OSNOVNA NAČELA KOMBINATORIKE

$A \times B = \{ (a,b) \ ; \ a \in A, \ b \in B \}$

Načelo produkta:

Če sta A in B končni množici, potem je:
$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Posplošeno načelo produkta:

Če so $A_1, \dots, A_n$ končne množice, potem je:
$\left| \prod_{i=1}^{n} A_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

Načelo vsote:

Če sta A in B končni disjunktni množici, potem je:
$|A \cup B| = |A| + |B|$

Posplošeno načelo vsote:

Če so $A_1, \dots, A_n$ končne paroma disjunktne množice, potem je:
$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

Načelo enakosti:

Če obstaja bijekcija $A \to B$, potem je:
$|A| = |B|$

Primer: Naj bo A končna množica z n elementi.
Naj bo 2^A njena potenčna množica.
Naj bo $B = \{0,1\}$.

$$f: 2^A \to B^n$$

$$C \subseteq A$$
$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$
$$f(C) = (c_1, \dots, c_n)$$

$$c_i = \begin{cases} 1 & ; a_i \in C \\ 0 & ; a_i \notin C \end{cases}$$

<u>f je injektivna</u>

$$C \neq C'$$

$$c_i = f(C)_i = 0$$
$$c_i' = f(C')_i = 1$$

$$\Rightarrow f(C) \neq f(C')$$

<u>f je surjektivna</u>

Očitno.

$$\Rightarrow |2^A| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{načelo} \\ \text{enakosti}}}{=} |B^n| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posplošeno} \\ \text{načelo} \\ \text{produkta}}}{=} |B|^n = 2^n = 2^{|A|}$$

Načelo dvojnega preštevanja:

Z njim pokažemo, da sta dva izraza enaka, če z obema na različna načina preštejemo elemente iste množice.

Primer: $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right\}$$

Očitno: $|X_n| = n$

X_n prepišemo tako, da vsak člen zamenjamo z njegovo okrajšano obliko.

$$X_{12} = \left\{\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12}, \frac{12}{12}\right\}$$
$$X_{12}' = \left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{1}{1}\right\}$$

Eulerjeva funkcija ϕ

$\phi(n)$ = število števil iz $[n]$, ki so tuja z n

p praštevilo: $\phi(p) = p-1$

$\phi(2^n) = 2^{n-1}$

$$n = |X_n| = |X_n'| = \sum_{d|n} \phi(d)$$

$$\underline{\sum_{d|n} \phi(d) = n}$$

$n = 12$:

$$\overset{1}{\phi(1)} + \overset{1}{\phi(2)} + \overset{1,2}{\phi(3)} + \overset{1,3}{\phi(4)} + \overset{1,5}{\phi(6)} + \overset{1,5,7,11}{\phi(12)} =$$
$$= 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$$

Dirikletovo načelo (načelo golobnjaka):

Če sta $n, m \in \mathbb{N}$ in je $n > m$, potem ne obstaja injektivna preslikava $[n] \to [m]$.

Če n predmetov (golobov) razporedimo v m predalov (hišic), kjer je $n > m$, potem sta v vsaj enem predalu vsaj dva predmeta (odvečne golobe pojemo).

Primer: $X \subseteq [100]$, $|X| = 10$
$X = \{17, 21, 22, 29, 42, 43, 77, 90, 91, 97\}$

X vsebuje dve disjunktni množici z isto vsoto.

$\{21, 22\}$, $\{43\}$

Vseh podmnožic je 2^{10}. Vseh podmnožic, ki so zanimive, je $2^{10} - 2 = 1022$.

Vsota poljubne podmnožice od X je gotovo < 1000.

Če je $A \subset X$, ji priredimo vsoto.

$$\underset{1022}{A \subset C} \mapsto \underset{1000}{\text{vsota}(A)}$$

Po Dirichletovem načelu obstajata različni $A_1, A_2 \subset X$ da je $\text{vsota}(A_1) = \text{vsota}(A_2)$. Znebimo se preseka in dobimo disjunktni množici ...

$A_1 \setminus A_2$, $A_2 \setminus A_1$

ŠTEVILO PRESLIKAV

$B^A = \{f : A \to B\}$

padajoča potenca:
$n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$

naraščajoča potenca:
$n^{\overline{k}} = n(n+1)\cdots(n+k-1)$

fakulteta:
$n! = n^{\overline{n}}$

Trditev: Naj bosta N in K končni množici, kjer je $n = |N|$ in $k = |K|$. Tedaj velja:

(i) $|K^N| = k^n$

(ii) Število injektivnih preslikav $N \to K$ je $k^{\underline{n}}$.

(iii) Število bijekcij $N \to K$ je $n!$, če je $n = k$, in je 0, sicer.

Dokaz: (i) $N = \{x_1, \dots, x_n\}$
$K = \{y_1, \dots, y_k\}$

$f: N \to K$

$$\mathcal{F}: K^N \longrightarrow K^n$$
$$f \longmapsto (f(x_1), \dots, f(x_n))$$

$\mathcal{F}$ je injektivna

$f, g: N \to K$
$f \neq g$

$\exists i: f(x_i) \neq g(x_i)$
$\Rightarrow \mathcal{F}(f) \neq \mathcal{F}(g)$

$\mathcal{F}$ je surjektivna

$(z_1,\dots,z_n)\in K^n$, $z_i\in K$

Praslika tega vektorja je preslikava k, definirana z $k(x_i)=z_i$ za vse i.

Torej je surjektivna.

$\Rightarrow$ Imamo bijekcijo F

$\Rightarrow$ Po načelu enakosti je $|K^n|=|K|^n$

$\Rightarrow$ Po načelu produkta je $|K|^n=k^n$

(ii) Podobno ...

končni množici

(iii) Če je $f: A\to B$, kjer je $|A|=|B|$, velja:
f je injektivna $\Leftrightarrow$ f je surjektivna $\Leftrightarrow$ f je bijektivna

Torej sledi iz (ii), da je iskano število $n^{\underline{k}}=n^{\underline{n}}=n!$.

BINOMSKI KOEFICIENTI IN BINOMSKI IZREK

$n\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}_0$

$$\binom{x}{k} := \frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

Če $k\notin\mathbb{N}_0$, je $\binom{x}{k}:=0$.

