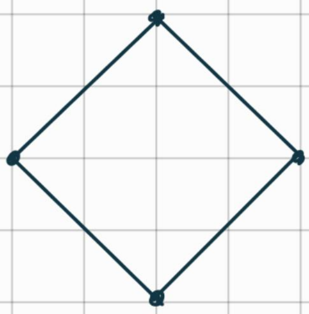
Če $e \in T$, potem je takih vpetih dreves $\tau(G/e)$.

Primer: G:



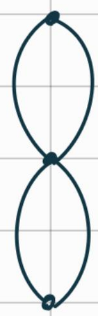
$\tau(G) = 8$

$G - e$:



$\tau(G-e) = 4$

G/e:



$\tau(G/e) = 4$

Laplaceva matrika $L(G)$ grafa $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ je $n \times n$ matrika:

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & ; \ i = j \\ -\text{št. povezav med } v_i \text{ in } v_j & ; \ i \neq j \end{cases}$$

Izrek: $\tau(G)$ je enak determinanti matrike, ki jo dobimo iz $L(G)$ tako, da izbrišemo vrstico in stolpec nekega vozlišča.

Cayleyev izrek: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

Dokaz: $$L(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tau(K_n) = \det L(K_{n-1})$$

$$\tau(K_n) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ & \ddots & & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -n & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -1 \\ -n & 0 & \cdots\ 0 & n \end{vmatrix} =$$

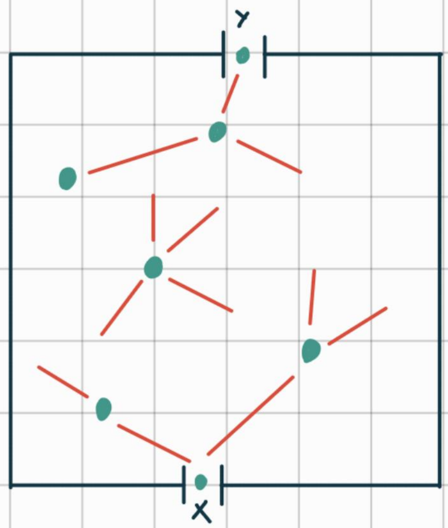
$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

EULERJEVI IN HAMILTONOVI GRAFI

Sprehod v grafu je Eulerjev, če je enostaven in prehodi vse povezave.

Sklenjen Eulerjev sprehod je Eulerjev sprehod, ki je sklenjen.

Graf je Eulerjev, če premore sklenjen Eulerjev sprehod.



Rešitev, če obstaja, je Eulerjev sprehod od x do y.

Izrek: Graf G je Eulerjev natanko tedaj, ko je povezan in so vsa vozlišča sode stopnje.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Če je Eulerjev, je seveda povezan. Za sodost vozlišča opazujemo poljuben Eulerjev obhod.

($\Leftarrow$) Indukcija po $|E(G)|$.

Za bazo imamo cikle, kjer to velja.

G ima vsaj en cikel C, ker ni drevo.

$H := G - E(C)$

V H so vsa vozlišča sode stopnje, saj ima G vozlišča sode stopnje.

Zato je po I.P. vsaka komponenta H Eulerjev graf.

Eulerjev obhod konstruiramo takole:

Začnemo nekje na ciklu C in gremo vzdolž cikla. Vsakič, ko naletimo na komponento H, ki je še nismo prehodili, jo prehodimo po I.P. Edini možen način, da bi povezavo prehodili dvakrat, je na ciklu, vendar obhodi komponent ne vsebujejo povezav.

Izrek: Povezan graf premore Eulerjev sprehod natanko tedaj, ko ima kvečjemu dve vozlišči lihe stopnje.

Dokaz: Začetno in končno vozlišče sta lahko lihi.

Fleuryjev algoritem:

Kako poiskati Eulerjev obhod v Eulerjevem grafu:

(i) Začnemo v poljubnem vozlišču.

(ii) Za zraven pobrišemo povezave, ki smo jih že prehodili.

