Elementa $\sigma, \pi \in S_n$ sta konjugirana, ko je $\sigma = \alpha \pi \alpha^{-1}$ za nek $\alpha \in S_n$.

To je natanko tedaj, ko imata enako ciklično strukturo.

---

Naj bo $\sigma \in A_n$ in $C(\sigma)$ centralizator $\sigma$ v $S_n$.

Pokaži naslednje trditve:

1) Če $C(\sigma) \subseteq A_n$, potem konjugiranostni razred $\sigma$ v $S_n$ razpade v 2 enako velika razreda v $A_n$.

2) Če $C(\sigma) \not\subseteq A_n$, potem konjugiranostni razred $\sigma$ v $S_n$ sovpada z razredom v $A_n$.

konjugiranostni razred = orbita $= \{\alpha \sigma \alpha^{-1} ; \alpha \in S_n\}$

Vemo: $\sigma_1$ in $\sigma_2$ sta konjugirana $\Leftrightarrow$ $\sigma_1$ in $\sigma_2$ imata enako zgradbo disjunktnih ciklov

1) Naj bo $C(\sigma) \subseteq A_n$.

$$St(\sigma) = \{g \in S_n ; g \cdot \sigma = \sigma\} = \{g \in S_n ; g \sigma g^{-1} = \sigma\} =$$

$$= \{g \in S_n ; g\sigma = \sigma g\} = C(\sigma)$$

$$C_{S_n}(\sigma) = C_{A_n}(\sigma) =: C(\sigma)$$

$$|S_n \cdot \sigma| = [S_n : C(\sigma)] = \frac{|S_n|}{|C(\sigma)|}$$

$$|A_n \cdot \sigma| = [A_n : C(\sigma)] = \frac{|A_n|}{|C(\sigma)|} = \frac{|S_n|}{2|C(\sigma)|} = \frac{1}{2}|S_n \cdot \sigma|$$

$$\Rightarrow |A_n \cdot \sigma| = \frac{1}{2} \cdot |S_n \cdot \sigma|$$

$\Rightarrow$ Razpade v dva enako velika razreda.

2) Naj bo $\tau \in S_n \setminus A_n$, da je $\tau\sigma = \sigma\tau$.

$$\sigma = \tau\sigma\tau^{-1}$$

$S_n \cdot \sigma \subseteq A_n \cdot \sigma$

Naj bo $\delta\sigma\delta^{-1} \in S_n \cdot \sigma$.

Če je $\delta \in A_n$, potem je $\delta\sigma\delta^{-1} \in A_n$.

Če je $\delta \notin A_n$, potem velja:

$$\delta\sigma\delta^{-1} = \delta\tau\sigma\tau^{-1}\delta^{-1} = \underbrace{(\delta\tau)}_{\text{soda}}\sigma\underbrace{(\delta\tau)}_{\text{soda}}^{-1} \in A_n$$

$A_n \cdot \sigma \subseteq S_n \cdot \sigma$

Vedno velja.

$\Rightarrow$ Razreda sta enaka.

---

Opiši konjugiranostne razrede grupe $Q$ in $D_8$.

I) $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

Vsak element iz centra je svoj konjugiranostni razred.

$Z(Q) = \{1, -1\}$

$\Rightarrow \{1\}, \{-1\}$ sta konj. razreda

$i$: $C(i) = \{\pm 1, \pm i\}$, ker imamo že 4 elemente

$\Rightarrow |Q \cdot i| = [Q : C(i)] = \frac{8}{4} = 2$

$1 \cdot i \cdot 1^{-1} = i \in Q \cdot i$
$j \cdot i \cdot j^{-1} = -(ij)j^{-1} = -i(jj^{-1}) = -i \in Q \cdot i$

$\Rightarrow Q \cdot i = \{i, -i\}$

Iz simetrije:

$Q \cdot j = \{j, -j\}$
$Q \cdot k = \{k, -k\}$

II) $D_8 = \{\underline{id}, \underline{r}, \underline{r^2}, \underline{r^3}, z, zr, zr^2, zr^3\}$