Primer: $\binom{-3/2}{3} = \frac{(-3/2)(-3/2-1)(-3/2-2)}{3!} = \frac{(-1)^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2^3} = -\frac{35}{12}$

Trditev: Če je $n,k\in\mathbb{N}_0$ in $k\le n$, potem je:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{(binomska števila)}$$

Dokaz: $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} =$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)(n-k+1)\cdots 1}{(n-k)(n-k+1)\cdots 1} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0! \cdot 0!}$$

$$0 \leq k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{N}{k} := \{A \,;\, A \subseteq N,\ |A| = k\} \qquad \text{(k-podmnožice)}$$

Trditev: Če je N n-množica in je $0 \leq k \leq n$, potem je:

$$\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{n}{k}$$

Dokaz: $X = \{(n_1, \dots, n_k) \,;\, n_i \in N \text{ paroma različni}\}$

$$|X| = n^{\underline{k}}$$

$$x_{n,k} = \left|\binom{N}{k}\right|$$

1. Izberemo k različnih elementov iz N: $\quad x_{n,k}$
2. Izberemo njihov vrstni red: $\quad k!$

$$\Rightarrow |X| = x_{n,k} \cdot k!$$

$$\Rightarrow x_{n,k} \cdot k! = n^{\underline{k}}$$

$$\Rightarrow x_{n,k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{k}$$

Trditev: Za $n \in \mathbb{N}$ in $1 \leq k \leq n$, velja:

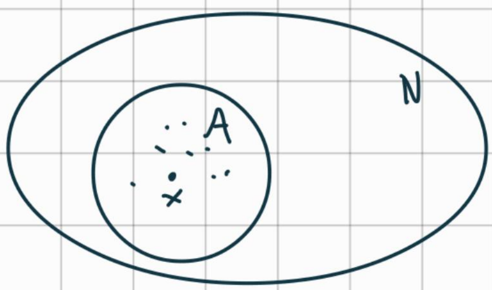
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

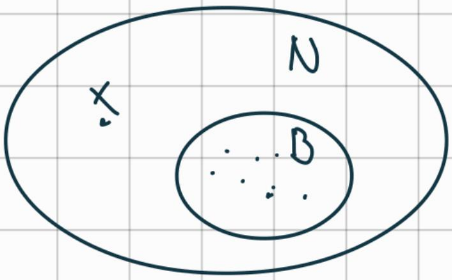
Dokaz: N, $|N| = n$, $x \in N$ fiksen element

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \binom{N}{k} ; \ x \in A \right\}$$
$$\mathcal{B} = \left\{ B \in \binom{N}{k} ; \ x \notin B \right\}$$

$$\binom{N}{k} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$$

$$\binom{n}{k} = \left|\binom{N}{k}\right| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$$





$$|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1} \qquad |\mathcal{B}| = \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1$$

Izrek (Binomski izrek):

Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dokaz: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdots (a+b)}_{n\text{-krat}} =$

= vsota produktov, kjer iz vsakega oklepaja izberemo en člen =

$$= \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \cdot ?$$

? = število izborov k oklepajev za a =

= število k-podmnožic v n-množici = $\binom{n}{k}$

Opomba: V tem izreku sta a in b elementa poljubnega komutativnega kolobarja.

IZBORI

Naj bo N n-množica. Opazujemo izbore k elementov.

1) Izbor je urejen

   1.1) Elementi se lahko ponavljajo: n^k
   1.2) Elementi se ne smejo ponavljati: $n^{\underline{k}}$

2) Izbor je neurejen

   2.1) Elementi se lahko ponavljajo: $\binom{n+k-1}{k}$
   2.2) Elementi se ne smejo ponavljati: $\binom{n}{k}$

Trditev: Število neurejenih izborov s ponavljanjem dolžine k iz n-množice je:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Dokaz: $N = \{x_1, \ldots, x_n\}$

Neurejeni izbor izgleda takole:

$$\underbrace{x_1 \cdots x_1 \quad x_2 \cdots x_2 \quad \cdots \quad x_n \cdots x_n}_{k \text{ elementov}}$$

$$\rightsquigarrow 1 \cdots 1\,0\,1 \cdots 1\,0 \cdots 0\,1 \cdots 1$$

Število ničel je $n-1$.

Dolžina niza je $(n-1)+k$.

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{n-1+k}$$

$$\Rightarrow \binom{n-1+k}{k} \left(= \binom{n-1+k}{n-1}\right)$$

Primer: Sponzor 10 tekmovalcem podeli pametne telefone 5 različnih znamk. Na koliko načinov to lahko naredi?

PERMUTATIONS

$A = \{1, 2, \ldots, n\} = [n]$
$\pi : A \to A$ bijection $\in S_n$
$|S_n| = n!$

$|S_1| = 1$
$|S_n| = n \cdot |S_{n-1}|$

even/odd permutation:
even/odd number of inversions

MULTISETS

$\{a, a, a, b, c, c, d, d, d\} = \{a^{(3)}, b^{(1)}, c^{(2)}, d^{(3)}\}$

$\nu : S \to \mathbb{N}_0$
$\nu = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Formally: universe S, multiset ν

~ combinations with repetitions

PERMUTATIONS OF MULTISETS

$\forall x_i \in S$: $\nu(x_i)$ many times

Theorem: Number of permutations of:
$M = (S, \nu) = (1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, k^{\alpha_k})$,
$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$

is: $\frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_k!}$

Proof: $\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3} \cdots \binom{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{k-1}}{\alpha_k} =$

$=$ things cancel out $=$

$= \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_k!}$

Theorem: $(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n}} \binom{n}{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$

Choose k from $\{1, \ldots, n\}$ without repetitions but order matters $=$ variations without repetions:

$\binom{n}{k} \cdot k!$

COMPOSITIONS

Definition: A composition of $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$$
$$\lambda_i \in \mathbb{N}$$
$$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$$

(Order is important)

Example: $7 = 3 + 1 + 3$

Example: $n = 4$:

$(4), (1,3), (3,1), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2),$
$(1,1,1,1), (2,2)$

$\Rightarrow 8$

Theorem: For any $n \in \mathbb{N}$, the number of compositions is 2^{n-1}. (a)

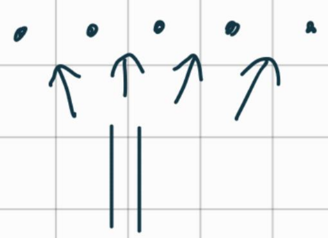
For any $n \in \mathbb{N}$, the number of compositions with length k is $\binom{n-1}{k-1}$. (b)