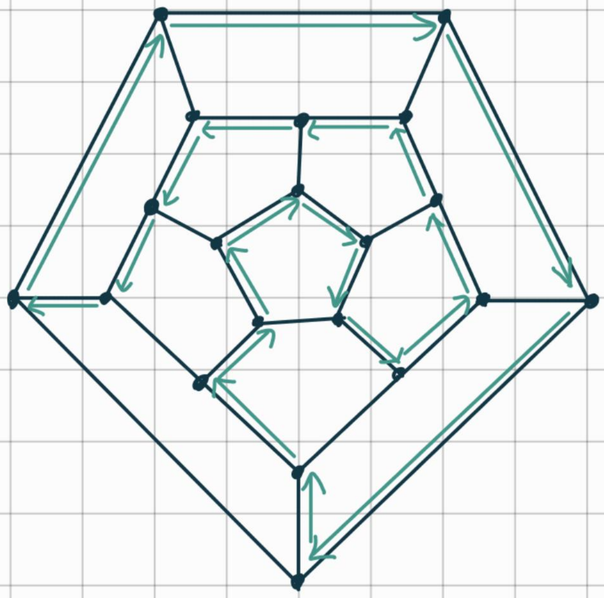
(iii) Na vsakem koraku izberemo povezavo, le da most prehodimo le, ko ni druge možnosti.

Hamiltonov cikel grafa je cikel, ki vsebuje vsa vozlišča.

Hamiltonova pot je pot v grafu, ki vsebuje vsa vozlišča.

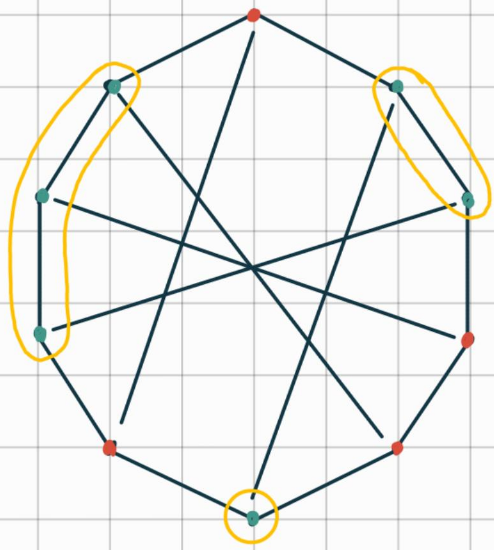
Graf je **Hamiltonov graf**, če premore Hamiltonov cikel.

Primer:



Izrek: Naj bo G Hamiltonov in $X \subseteq V(G)$. Tedaj velja $|\Omega(G-X)| \leq |X|$.

Dokaz: Naj bo G Hamiltonov.



Največ komponent dobimo, če vozlišča v X niso paroma sosedna.

$\Rightarrow$ V tem primeru dobimo $|X|$ komponent.

Trditev: $K_{n,m}$ je Hamiltonov natanko tedaj, ko je $n=m$.

Dokaz: ($\Leftarrow$) Lahko vzamemo:

($\Rightarrow$) BŠS $n<m$

$\Rightarrow \Omega(G-(n \text{ vozlišča})) = m > n$

$\Rightarrow G$ ni Hamiltonov

Oreov izrek:

Če je G povezan graf in za vsak par nesosednjih vozlišč u in v velja:

$$\deg u + \deg v \geq |V(G)|$$

Potem je G Hamiltonov.

Dokaz: Metoda najmanjšega protiprimera.

Recimo, da izrek ne velja. Med vsemi protiprimeri izberemo takega, ki ima najmanj vozlišč. Med vsemi takimi pa izberemo takega, ki ima največ povezav. Naj bo ta graf G.

G ni poln graf, ker je poln graf Hamiltonov.

Naj bosta $u, v \in V(G)$, $uv \notin E(G)$.

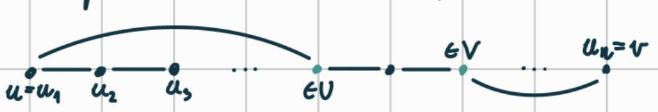
Naj bo H graf G skupaj s povezavo uv.