$Z(D_8) = \{id, r^2\}$

$\Rightarrow \{id\}, \{r^2\}$ sta konj. razreda

$r$: $C(r) = \{id, r, r^2, r^3\}$

$\Rightarrow |D_8 \cdot r| = \frac{8}{4} = 2$

$r \in D_8 \cdot r$
$z r z^{-1} = z r z = z z r^3 = r^3 \in D_8 \cdot r$

$\Rightarrow D_8 \cdot r = \{r, r^3\}$

$z: C(z) = \{id, z, r^2, zr^2\}$

$\Rightarrow |D_8 \cdot z| = \frac{8}{4} = 2$

$z \in D_8 \cdot z$
$rzr^{-1} = rzr^3 = rrz = r^2 z = zr^2 \in D_8 \cdot z$

$\Rightarrow D_8 \cdot z = \{z, zr^2\}$

$\Rightarrow D_8 \cdot zr = \{zr, zr^3\}$

Konjugiranostni razred je en element. $\Leftarrow\Rightarrow$ Ta element je v centru.

---

Naj bo $g = (1\ 6\ 9)(2\ 10)(3\ 4\ 5\ 7\ 8) \in S_{10}$. Opiši orbite in stabilizatorje za naravno delovanje grupe $G = \langle g \rangle$ na množici $X = \{1, \dots, 10\}$.

Naravno delovanje: $h \cdot x = h(x)$, $h \in G$, $x \in X$

$\text{red}(g) = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$

$|G| = 30$

$G \cdot 1 = \{h(1);\ h \in G\} = \{1, 6, 9\}$
$G \cdot 2 = \{h(2);\ h \in G\} = \{2, 10\}$
$G \cdot 3 = \{h(3);\ h \in G\} = \{3, 4, 5, 7, 8\}$

$G_1 = \{h \in G;\ h(1) = 1\}$

$3 = |G \cdot 1| = [G : G_1] = \frac{|G|}{|G \cdot 1|}$

$\Rightarrow |G_1| = 10$

$\Rightarrow G_1 = \{g^3, g^6, \dots, g^{30} = id\} = G_6 = G_9$

$G_2 = \{id, g^2, g^4, \dots, g^{28}\} = \dots$

$|G_2| = 15$

$G_3 = \{id, g^5, g^{10}, \dots, g^{25}\} = \dots$

$|G_3| = 6$

$x$ in $y$ v isti orbiti $\Rightarrow G_x$ in $G_y$ sta konjugirana

$h G_x h^{-1} = G_x$, če je $G$ Abelova

---

$G \leq GL_n(\mathbb{R})$

$G$ deluje na $V = \mathbb{R}^n$:

$A \in G$ in $v \in V$: $A \cdot v = Av$

Opiši orbite delovanja, če:

a) $G = GL_n(\mathbb{R})$

b) $G = O_n(\mathbb{R})$

c) $G =$ diagonalne obrnljive matrike

d) $G =$ zgornje trikotne obrnljive matrike

V točkah (c) in (d) poišči stabilizator vektorja $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) $A \cdot 0 = 0 \quad \forall A \in G$

$\Rightarrow \{0\}$ je orbita.

Naj bosta $v, u$ neničelna vektorja.

Dopolnimo ju do baz.

Med tema vektorjema obstaja prehodna matrika $P$, da je $P \cdot u = v$.

$\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je orbita.

b) $\{0\}$ je orbita.

Če sta $v$ in $u$ v isti orbiti, imata enako normo.

Dopolnimo $\frac{v}{\|v\|}$ in $\frac{u}{\|u\|}$ do ortonormiranih baz.

Potem obstaja ortogonalna matrika $P$, da je $A \cdot \frac{u}{\|u\|} = \frac{v}{\|v\|}$, torej tudi $A \cdot u = \|u\| \cdot A \cdot \frac{u}{\|u\|} =$
$= \|u\| \cdot \frac{v}{\|v\|} = v$.