Proof: a) $\bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet$ $\quad n$

$$\underbrace{2 \quad 2 \quad 2}_{n-1}$$

$\Rightarrow 2^{n-1}$

b)



$n-1$ places to put separations
$k-1$ separations

$\Rightarrow \binom{n-1}{k-1}$

WEAK COMPOSITIONS

Definition: A weak composition of $n \in \mathbb{N}$:

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$
$\lambda_i \in \mathbb{N}_0$
$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$

(Order is important)
(elements can be zero)

Theorem: The number of weak compositions of $n \in \mathbb{N}$ of length k is $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Proof: Permutations of multisets: $\frac{(n+k-1)!}{(k-1)! \cdot n!}$

PARTITIONS OF NATURAL NUMBERS

Definition: A partition of $n \in \mathbb{N}$:

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell \geq 1$
$\lambda_i \in \mathbb{N}$
$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$

(order not important)

$p(n)$ = number of partitions
$p_k(n)$ = number of partitions of length k
$\overline{p_k}(n)$ = number of partitions of length at most k

Theorem: $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$
$p_k(n) = \overline{p_k}(n-k)$
$\overline{p_k}(n) = \overline{p_{k-1}}(n) + \overline{p_k}(n-k)$
$= p_k(n) + \overline{p_{k-1}}(n)$

STIRLINGOVA ŠTEVILA I. VRSTE

Za $1 \leq k \leq n$ je Stirlingovo število I. vrste $c(n,k)$ število permutacij množice $[n]$, ki se zapišejo kot produkt k disjunktnih ciklov.

$c(n,0) = 0, \; n > 0$
$c(0,0) = 1$

Primer: $c(n,n) = 1$ $\quad id = (1)(2)\cdots(n)$

$c(n,1) = (n-1)!$ $\quad (x_1\, x_2 \cdots x_n) = (x_2\, x_3 \cdots x_n\, x_1) =$
$= \ldots = (x_n\, x_1\, x_2 \cdots x_{n-1})$

Primer: $c(4,2)$:

$(\cdot)(\cdot\cdot\cdot) \sim 4 \cdot 2 = 8$
$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot) \sim \frac{\binom{4}{2}}{2} = 3$

Trditev: Za $1 < k < n$ velja:

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)\cdot c(n-1,k)$$

Dokaz: Permutacije $[n]$ s k cikli razdelimo takole:

(i) tiste, kjer je n negibna točka: $\# = a$
(ii) ostale: $\# = b$

$$c(n,k) = a + b$$

(i):

$$\pi = \overbrace{(\ )\cdots(\ )}^{k-1}(n)$$

$$\Rightarrow a = c(n-1,k-1)$$

(ii):

$$\pi = \underbrace{(\ )(\overset{n}{\downarrow})\cdots(\ )}_{k}$$

n je v nekem ciklu dolžine vsaj 2. Če n odstranimo, dobimo permutacijo $n-1$ elementov s k cikli. Takih je $c(n-1,k)$.

Za vsako tako permutacijo je $n-1$ mest, kamor lahko vrinemo n.

$$\Rightarrow b = (n-1)\cdot c(n-1,k)$$

Stirlingova matrika I. vrste:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120		...			1

za $k>n$ je $C(n,k)=0$

Trditev: $x^{\overline{n}} = \sum_k C(n,k)\, x^k$

Primer: $x^{\overline{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) =$

$$= 1x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

Dokaz: Indukcija po n:

$n=0$:

$$x^{\overline{0}} = 1$$

$$C(0,0)\, x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$n-1 \to n$:

$$x^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}}(x+n-1) =$$

$$\overset{\text{I.P.}}{=} \Big(\sum_k C(n-1,k)\, x^k\Big)(x+n-1) =$$

$$= \sum_k C(n-1,k)\, x^{k+1} + (n-1)\sum_k C(n-1,k)\, x^k =$$

$$= \sum_k C(n-1,k-1)\, x^k + \sum_k (n-1)\, C(n-1,k)\, x^k =$$

$$= \sum_k \big[C(n-1,k-1) + (n-1)\, C(n-1,k)\big] x^k =$$

$$= \sum_k C(n,k)\, x^k$$

STIRLINGOVA STEVILA II. VRSTE IN BELLOVA STEVILA

Razdelitev množice X je družina podmnožic $\{X_i\}_{i\in I}$, da je $\bigcup_{i\in I} X_i = X$ in $X_i \cap X_j = \emptyset$ za vsaka $i \neq j$.

Za $1 \leq k \leq n$ je **Stirlingovo število II. vrste** $S(n,k)$ število razdelitev množice $[n]$ v k nepraznih razredov.

$$S(n,0) = 0, \quad n > 0$$
$$S(0,0) = 1$$

Primer:
$$S(n,n) = 1$$
$$S(n,1) = 1$$
$$S(n,2) = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Bellovo število $B(n)$ je število vseh razdelitev množice $[n]$ v neprazne razrede.

$$B(n) = \sum_k S(n,k)$$

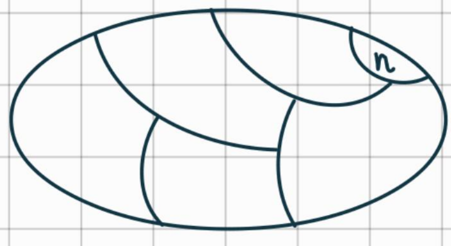
Trditev: Za $1 < k < n$ velja:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$$

Dokaz: Vse razdelitve množice $[n]$ v k razredov razdelimo takole:

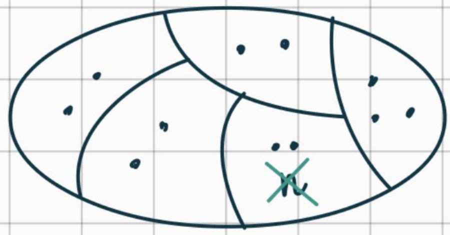
(i) tiste, ki imajo $\{n\}$ kot samostojen del
(ii) ostale

(i):



$S(n-1, k-1)$

(ii):



$k \cdot S(n-1, k)$

Stirlingova matrika II. vrste:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	
0	1							
1	0	1						$\to B(1) = 1$
2	0	1	1					$\to B(2) = 2$
3	0	1	3	1				$\to B(3) = 5$
4	0	1	7	6	1			$\to B(4) = 15$
5	0	1	15	25	10	1		$\to B(5) = 52$
6	0	1		...			1	$\vdots$

Trditev: $x^n = \sum_k S(n,k) x^{\underline{k}}$

Dokaz: Naj bo x naravno število. Opazujmo množico $X = \{(x_1, \dots, x_n) ; x_i \in [x]\}$.