$\Rightarrow |E(H)| > |E(G)|$

$\Rightarrow H$ ni protiprimer

$\Rightarrow H$ je Hamiltonov

Naj bo C Hamiltonov cikel v H. Potem C vsebuje uv, saj bi sicer C bil Hamiltonov cikel že v G.



$$U := \{ u_i \ ; \ u u_{i+1} \in E(G) \}, \ |U| = \deg u$$
$$V := \{ u_j \ ; \ v u_j \in E(G) \}, \ |V| = \deg v$$

$$|U \cup V| + |U \cap V| = |U| + |V| = \deg u + \deg v \geq |V(G)|$$

$$v = u_n \notin U, \quad v = u_n \notin V$$

$$\Rightarrow |U \cup V| \leq n-1$$

$$\Rightarrow |U \cap V| \geq 1$$

$$\Rightarrow \exists\, u_i \in U \cap V$$

$\Rightarrow u \cdots u_i v \cdots u_{i+1} u$ je Hamiltonov cikel v G

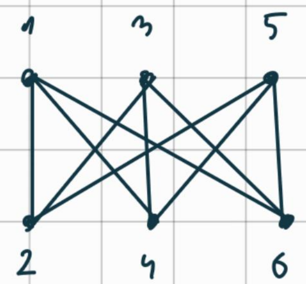
RAVNINSKI GRAFI

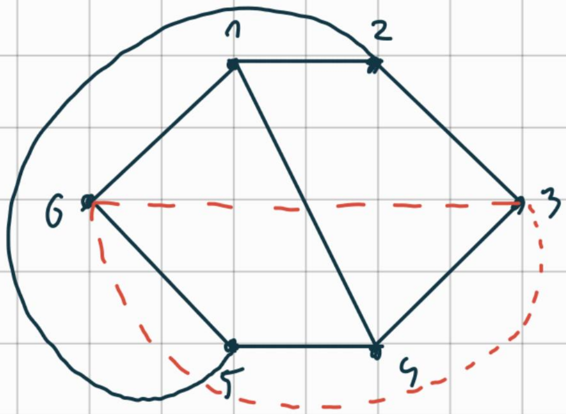
Graf G je ravninski, če ga lahko narišemo tako, da se povezave ne križajo.

Primer: $K_{2,3}$ je ravninski:

Ravninski graf skupaj z njegovo risbo v ravnini, je graf, vložen v ravnino.

Primer: $K_{3,3}$ ni ravninski:





Jordanov izrek:

Enostavna sklenjena krivulja razdeli ravnino v dva dela: notranjost krivulje in zunanjost krivulje (in rob)

Lica vložitve so sklenjena območja, omejena s ciklom.

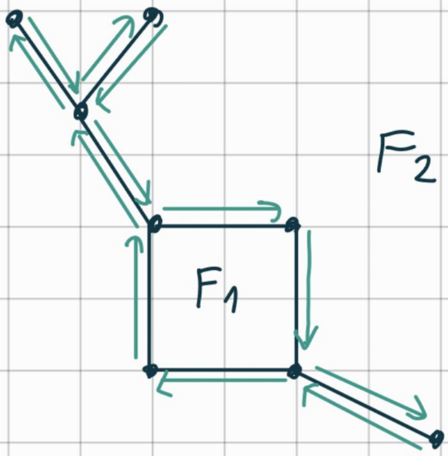
Zunanje lice je tisto, ki je okoli vsega. Ni nič pozelenega ...

Opomba: Graf lahko vložimo v ravnino natanko tedaj, ko ga lahko vložimo na sfero.

$F(G)$ ... množica lic grafa G, vloženega v ravnino

$F \in F(G)$: $\ell(F)$ ... dolžina lica F (število povezav na robu lica F, ko lice obhodimo)

Primer:



$$\ell(F_1) = 4$$
$$\ell(F_2) = 12$$

Trditev: Če je G vložen v ravnino, potem velja:

$$\sum_{F \in F(G)} \ell(F) = 2 \cdot |E(G)|$$

Naj bo G graf, ki premore cikle. Potem je njegova ožina, $g(G)$, dolžina najkrajšega cikla od G.

$$\ell(F) \geq g(G) \qquad \forall F \in F(G)$$

$$2 \cdot |E(G)| = \sum_{F \in F(G)} \ell(F) \geq \sum_{F \in F(G)} g(G) = g(G) \cdot |F(G)|$$

Izpeljali smo:

Trditev: Če je G vložen v ravnino in ima vsaj en cikel, potem velja:

$$|E(G)| \geq \frac{g(G)}{2} \cdot |F(G)|$$

Eulerjeva formula:

Če je G vložen v ravnino, potem velja:

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G)$$

Dokaz: Naj bo $\Omega(G) = 1$.