$\Rightarrow u$ in $v$ sta v isti obiti $\Leftrightarrow \|u\| = \|v\|$

$\Rightarrow$ Imamo $|\mathbb{R}^+|$ orbit.

c) $\{0\}$ je orbita.

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$Av = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

$Av$ ima ničle na istih komponentah kot $v$.

$G \cdot v$ = vektorji, ki imajo ničle na istih komponentah kot $n$

$\Rightarrow$ Imamo $2^n$ orbit.

d) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} v_1 + a_{12} v_2 \\ a_{22} v_2 \end{bmatrix}$

$a_{11}, a_{22} \neq 0$

Če $v_n = 0$, potem je $a_{nn} \cdot v_n = (Av)_n = 0$.

$v_n = 0 \iff (Av)_n = 0$

Če je $v_n = 0$ in $v_{n-1} = 0$, potem je $(Av)_n = 0$ in $(Av)_{n-1} = 0$.

$v_{n-1} = 0$ in $v_n = 0 \iff (Av)_{n-1} = 0$ in $(Av)_n = 0$

Orbite so določene s številom neničelnih komponent na zadnjih mestih.

$\mathcal{O}_k = \{ v \in \mathbb{R}^n ;\ v_k \neq 0, v_{k+1} = \ldots = v_n = 0 \}$
$k = 1, \ldots, n$

$\mathcal{V}_0 = \{0\}$

Imamo $n+1$ orbit.

Recimo, da je $u, v \in \mathcal{V}_k$. Iščemo $A$, da je $u = Av$.

k-ta vrstica:

$$(Av)_k = \cancel{a_{k1} v_1 +} \ldots + a_{kk} v_k + \ldots + a_{kn} v_n = u_k$$

$$a_{kk} = \frac{u_k}{v_k}$$

$$(Av)_{k-1} = a_{k-1,k-1} v_{k-1} + a_{k-1,k} v_k = u_{k-1}$$

---

# BURNSIDEOVA LEMA

$G$ končna

$G$ deluje na $X$

$$\text{št. orbit} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |g^X|$$

$$g^X = \{x \in X ; g \cdot x = x\}$$

---

6 korald $n$ različnih barv

Poišči število ogrlic, ki jih lahko sestavimo.

Ogrlici sta enaki, če se da eno preslikati v drugo z rotacijo ali zrcaljenjem.

$G = D_{2\cdot 6} = \{id, r, r^2, r^3, r^4, r^5, z, rz, r^2z, r^3z, r^4z, r^5z\}$

| $g$ | št. negibnih točk |
|---|---|
| $id$ | $n^6$ |
| $r, r^5$ | $n$ |
| $r^2, r^4$ | $n^2$ |
| $r^3$ | $n^3$ |
| $z, r^2z, r^4z$ | $n^3$ |
| $rz, r^3z, r^5z$ | $n^4$ |

$\frac{1}{12}(n^6 + 3n^4 + 4n^3 + 2n^2 + 2n)$

---

6 koralд, natanko dve rdeči, ostale modre ali zelene

| $g$ | št. negibnih točk |
|---|---|
| $id$ | $\binom{6}{2}\cdot 2^4$ |
| $r, r^5$ | $0$ |
| $r^2, r^4$ | $0$ |
| $r^3$ | $3\cdot 2^2$ |
| $z, r^2z, r^4z$ | $3\cdot 2^2$ |
| $rz, r^3z, r^5z$ | $2\cdot 2 + 2\cdot 2^3$ |