$|X| = x^n$

$(\_, \_, \_, \_, \_, \_)$

Take vektorje razdelimo glede na to, koliko različnih elementov ima.

$$K: \underbrace{7 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 8 \;\; 3 \;\; 2}_{k \text{ različnih elementov}}$$

Teh k elementov določa razdelitev $[n]$ elementov v k različnih razredov. Slednjih je $S(n,k)$.

Vsaka taka razdelitev porodi:
$x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1) = x^{\underline{k}}$

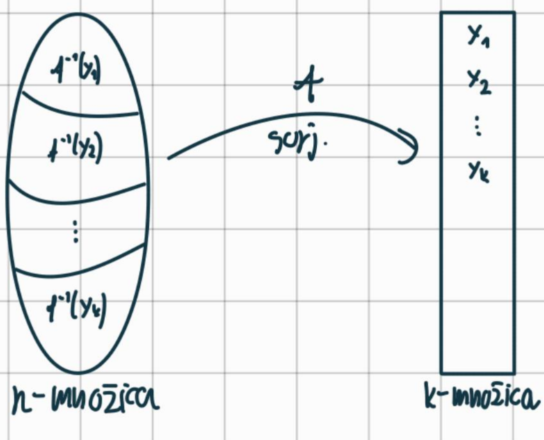
Takih vektorjev s k različnimi komponentami je torej:
$S(n,k) \cdot x^{\underline{k}}$

Ker se ta dva polinoma ujemata za vse $x \in \mathbb{N}$, po izreku o interpolaciji to velja za vse $x \in \mathbb{R}$.

Izrek: Število surjekcij iz n-množice v k-množico je enako:

$k! \cdot S(n,k)$

Dokaz:

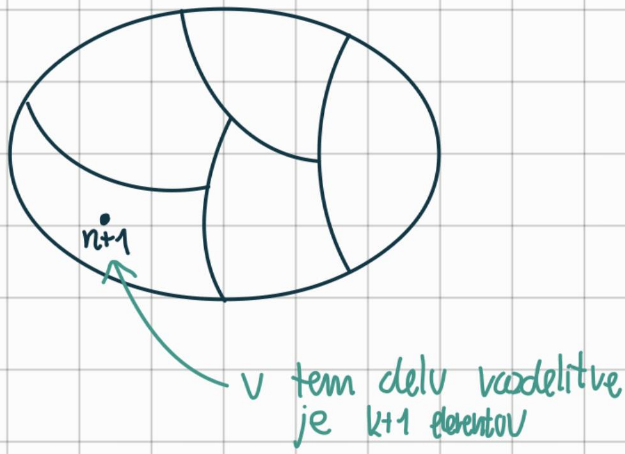


Vsaka surjekcija določa razdelitev n-množice v k različnih razredov. Za vsako tako razdelitev pa obstaja $k!$ različnih surjekcij

$\Rightarrow k! \cdot S(n,k)$

Trditev: $B(n+1) = \sum_k \binom{n}{k} \cdot B(k)$

Dokaz: Opazujmo razdelitev množice $[n+1]$:



To lahko naredimo na $\binom{n}{k}$ načinov. Ostale dele lahko razdelimo na $B(n-k)$ načinov.

$$B(n+1) = \sum_k \binom{n}{k} B(n-k) = \sum_k \binom{n}{n-k} B(n-k) = \sum_k \binom{n}{k} B(k)$$

LAHOVA ŠTEVILA

Za $1 \leq k \leq n$ je Lahovo število $L(n,k)$ število razdelitev n-množice v k linearno urejenih kosov.

(Ivo Lah, 1896 - 1979)

DVANAJSTERA POT

N ... n-množica (predmetov)
K ... k-množica (predalov)

$f: N \to K$ predmete razporedi po predalih

predmeti → jih ločimo med seboj
→ jih ne ločimo med seboj

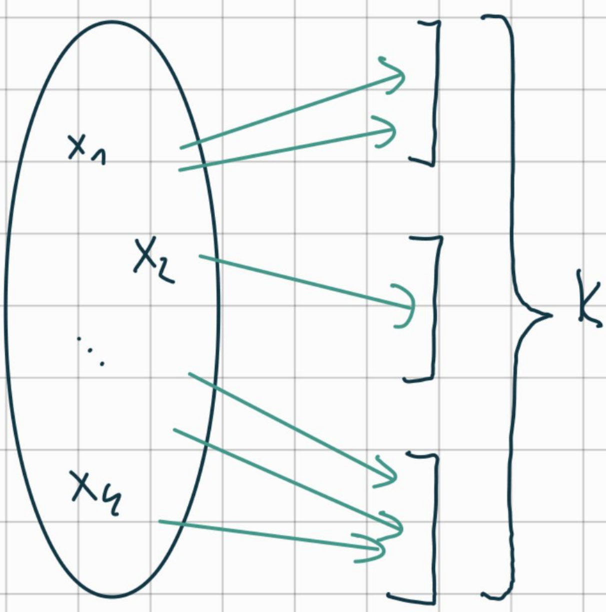
predali → jih ločimo med seboj
→ jih ne ločimo med seboj

f → poljubna
→ injektivna (vsak predal največ en predmet)
→ surjektivna (noben predal prazen)

⇒ dvanajst možnosti

krek (dvanajstera pot):

ločimo predmete/ločimo predale	poljubna	injektivna	surjektivna
DA/DA	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k!\cdot S(n,k)$
DA/NE	$\sum_{i\leq k} S(n,i)$	$\begin{cases}1; & n\leq k\\ 0; & \text{sicer}\end{cases}$	$S(n,k)$
NE/DA	$\binom{k+n-1}{n}$ *1	$\binom{k}{n}$ *3	$\binom{n-1}{k-1}$ *2
NE/NE	$\overline{p_k}(n)$ *5	$\begin{cases}1; & n\leq k\\ 0; & \text{sicer}\end{cases}$	$p_k(n)$ *4



*1

⇒ neurejene izbire s ponavljanjem dolžine n iz k-množice

*2

$$\text{št. črt} = k-1$$
$$\text{št. mest} = n-1$$

*3

*4

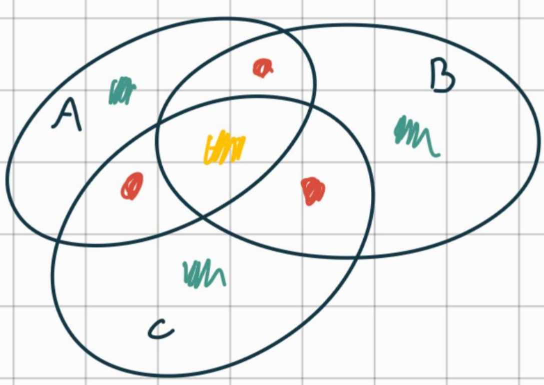
$\Rightarrow$ particije števila n iz k sumandov

*5

$\Rightarrow$ particije števila n z manj ali enako k sumandi

NAČELO VKLJUČITEV IN IZKLJUČITEV

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad |A \cup B| = |A| + |B|$$
$$A, B \text{ poljubni} \quad \Rightarrow \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Primer: Koliko števil v [30] ni tujih s 30?