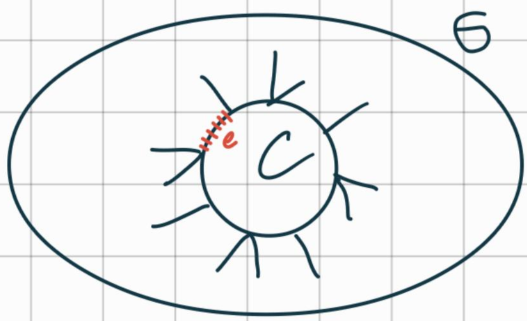
Za dani $|V(G)|$ delamo indukcijo po $|E(G)|$.

Baza so drevesa:

$$|E(G)| = |V(G)| - 1$$
$$|F(G)| = 1$$

$$|V(G)| - (V(G) - 1) + 1 = 2 \quad \checkmark$$

Naj bo G graf s cikli, vložen v ravnino, in naj bo C neko lice, omejeno s ciklom.

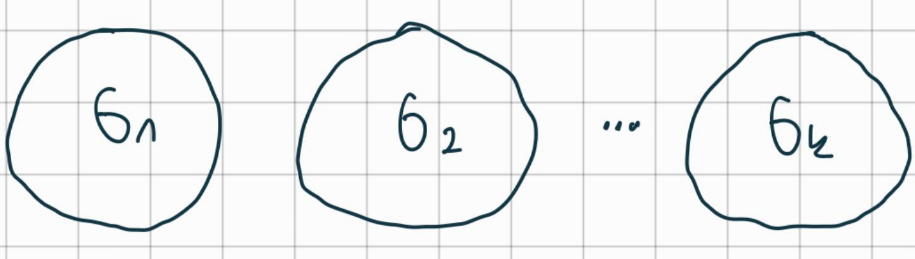


Naj bo e povezava cikla C. Gledamo $H := G - e$.

$$|V(H)| = |V(G)|$$
$$|E(H)| = |E(G)| - 1$$
$$|F(H)| = |F(G)| - 1$$

Po I.P. Eulerjeva formula velja za H, zato iz teh enakosti velja tudi za G.

Naj bo $\Omega(G) > 1$.



Formula velja za vsako komponento. Združimo skupaj, zunanja lica se združijo in formula velja.

Naj bo G povezan graf, vložen v ravnino.

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2 \leq |V(G)| - |E(G)| + \frac{2}{g(G)} \cdot |E(G)|$$

$$|E(G)| \left(1 - \frac{2}{g(G)}\right) \leq |V(G)| - 2$$

Izpeljali smo:

Trditev: Če je G povezan graf s ciklom, vložen v ravnino, potem velja:

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G)-2} \left(|V(G)| - 2\right)$$

Posledica: Če je G kot zgoraj, potem je:

$$|E(G)| \leq 3 \cdot |V(G)| - 6$$

Posledica: Če je G kot zgoraj in nima trikotnikov, potem je:

$$|E(G)| \leq 2 \cdot |V(G)| - 4$$

Primer: K_5 ni ravninski:

Recimo, da je ravninski. Potem bi po prvi posledici veljalo:

$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$$

Primer: $K_{3,3}$ ni ravninski:

Če bi $K_{3,3}$ bil ravninski, potem bi po drugi posledici veljalo:

$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$$

$\times$

Izrek Kuratowskega:

Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje grafa, ki je subdivizija K_5 ali subdivizija $K_{3,3}$.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Graf je ravninski natanko tedaj, ko je vsaka njegova subdivizija ravninska.

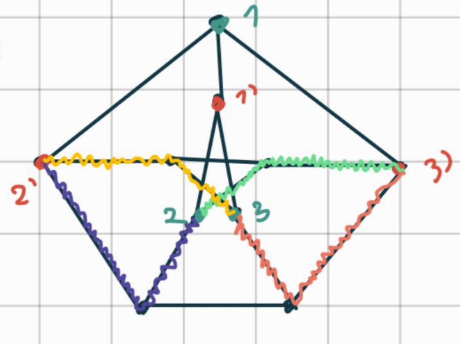
Subdivizije od K_5 in od $K_{3,3}$ niso ravninske.

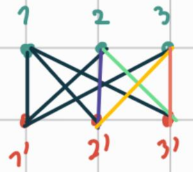
($\Leftarrow$) Na 2. stopnji pri Teoriji grafov...