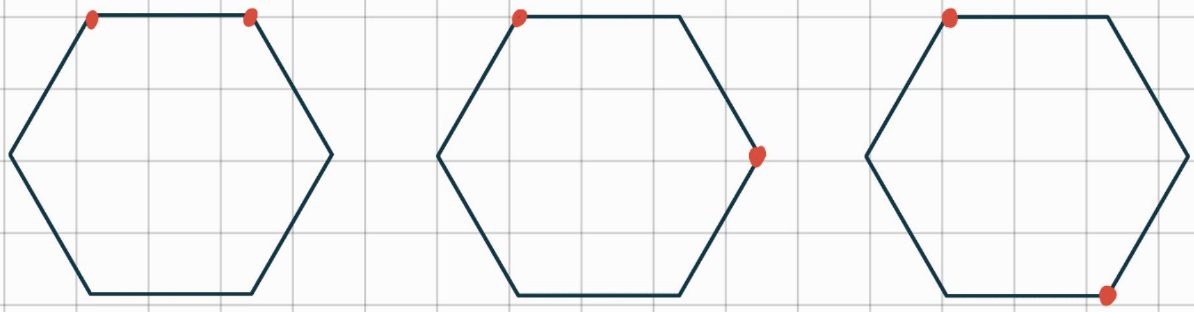
$\frac{1}{12}\left(\binom{6}{2}\cdot 2^4 + 3\cdot 2^2\cdot 4 + (2\cdot 2 + 2\cdot 2^3)\cdot 3\right)$

---

6 korald, natanko dve rdeči, ostale modre

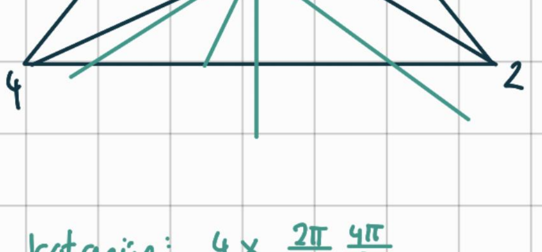
| $g$ | št. negibnih točk |
|---|---|
| id | $\binom{6}{2}$ |
| $r, r^5$ | 0 |
| $r^2, r^4$ | 0 |
| $r^3$ | 3 |
| $z, r^2z, r^4z$ | 3 |
| $rz, r^3z, r^5z$ | $1+2$ |

$$\frac{1}{12}\left(3\cdot 5 + 3\cdot 4 + (1+2)\cdot 3\right) = 3$$



---

Na koliko načinov se da pobarvati lica pravilnega tetraedra z rdečo, modro in zeleno barvo, da je natanko eno lice modro?




rotacije: $4 \times \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$r_1 \sim 120°$

$r_1^2 \sim 240°$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2\,4\,3)$$

$$r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3)(2\,4)$$
$$z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)(3\,4)$$
$$z_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,4)(2\,3)$$

To je $A_4$.

| | $g$ | št. negibnih točk |
|---|---|---|
| 1 | id | $4 \cdot 2^3$ |
| 8 | $(i\,j\,k)$ | 2 |
| 3 | $(i\,j)(k\,l)$ | 0 |

$$\frac{1}{12}\left(4 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2\right) = \frac{48}{12} = 4$$

---

Na koliko načinov se da pobarvati robove pravilnega tetraedra z rdečo in modro?

DN

---

Grupa simetrij kocke je $S_4$, grupa vseh permutacij na diagonalah.

---

IZREKI SYLOWA

$|G| = t \cdot p^s$, $p \nmid t$, $p$ praštevilo

$p$-podgrupa Sylowa je podgrupa moči $p^s$.

$n_p$ = št. $p$-podgrup Sylowa

$n_p \equiv 1 \pmod{p}$
$n_p \mid |G|$
$n_p \mid t$

$n_p = 1 \iff$ p-podgrupa Sylowa je edinka

---

Pokaži, da ima $S_4$ 4 3-podgrupe Sylowa.

Pokaži, da je vsaka 2-podgrupa Sylowa grupe $S_4$ izomorfna $D_8$. Navedi vse 2-podgrupe Sylowa in elemente, s pomočjo katerih so konjugirane.

$|S_4| = 24 = 3 \cdot 2^3$

3-podgrupa Sylowa ima moč 3.
2-podgrupa Sylowa ima moč 8.