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

A_2 = večkratniki od 2 v $[30]$
A_3 = večkratniki od 3 v $[30]$
A_5 = večkratniki od 5 v $[30]$

$\# = |A_2 \cup A_3 \cup A_5| =$

$= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| =$

$= 15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1 = 22$

Koliko števil v $[30]$ je tujih s 30?

$\# = 30 - 22 = 8$

Izrek (načelo vključitev in izključitev):

Če so $A_1, \dots, A_n$ množice, potem je:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sigma_j ,$$

kjer je:

$$\sigma_j = \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| ,$$

kjer je $\binom{[n]}{j}$ množica j-podmnožic od $[n]$.

Dokaz: $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x$ prispeva natanko 1 k formuli

$x \in \bigcup A_i \Rightarrow x$ leži v k izmed n množic, $k \in [n]$

Potem x k formuli prispeva:

$\sigma_1 \ \dots \ k$

$\sigma_2 \ \dots \ -\binom{k}{2}$

$\sigma_3 \ \dots \ +\binom{k}{3}$

$\sigma_k \ \dots \ \pm\binom{k}{k}$

$\sigma_{k+1} \ \dots \ 0$

$\vdots$

$\sigma_n \ \dots \ 0$

$\Rightarrow$ Prispevek od x je: $\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots \pm \binom{k}{k}$

$$0 = (1-1) = (1-1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} (-1)^i =$$

$$= \underbrace{\binom{k}{0}}_{1} \underbrace{- \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \dots \pm \binom{k}{k}}_{-1}$$

$$\Rightarrow \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots \pm \binom{k}{k} = 1$$

Primer: Na koliko načinov lahko razporedimo n označenih predmetov v k označenih predalov, če je vsaj en predal prazen?

A_i ... # razporeditev, kjer je i-ti predal prazen

$A_1 \cup \dots \cup A_k$ ... razporeditve, ki nas zanimajo

$|A_1 \cup \dots \cup A_k|$ ... iskano število teh razporeditev

$$|A_1 \cup \dots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \sigma_i$$

$$\sigma_i = \binom{k}{i} (k-i)^n$$

ostalih $k-i$ razporedimo

izberemo i praznih predalov

$$\Rightarrow |A_1 \cup \dots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (k-i)^n$$

$=$ število ne surjektivnih funkcij

Posledica: Če je X N-množica in $A_1, \dots, A_n \subseteq X$, potem je število elementov množice X, ki niso v nobeni izmed množic $A_1, \dots, A_n$, enako:

$$N + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \sigma_j$$

Število premestitev je število permutacij brez negibnih točk.

$\pi \in S_n$ permutacija $[n] \to [n]$
$\pi(i) = i$ je negibna točka za π

a_n = število permutacij S_n, ki so brez negibnih točk

$a_1 = 0$
$a_2 = 1$
$a_3 = 2$

"Fiziki bi rekl $a_n = n-1$ očitno."

$$A_i = \{\pi \in S_n \,;\, \pi(i) = i\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{\pi \in S_n \,;\, \pi \text{ ima vsaj eno negibno točko}\}$$

$$a_n = n! - |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = *$$

$|A_i| = (n-1)!$
$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$$* = n! - \left(\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \ldots \pm \binom{n}{n}(n-n)!\right) = *$$

$$\binom{n}{i}(n-i)! = \frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)! = \frac{n!}{i!}$$

$$* = n! - \left(\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \ldots\right) =$$

$$= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots \pm \frac{1}{n!}\right)$$

Izrek: Če je $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, razcep $n \in \mathbb{N}$ na praštevila, potem je $\phi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_r})$.

Dokaz: Za $i \in [r]$:

$A_i = \{j \in [n] : p_i | j\} =$
$=$ večkratniki od p_i v $[n]$

$A_1 \cup \ldots \cup A_r$ = števila iz $[n]$, ki niso tuja z n $\Rightarrow$ natanko tista števila, ki nas ne zanimajo

$$\Rightarrow \phi(n) = n - |A_1 \cup \ldots \cup A_r| = *$$

$$|A_1| + \ldots + |A_r| = \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_r}$$

$$|A_i| = |\{p_i, 2p_i, (\tfrac{n}{p_i}) \cdot p_i\}| = \frac{n}{p_i}$$

$$|A_i \cap A_j| = |\{p_ip_j, 2p_ip_j, \ldots, (\tfrac{n}{p_ip_j}) \cdot p_ip_j\}| = \frac{n}{p_ip_j}$$

$$\begin{aligned} * = n &- \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_r}\right) \\ &+ \left(\frac{n}{p_1p_2} + \frac{n}{p_1p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{r-1}p_r}\right) \\ &- \left(\frac{n}{p_1p_2p_3} + \ldots\right) \\ &\vdots \\ &\pm \frac{n}{p_1p_2\cdots p_r} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= n\Big(1 - \left(\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_r}\right) + \left(\frac{1}{p_1p_2} + \ldots + \frac{1}{p_{r-1}p_r}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{p_1p_2p_3} + \ldots + \frac{1}{p_{r-2}p_{r-1}p_r}\right) + \ldots \pm \frac{1}{p_1\cdots p_r}\Big) = \end{aligned}$$