G je ravninski $\Leftarrow$ Najdemo risbo G v ravnini

G ni ravninski $\Leftarrow$ V G poiščemo subdivizijo $K_{3,3}$ ali subdivizijo K_5

Primer:

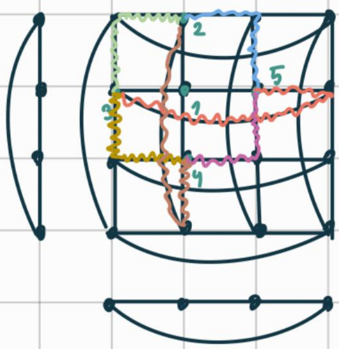


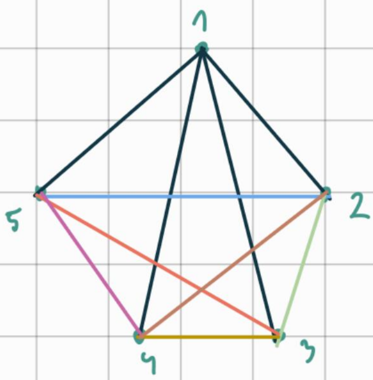


To je subdivizija $K_{3,3}$, torej $P_{5,2}$ ni ravninski.

Primer: Q_4 ni ravninski graf:

$$Q_4 = (K_2 \square K_2) \square (K_2 \square K_2) = C_4 \square C_4$$





Imamo subdivizijo K_5.

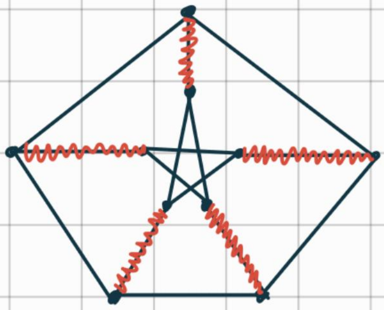
H je minor grafa G, če ga lahko dobimo z zaporedjem operacij:

- odstranitev vozlišča
- odstranitev povezave
- skrčitev povezave

Izrek Wagnerja:

Graf G je ravninski natanko tedaj, ko niti K_5 niti $K_{3,3}$ nista minorja grafa G.

Primer:



$\xrightarrow[\text{teh povezav}]{\text{skrčitev}}$ K_5

Torej $P_{5,2}$ ni ravninski.

Toda $P_{5,2}$ nima subdivizije K_5. Če G premore subdivizijo K_5, potem ima vsaj 5 vozlišč stopnje vsaj 4.

BARVANJE VOZLIŠČ GRAFOV

Naj bo $G=(V,E)$ graf. Potem funkciji $c: V(G) \to \mathbb{N}$ pravimo barvanje vozlišč grafa G. k-barvanje je funkcija $c_k: V(G) \to [k]$. Dobro barvanje grafa G predpiše krajiščema vsake povezave različno barvanje.

Graf je k-pobarvljiv, če zanj obstaja neko dobro k-barvanje. Najmanjšemu številu k, za katerega je graf G k-pobarvljiv, pravimo kromatično število grafa G in ga označimo z $\chi(G)$.

Primer: $\chi(C_n) = \begin{cases} 3 & ; n \text{ lih} \\ 2 & ; n \text{ sod} \end{cases}$

Primer: $\chi(P_n) = \begin{cases} 1 & ; n = 1 \\ 2 & ; \text{sicer} \end{cases}$

Primer: $\chi(K_n) = n$

Primer: $\chi(\text{dvodelni}) = 2$

Če ne povemo drugače, vedno gledamo dobra barvanja.

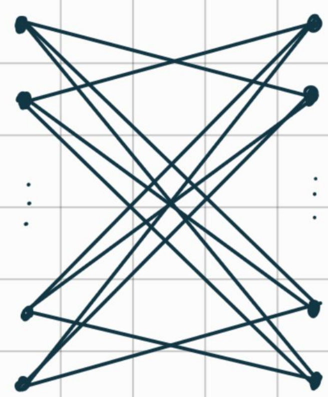
k-barvanje grafa $G=(V,E)$ je razbitje $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$, kjer so V_i paroma neodvisne. Množico V_i imenujemo **i-ti barvni razred** grafa G.

Požrešni algoritem za barvanje:

1) Razvrstimo vozlišča grafa G v poljuben vrstni red.