$n_3 \mid 8, \quad n_3 \equiv 1 \mod 3$

$\Rightarrow n_3 \in \{1, 4\}$

$n_2 \mid 3, \quad n_3 \equiv 1 \mod 2$

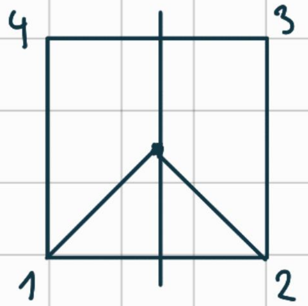
$\Rightarrow n_2 \in \{1, 3\}$

Vse 3-podgrupe Sylowa so:

$P_1 = \langle (1\,2\,3) \rangle$
$P_2 = \langle (1\,2\,4) \rangle$
$P_3 = \langle (1\,3\,4) \rangle$
$P_4 = \langle (2\,3\,4) \rangle$

$\Rightarrow n_3 = 4$

Vse 2-podgrupe Sylowa so:

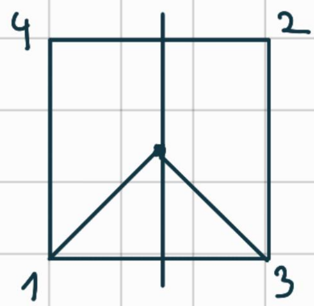



$$H_1 = \{(1\,2\,3\,4),\ (1\,3)(2\,4),\ (1\,4\,3\,2),\ (1\,2)(3\,4),\ (1\,4)(2\,3),\ (1\,3),\ (2\,4),\ id\} \cong D_8$$

To je 2-podgrupa Sylowa. Vemo, da ni edina:

$\frac{4!}{4} = 3! = 6$ 4-ciklov

$\Rightarrow$ 3 podgrupe




Ta menjava je konjugirana z elementom $(2\,3)$.

Imamo pa še eno konjugacijo ...

---

Enostavna grupa nima lastnih netrivialnih edink.

---

Pokaži, da poljubna grupa reda $n$ ni enostavna, če:

a) $n = 88$
b) $n = 30$
c) $n = 48$
d) $n = 36$

a) $n = 88 = 2^3 \cdot 11$

$p_1 = 11 \Rightarrow n_{11} = 1 \mod 11, \quad n_{11} | 8$

$\Rightarrow n_{11} = 1 \iff P_1$ je edinka

b) $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$p_1 = 2 \Rightarrow n_2 = 1 \mod 2, \quad n_2 | 15$

$\Rightarrow n_2 \in \{1, 3, 5, 15\}$

$p_2 = 3 \Rightarrow n_3 = 1 \mod 3, \quad n_3 | 10$

$\Rightarrow n_3 \in \{1, 10\}$

$p_3 = 5 \Rightarrow n_5 = 1 \mod 5, \quad n_5 | 6$

$\Rightarrow n_5 \in \{1, 6\}$

Predpostavimo, da imamo 6 podgrup reda 5.

$H_1 = \{e, a, a^2, a^3, a^4\} = \langle a^i \rangle \quad i = 1,2,3,4$
$H_2 = \{e, b, b^2, b^3, b^4\} = \langle b^j \rangle \quad j = 1,2,3,4$

$H_1 \neq H_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 = \{e\}$

Dobimo 24 elementov reda 5.

Če je $n_3 = 10$, imamo 10 podgrup reda 3, torej vsaj 20 elementov reda 3.

$20 + 24 > 30$

Torej $n_3 = 1$ ali $n_5 = 1$.

Torej obstaja edinka.

---

$H \leq G$

$N_G(H)$ = normalizator $= \{g \in G;\ gHg^{-1} = H\}$
$C_G(H)$ = centralizator $= \{g \in G;\ ghg^{-1} = h \ \forall h \in H\}$

Pokaži: $N_G(H)/C_G(H) \cong$ podgrupi $Aut(H)$

Vedno: $C_G(H) \leq N_G(H)$

$\varphi: N_G(H) \longrightarrow Aut(H)$

$\varphi(g) := \varphi_g$, $\quad \varphi_g(h) = ghg^{-1}$

$\ker\varphi = \{g \in N_G(H);\ \varphi(g) = 1\}$

$\Leftrightarrow \varphi_g(h) = h \Leftrightarrow ghg^{-1} = h \Leftrightarrow g \in C_G(H)$