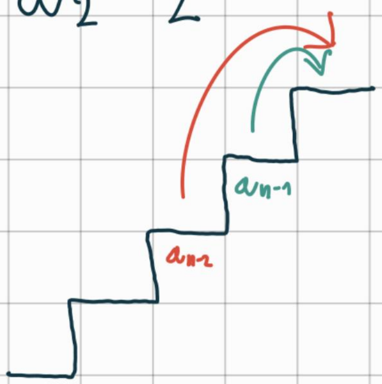
$$= \phi(n)$$

REKURZIVNE ENAČBE

Primer: Na koliko načinov lahko prehodimo n stopnic, če vsakič prestopimo eno ali dve?

a_n ... iskano število

$a_1 = 1$
$a_2 = 2$



$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3$

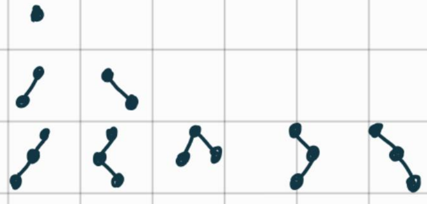
$1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

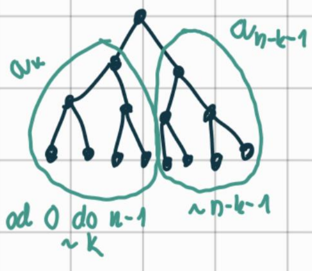
$\Rightarrow a_n = F_{n+1}$

Primer: Koliko je dvojiških dreves s korenom z n vozlišči?

a_n ... iskano število

$a_1 = 1$
$a_2 = 2$
$a_3 = 5$





def: $a_0 := 1$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1}$$

Izrek: Naj bo zaporedje $(a_n)_{n\geq 0}$ podano takole:

$$a_0 = b_0$$
$$a_1 = b_1$$
$$a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Kjer so b_0, b_1, A, B fiksna števila.

Naj bosta α in β korena karakteristične enačbe $x^2 = Ax + B$.

Tedaj velja naslednje:

1) Če je $\alpha \neq \beta$, potem obstajata konstanti K_1, K_2, tako da je $a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n$.

2) Če je $\alpha = \beta$, potem obstajata konstanti K_1, K_2, tako da je $a_n = (K_1 + K_2 n)\alpha^n$.

Dokaz: 1) $\alpha \neq \beta$:

$$a_0 = K_1 + K_2 = b_0$$
$$a_1 = K_1\alpha + K_2\beta = b_1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - \alpha \neq 0$$

$\Rightarrow$ K_1 in K_2 obstajata tako, da formula velja za $n=0$ in $n=1$.

Naj bo $n \geq 2$.

Ker sta α, β korena enačbe:

$$x^2 = Ax + B$$
$$\alpha^2 = A\alpha + B$$
$$\beta^2 = A\beta + B$$

$$a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2} =$$

$$\overset{\text{I.P.}}{=} A(K_1 \alpha^{n-1} + K_2 \beta^{n-1}) + B(K_1 \alpha^{n-1} + K_2 \beta^{n-2}) =$$

$$= K_1 \alpha^{n-2} (\underbrace{A\alpha + B}_{\alpha^2}) + K_2 \beta^{n-2} (\underbrace{A\beta + B}_{\alpha^2}) =$$

$$= K_1 \alpha^n + K_2 \beta^n$$

2) $\alpha = \beta$:

2.1) $\alpha = \beta = 0$:

$$x^2 = Ax + B$$
$$x^2 - Ax - B = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \sqrt{A^2 + 4B} = 0$$
$$\alpha = \beta = \frac{A}{2} = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = 0$$

V tem primeru je $a_n \equiv 0$ (zanemarimo a_0, a_1).

2.2) $\alpha = \beta \neq 0$:

$a_0 = K_1 = b_0$
$a_1 = K_1\alpha + K_2\alpha = b_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \neq 0$$

$\Rightarrow K_1$ in K_2 obstajata tako, da je formula les za $n=0$ in $n=1$.

Naj bo $n \geq 2$.

$$a_n = A a_{n-1} + B a_{n-2} =$$

$$\overset{\text{I.P.}}{=} A(K_1 + K_2(n-1))\alpha^{n-1} + B(K_1 + K_2(n-2))\alpha^{n-2} =$$

$$= AK_1\alpha^{n-1} + AK_2 n\alpha^{n-1} - AK_2\alpha^{n-1} + BK_1\alpha^{n-2} + BK_2 n\alpha^{n-2} - 2BK_2\alpha^{n-2} =$$

$$= K_1\alpha^{n-2}\underbrace{(A\alpha + B)}_{\alpha^2} + nK_2\alpha^{n-2}\underbrace{(A\alpha + B)}_{\alpha^2} - \ldots =$$

$$= \underbrace{K_1\alpha^n + K_2 n\alpha^n} - K_2\alpha^{n-2}(\underbrace{\alpha A + 2B}_{\text{mora biti } 0})$$

$x^2 = Ax + B$
$x^2 - Ax - B = 0$
$\alpha = \frac{A}{2}, \quad \alpha^2 + 4B = 0, \quad B = -\frac{A^2}{4}$

$$A\alpha + 2B = A \cdot \frac{A}{2} + 2\left(-\frac{A^2}{4}\right) = 0$$

Splošno: Zaporedje (a_n) je podano takole:

$a_0 = b_0, \ a_1 = b_1, \ldots, \ a_{d-1} = b_{d-1}$,
kjer so $b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}$ fiksni

$c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n)$,
kjer so $c_0, \ldots, c_d$ fiksni in $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$

To je d-členа linearna rekurzija s konstantnimi koeficienti.

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} = \{(a_n)_{n\geq 0} \; ; \; a_n \in \mathbb{C}\}$

$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$ ... vektorski prostor

$\mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}) = \{\mathcal{A}: \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \; ; \; \mathcal{A} \text{ linearna}\}$

$(\mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}), +, \cdot)$ ... vektorski prostor

$E \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0})$:

$E((a_0, a_1, a_2, \ldots)) := (a_1, a_2, \ldots)$

Če je $f(n) \equiv 0$, je to homogena rekurzija.