2) Barvamo po vrsti vozlišča iz zgornjega seznama tako, da vsako vozlišče prejme najmanjšo možno barvo, ki je niso prejeli sosedi vozlišča, ki ga v tistem koraku barvamo.

Primer: $K_{n,n}$ – popolno prirejanje:



Če v požrešnem algoritmu izberemo seznam vozlišč $v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots, v_n, u_n$, dobimo n-barvanje.

Če pa vzamemo $v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n$, pa dobimo optimalno barvanje z 2 barvama.

Trditev: Če je $H \subseteq G$, potem je $\chi(H) \leq \chi(G)$.

$\omega(G)$ = moč največje klike (polnega podgrafa) znotraj grafa G

Posledica: $\chi(G) \geq \omega(G)$

Trditev: Naj bo G graf. Potem je $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

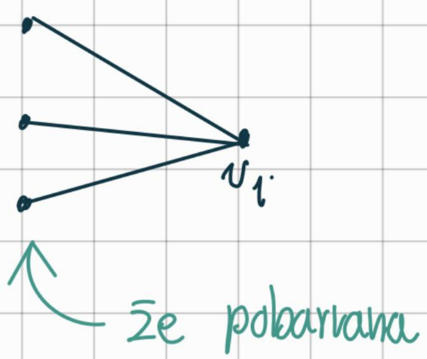
Dokaz: Pobarvajmo G s požrešnim algoritmom. Na vsakem koraku ima vozlišče, ki ga barvamo, največ $\Delta(G)$ že pobarvanih sosedov, kar pomeni, da zanj vedno ostane ena prosta barva.

Trditev: Naj bodo $v_1, \dots, v_n$ vozlišča grafa G in $d_1, \dots, d_n$ njihove stopnje. Potem velja:

$$\chi(G) \leq \max\{\min\{d_i, i-1\}, 1 \leq i \leq n\} + 1$$

Dokaz: Pobarvajmo G s požrešnim algoritmom, kjer uporabimo vrstni red $v_1, \dots, v_n$.

Na i-tem koraku:

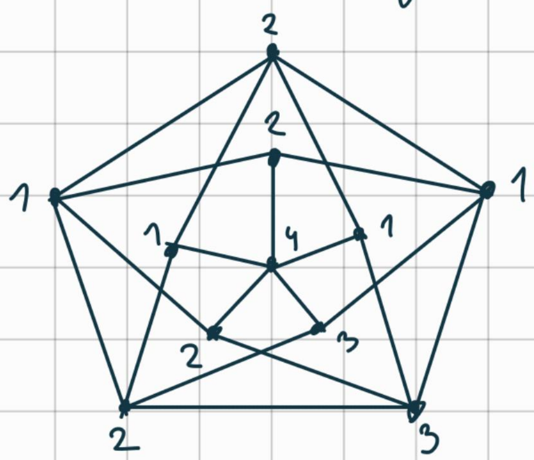


- če so vsi sosedje že pobarvani: $d_i + 1$
- če niso že vsi pobarvani: $i - 1 + 1$

$$\Rightarrow \min\{d_i, i-1\} + 1$$

Ker gremo po vseh barvah, imamo ravno $\max\{\min\{d_i, i-1\}\} + 1$ barvanj.

Primer: Grötzsch graf:



$\chi(G) = 4$

Konstrukcija Mycielskega:

1) Podvojimo vozlišča. Vsakega povemo z vsakim vsakim drugim vozliščem.

2) Dodamo novo vozlišče in ga povežemo s podvojenimi.

Primer: $C_5 \xrightarrow{\text{Mycielski}}$ Grötzsch

Brooksov izrek:

Naj G ne vsebuje komponente K_n niti C_{2k+1}. Potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

BARVANJE POVEZAV GRAFOV

$c: E(V) \to [k]$

$uv, uw \in E(V) \Rightarrow c(uv) \neq c(uw)$

$\chi'(G)$ ... kromatični indeks

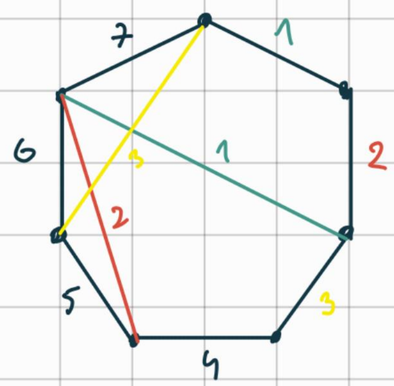
$\chi'(G) \geq \deg u \quad \forall u \in V(G)$

Visingov izrek: $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$

Graf je razreda I, če je $\chi'(G) = \Delta(G)$.
Graf je razreda II, če je $\chi'(G) = \Delta(G)+1$.