$\Rightarrow C_G(H) \triangleleft N_G(H)$

$\Rightarrow N_G(H)/C_G(H) \cong \operatorname{im}\varphi \leq Aut(H)$

---

$G := \mathbb{H}^*$

$H = \{+1, -1, +i, -i\} \overset{= \langle H \rangle}{\leq} G$

red: $1 \quad 2 \quad 4 \quad 4$

Določi: $N_G(H)$, $C_G(H)$

Pokaži: $N_G(H)/C_G(H) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{Aut}(H)$

$N_G(H) = \{g \in G \,;\, gig^{-1} \in H\}$

•) $gig^{-1} = 1$
$gi = g$
$i = 1$

$\times$

•) $gig^{-1} = -1$
$gi = -g$
$i = -1$

$\times$

•) $gig^{-1} = i$
$gi = ig$

$(a+bi+cj+dk)i = i(a+bi+cj+dk)$

...

$g = a+bi$

•) $gig^{-1} = -i$
$gi = -ig$

$(a+bi+cj+dk)i = -i(a+bi+cj+dk)$
$ai-b-ck+dj = -ai+b-ck+dj$

$g = cj+dk$

$N_G(H) = \{a+bi \,;\, a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2\neq 0\}$
$\quad \cup \{cj+dk \,;\, c,d\in\mathbb{R},\ c^2+d^2\neq 0\} \leq \mathbb{H}^*$

$C_G(H) = \{a+bi \,;\, a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2\neq 0\}$

$\mathrm{Aut}(H) = \{id, (i\mapsto -i)\} \cong \mathbb{Z}_2$

$g \mapsto \varphi_g, \quad \varphi_g(h) = ghg^{-1}$

$g \mapsto id_H \iff g\in C_G(H)$

$g = cj+dk \Rightarrow \varphi_g = f$

$\Rightarrow \varphi$ je surjektiven

---

Pokaži, da grupa reda 48 ne more biti enostavna.

$48 = 2^4\cdot 3$

2-podgrupa Sylowa ima red $2^4=16$.
3-podgrupa Sylowa ima red 3.

$n_2 \equiv 1 \mod 2, \quad n_2 | 3$

$\Rightarrow n_2 \in \{1,3\}$

Predpostavimo, da je $n_2 = 3$.

Naj bosta $H, K$ podgrupi reda 16.

$$|H \cap K| \mid 16 \Rightarrow |H \cap K| = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{4}, 8, \cancel{16}\}$$

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|} = \frac{16 \cdot 16}{|H \cap K|} \leq 48$$

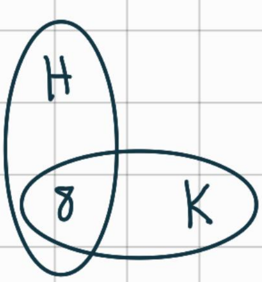
$$\Rightarrow |H \cap K| = 8$$

$$N_G(H \cap K) \leq G$$

$$|H| = 16$$
$$|H \cap K| = 8$$

$$H \cap K \triangleleft H, K$$

$$\Rightarrow N_G(H \cap K) \supseteq H, K$$




$$\Rightarrow |N_G(H \cap K)| \geq 24$$

$$N_G(H \cap K) \leq G \Rightarrow |N_G(H \cap K)| \in \{24, 48\}$$

i) $|N_G(H \cap K)| = 24$:

$N_G(H \cap K)$ je edinka.

$\Rightarrow$ Grupa ni enostavna.

ii) $|N_G(H \cap K)| = 48$:

$N_G(H \cap K) = G$

$\Rightarrow H \cap K \triangleleft G$

$\Rightarrow$ Grupa ni enostavna.

---

Pokaži, da grupa reda 36 ne more biti enostavna.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

2-podgrupa Sylowa ima red $2^2 = 4$.
3-podgrupa Sylowa ima red $3^2 = 9$.