Reševanje homogene rekurzije:

BŠZS: $c_d = 1$

$\Rightarrow a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0 \quad \overset{n\geq 0}{(**)}$

$\rightsquigarrow Q(x) = x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \ldots + c_1 x + c_0$

$Q(E) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$

$(a_n)_{n\geq 0} \in \ker(Q(E)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Q(E)((a_n)_{n\geq 0}) = (0, 0, \ldots) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (E^d + c_{d-1}E^{d-1} + \ldots + c_1 E + c_0 I)((a_n)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E^d((a_n)) + \ldots + c_1 E((a_n)) + c_0 I((a_n)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_d, a_{d+1}, \ldots) + c_{d-1}(a_{d-1}, a_d, \ldots) + \ldots +$
$+ c_1(a_1, a_2, \ldots) + c_0(a_0, a_1, \ldots) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_d + c_{d-1}a_{d-1} + \ldots + c_1 a_1 + c_0 a_0,$
$a_{d+1} + c_{d-1}a_d + \ldots + c_1 a_2 + c_0 a_1, \ldots) =$
$= (0, \ldots) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Ko $(a_n)_{n\geq 0}$ reši (**).

Torej, splošne rešitve homogene enačbe so natanko elementi iz $\ker(Q(E))$.

$Q(x) = (x-\lambda_1)^{s_1} \cdots (x-\lambda_k)^{s_k}$

$\Rightarrow \ker(Q(E)) = \ker((E-\lambda_1 I)^{s_1}) \oplus \ldots \oplus \ker((E-\lambda_k I)^{s_k})$

Hočemo torej določiti $\ker((E-\lambda I)^s)$.

$\dim \ker((E-\lambda I)^s) = s$

$(\lambda^n)_{n\geq 0}, (n \cdot \lambda^n)_{n\geq 0}, \ldots, (n^{s-1} \cdot \lambda^n)_{n\geq 0}$
tvorijo bazo za $\ker((E-\lambda I)^s)$ (dokaz prepuščen bralcu)

Izrek: $(a_n)_{n\geq 0} \in \ker((E-\lambda I)^s) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_n)$ je oblike $a_n = p(n)\lambda^n$, kjer je $p(n)$ polinom stopnje $\leq s-1$

Izrek: Splošna rešitev enačbe $a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$ je oblike $A_1(n)\lambda_1^n + \ldots + A_k(n)\lambda_k^n$, kjer so λ_i ničle karakterističnega polinoma kratnosti s_i, $i \in [k]$, in je $A_i(n)$ polinom stopnje največ $s_i - 1$.

Rešitev nehomogene enačbe $c_d a_{n+d} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n)$ je oblike $z_n + b_n$, kjer je z_n splošna rešitev homogene enačbe in je b_n neka partikularna rešitev enačbe.

Pri tem pravilom b_n iščemo z ustreznim nastavkom, pri čemer upoštevamo, da če pri $f(n)$ aditivno zapišemo $f(n) = f_1(n) + \ldots + f_k(n)$, potem bo b_n vsota partikularnih rešitev $c_d a_{n+d} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_0 = f_i(n)$.

Primer: $a_0 = 0,\ a_1 = 1$

$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} - 2n + 5 \cdot 3^n$

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = \underbrace{-2n}_{f_1(n)} + \underbrace{5 \cdot 3^n}_{f_2(n)}$$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x_{1,2} = 2$

$\Rightarrow z_n = (A + Bn) \cdot 2^n$

- $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = -2n$

nastavek: $b' = A_0 + A_1 n$

$A_0 + A_1 n - 4(A_0 + A_1(n-1)) + 4(A_0 + A_1(n-2)) = -2n$

$A_0 + A_1 n - 4A_0 - 4A_1 n + 4A_1 + 4A_0 + 4A_1 n - 8A_1 = -2n$

$A_0 - 4A_1 + A_1 n = -2n$

$A_0 - 4A_1 = 0$

$A_1 = -2 \Rightarrow A_0 = -8$

$\Rightarrow b' = -8 - 2n$

- $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 5 \cdot 3^n$

nastavek: $b'' = c \cdot 3^n$

$c \cdot 3^n - 4c \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot c \cdot 3^{n-2} = 5 \cdot 3^n \quad / \cdot 3^{n-2}$

$9c - 12c + 4c = 45 \Rightarrow c = 45$

$\Rightarrow b'' = 5 \cdot 3^{n+2}$

Splošna rešitev:

$(A + Bn) \cdot 2^n + 5 \cdot 3^{n+2} - 8 - 2n$

Vstavimo začetna pogoja in dobimo:

$A = -37$
$B = -25$

$\Rightarrow (-37 - 25n) \cdot 2^n + 5 \cdot 3^{n+2} - 8 - 2n$

FORMALNE POTENČNE VRSTE / RODOVNE FUNKCIJE

Gledamo zaporedja nad $\mathbb{C}$.

$(a_n)_{n \geq 0} \longmapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ... formalna potenčna vrsta

Operacije s formalnimi potenčnimi vrstami:

$(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n := \sum (a_n + b_n) x^n$$

$$\lambda \cdot \sum a_n x^n := \sum (\lambda a_n) x^n$$

$\Rightarrow$ Vektorski prostor

$$\left(\sum a_n x^n\right) \cdot \left(\sum b_n x^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

$\Rightarrow$ Algebra

Formalna potenčna vrsta $A(x)$ je obrnljiva, če obstaja taka formalna potenčna vrsta $B(x)$, da je $A(x) \cdot B(x) = 1 = (1, 0, 0, \ldots)$

Trditev: Formalna potenčna vrsta $A(x)$ je obrnljiva natanko tedaj, ko je $a_0 \neq 0$.

Dokaz: $(\Rightarrow)$ Naj bo $A(x)$ obrnljiva. Torej obstaja $B(x)$, da je $A(x) \cdot B(x) = 1$.

$$A(x) = \sum a_n x^n$$
$$B(x) = \sum b_n x^n$$

V posebnem:

$$a_0 \cdot b_0 = 1$$

V $\mathbb{C}$ ni deliteljev niča.

$\Rightarrow a_0 \neq 0$

($\Leftarrow$) Naj bo $A(x) = \sum a_n x^n$, kjer je $a_0 \neq 0$. Če je obrnljiva, moramo dokazati $B(x) = \sum b_n x^n$, da je $A(x) \cdot B(x) = 1$.

$$a_0 \cdot b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = a_0^{-1}$$

Induktivno trdimo, da vsak b_n, $n \geq 0$, obstaja in je enoličen.

$n = 0$:

Smo že.