Izrek: Graf K_n je razreda I natanko tedaj, ko je n sodo število.

Dokaz: Naj bo $n = 2k+1$. Pobarvamo K_{2k+1} takole:



Vzporedne povezave v pravilnem $2k+1$-kotniku pobarvamo z isto barvo.

$$\Rightarrow \chi'(K_{2k+1}) \leq 2k+1$$

$\chi'(K_{2k+1}) \geq 2k+1$

Recimo, da bi lahko K_{2k+1} pobarvali z $2k$ barvami.

Izberemo barvo i : $\leq 2k$ vozlišč

$\Rightarrow$ Pobarvali smo kvečjemu $2k \cdot k$ povezav.

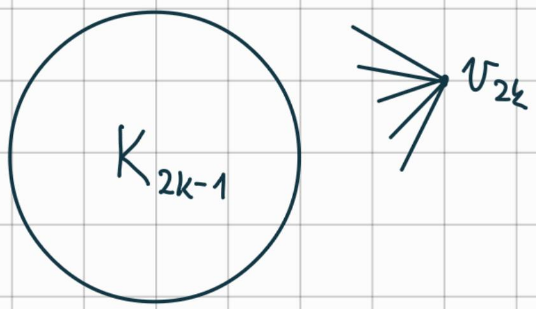
$$|E(K_{2k+1})| = \binom{2k+1}{2} = \frac{(2k+1)\cdot 2k}{2} = 2k^2+k$$

Imamo več povezav, kot smo jih uspeli pobarvati.

$$\Rightarrow \chi'(K_{2k+1}) > 2k$$

$\Rightarrow \chi'(K_{2k+1}) = 2k+1 = \Delta(K_{2k+1}) + 1$

Naj bo $n = 2k$.



Pobarvamo K_{2k-1} kot opisano prej.

V i-tem vozlišču nimamo barve i. S temi manjkajočimi barvami potem ustrezno pobarvamo povezave do v_{2k}.

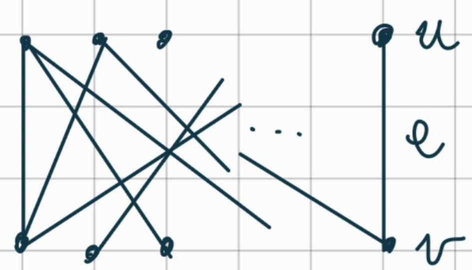
$\Rightarrow \chi'(K_{2k}) = 2k-1 = \Delta(K_{2k})$

Izrek: Dvodelni grafi so razreda I.

Dokaz: Naj bo G dvodelen. Indukcija po $|E(G)|$ ...

BSS: G povezan

baza:  ✓

G: 

$H = G - e$

$\chi'(H) = \Delta(H)$ po I.P.

Če je $\Delta(H) < \Delta(G)$, pobarvamo e z novo barvo in velja.

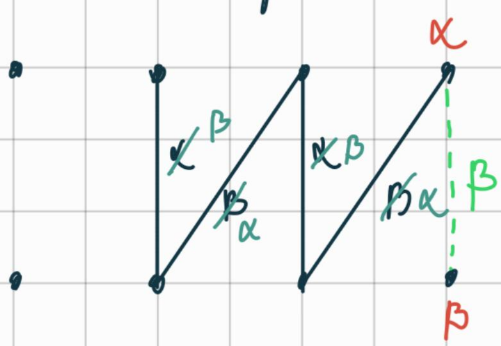
Naj bo $\Delta(H) = \Delta(G)$. H pobarvamo s $\chi'(H) = \Delta(H)$ barvami.

$\deg_H(u) < \Delta(G) = \Delta(H)$:
pri u manjka vsaj ena barva α

$\deg_{(H)}(v) < \Delta(G) = \Delta(H)$:
pri v manjka vsaj ena barva β

Če je $\alpha = \beta$, pobarvamo e s to barvo.

Če $\alpha \neq \beta$:



Zamenjamo α in β pri ustreznih povezavah.
Zdaj lahko pobarvamo e z β.