$n-1 \to n$:

$$(A(x) \cdot B(x))_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$$

$$a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = 0$$

$$a_0 b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$b_n = -a_0^{-1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}}_{\text{obstaja po I.P.}}$$

Primer: $(1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots)(1 - x) = 1$

$$\sum_{n \geq 0} x^n = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n \geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sum_{n\geq 0} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$$

Če je $(a_n)_{n\geq 0}$ zaporedje, ki je rešitev nekega kombinatoričnega problema, potem $\sum a_n x^n$ pravimo **rodovna funkcija**.

$$G(x) = \sum a_n x^n$$

Primer: Rodovna funkcija Fibonaccijevega zaporedja:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2$$

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} F_n x^n =$$
$$= 0 + 1\cdot x + \sum_{n\geq 2} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n =$$
$$= x + x \cdot \sum_{n\geq 2} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \cdot \sum_{n\geq 2} F_{n-2} x^{n-2} =$$
$$= x + x \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n\geq 0}} F_n x^n + x^2 \cdot \sum_{n\geq 0} F_n x^n =$$
$$= x + x \cdot F(x) + x^2 \cdot F(x)$$

$$F(x) = x + x \cdot F(x) + x^2 \cdot F(x)$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = x$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Definirajmo za $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ odvajanje:

$$A'(x) := \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Trditev: $(A(x)\cdot B(x))' = A(x)'\cdot B(x) + A(x)\cdot B'(x)$

Dokaz: $A(x) = \sum a_n x^n \quad , \quad A'(x) = \sum (n+1) a_{n+1} x^n$
$B(x) = \sum b_n x^n \quad ; \quad B'(x) = \sum (n+1) b_{n+1} x^n$

$$(A(x)\cdot B(x))' = \Big(\sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)x^n\Big)' =$$

$$= \sum_{n\geq 0}(n+1)\Big(\sum_{k=0}^{n+1} a_n b_{n+1-k}\Big)x^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0}(n+1)\big(\underline{a_0 b_{n+1}} + \underline{a_1 b_n} + \ldots + a_n b_1 + a_{n+1} b_0\big)x^n$$

$$A'(x)\cdot B(x) = \Big(\sum (n+1) a_{n+1} x^n\Big)\cdot\Big(\sum b_n x^n\Big) =$$

$$= \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{k=0}^{n}(k+1) a_{k+1} b_{n-k}\Big)x^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0}\big(\underline{a_1 b_n} + 2a_2 b_{n-1} + \ldots + (n+1) a_{n+1} b_0\big)x^n$$

$$A(x)\cdot B'(x) = \Big(\sum b_n x^n\Big)\cdot\Big(\sum (n+1) b_{n+1} x^n\Big) =$$

$$= \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k (n+1-k) b_{n+1-k}\Big)x^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0}\big(\underline{(n+1) a_0 b_{n+1}} + \underline{n a_1 b_n} + \ldots + \ldots + a_n b_1\big)x^n$$

REŠEVANJE REKURZIJ Z RODOVNIMI FUNKCIJAMI

Primer: $a_0 = 2,\ a_1 = 3$
$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}\ ,\ n\geq 2$

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 2 + 3x + \sum_{n\geq 2}(2a_{n-1} - a_{n-2})x^n =$$

$$= 2+3x+2x\underbrace{\sum_{n\geq 1} a_n x^n}_{=\sum_{n\geq 0} a_n x^n - 2} - x^2 \sum_{n\geq 0} a_n x^n =$$

$$= 2+3x+2x(G(x)-2) - x^2 G(x)$$

$$G(x)(1-2x+x^2) = 2-x$$

$$G(x) = \frac{2-x}{1-2x+x^2} = \frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2} = \frac{A-Ax+B}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} A+B &= 2 \\ -A &= -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = B = 1$$

$$G(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots) =$$

$$= 1+2x+3x^2+\ldots$$

$$\Rightarrow G(x) = \sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n = \sum_{n\geq 0}(n+2)x^n$$

$$\Rightarrow a_n = n+2$$

Koraki splošnega reševanja:

1) Rešitev problema zapišemo z rekurzivno enačbo.

2) Zapišemo rodovno funkcijo zaporedja s pomočjo rekurzivne zveze.

3) Z algebro nad rodovnimi funkcijami rodovno funkcijo razvijemo v vrsto.

4) Iz razvoja preberemo rešitev našega začetnega problema.

EKSPONENTNE RODOVNE FUNKCIJE

$(a_n)_{n\geq 0} \longmapsto E(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot \frac{x^n}{n!}$

CATALANOVA ŠTEVILA

$x_1 x_2 \cdots x_n$

Na koliko načinov lahko izračunamo ta produkt, če po vrsti zmnožimo dve zaporedni števili in ju nadomestimo s produktom.

a_n ... iskano število

$a_2 = 1$

$a_3 = 2$ $\qquad ((x_1 x_2) x_3$ ali $x_1(x_2 x_3))$

$a_4 = 5$ $\qquad (((x_1 x_2) x_3) x_4$ ali $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$
ali $(x_1(x_2 x_3)) x_4$ ali $x_1((x_2 x_3) x_4)$
ali $(x_1(x_2(x_3 x_4))))$

$(x_1 \cdots x_k) \cdot (x_{k+1} \cdots x_n)$

zadnji produkt

$a_k \cdot a_{n-k}$

$a_1 := 1$
$a_0 := 0$

$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ $\qquad$ za $n \geq 2$

Zapišimo rodovno funkcijo:

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n =$$

$$= 0 + 1\cdot x + \sum_{n\geq 2}\sum_{k=0}^{n} a_n a_{n-k}\, x^n =$$

$$= x + \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} a_n a_{n-k}\, x^n =$$

$$= x + G(x)^2$$

$$G(x) = x + G(x)^2$$

$$G(x)^2 - G(x) + x = 0$$

$$G(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

$$G(0) = 0 \implies G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

$$G(x) = -\frac{1}{2}\left((1-4x)^{1/2} - 1\right) = *$$

$$(1+a)^{1/2} = \sum_{k\geq 0}\binom{1/2}{k} a^k \quad , \quad \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

$$\binom{1/2}{k} = \frac{(1/2)^{\underline{k}}}{k!} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{k!}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}\cdot 1\cdot 3\cdots(2k-3)\cdot\frac{2\cdot 4\cdots(2k-2)}{2\cdot 4\cdots(2k-2)} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{k!\cdot 2^k}\cdot\frac{(2k-2)!}{2^{k-1}\cdot(k-1)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}$$

$$* = -\frac{1}{2}\left[\sum_{k\geq 0}\binom{1/2}{k}(-4x)^k - 1\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}(-4x)^k =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}(-1)^k 2^{2k} x^k =$$

$$= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k$$

$$\implies a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$ ... Catalanova števila

$a_n = C_{n-1}$