$n_2 \equiv 1 \mod 2$
$n_2 \mid 9$

$\Rightarrow n_p \in \{1, 3, 9\}$

$n_3 \equiv 1 \mod 3$
$n_3 \mid 4$

$\Rightarrow n_3 \in \{1, 4\}$

Če je $n_3 = 1$, je to edinka, torej grupa ni enostavna.

Predpostavimo, da je $n_3 = 4$.

Naj bosta $H, K$ različni podgrupi reda 9.

$|H\cap K| \mid 9 \Rightarrow |H\cap K| \in \{\cancel{1}, 3, \cancel{9}\}$

$36 \geq |HK| = \frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|} = \frac{9\cdot 9}{|H\cap K|} \Rightarrow |H\cap K| \geq \frac{81}{36} \geq 3$

$\Rightarrow |H\cap K| = 3$

$H, K \leq N_G(H\cap K) \Rightarrow |N_G(H\cap K)| \geq 6+6+3 = 15$

$N_G(H\cap K) \leq G \Rightarrow |N_G(H\cap K)| \in \{18, 36\}$

- $|N_G(H\cap K)| = 36$:

  $N_G(H\cap K) = G$

  $\Rightarrow H\cap K \triangleleft G$

  $\Rightarrow$ Grupa ni enostavna.

- $|N_G(H\cap K)| = 18$:

  $N_G(H\cap K) \triangleleft G$ ?

  $\Rightarrow$ Grupa ni enostavna.

---

Naj bo $G$ končna grupa, $H < G$, $[G:H] = m$. Pokaži, da če $|G| \nmid m!$, $G$ ne more biti enostavna.

Primer: $H$ je indeksa 3, če $|G| \nmid 6$, torej $G$ ne more biti enostavna.

Primer: $|G| = 48$
$H$ = 2-podgrupa Sylowa
$[H:G] = 3$

$\Rightarrow G$ ni enostavna

$G \cdot H = \{gH;\ g \in G\}$

$|GH| = m$

$G$ deluje na $G \cdot H$:

$g \cdot hH = ghH$

$\varphi : G \to \mathrm{Sym}(G \cdot H)$ homomorfizem

$\varphi_g(hH) = ghH$

$G/\ker\varphi \cong \operatorname{im}\varphi \subseteq \mathrm{Sym}(G \cdot H)$

$\Rightarrow \ker\varphi \triangleleft G$

$$\underset{\displaystyle |G/\ker\varphi|}{\overset{\displaystyle |\operatorname{im}\varphi|}{\|}} \;\Big|\; m!$$

$\Rightarrow |G| = |\operatorname{im}\varphi| \cdot |\ker\varphi|$

- $|\ker\varphi| = 1$:

  $|G| \mid m!$

  $\times$

- $\ker\varphi = G$:

  $\Leftrightarrow \varphi_g(hH) = hH \quad \forall g, h$

$\varphi_g = \begin{pmatrix} H & hH & \cdots \\ gH & & \end{pmatrix} \neq id$

$\Rightarrow |im\varphi| \neq 1$

$\Rightarrow \ker\varphi \triangleleft G$, $\ker\varphi \neq \{1\}$, $\ker\varphi \neq G$

---

Naj bo $|G| = 3 \cdot 2^k$, $k \geq 2$. Pokaži, da $G$ ni enostavna.

$H$ = 2-podgrupa Sylowa
$|H| = 2^k$
$[G : H] = 3$

$k \geq 2$, $|G| \geq 12$, $|G| \nmid 6$

$\Rightarrow$ Po prejšnji nalogi $G$ ni enostavna.

---

Naj bo $|G| = 2m$, kjer je $m$ liho. Pokaži, da ima $G$ podgrupo indeksa 2 in zato ne more biti enostavna.

$f : G \to \mathbb{Z}_2$ surjektiven homomorfizem

$\Rightarrow \ker\varphi \triangleleft G \Rightarrow |G : \ker\varphi| = 2$

$G$ deluje na $G$ s konjugiranjem / $\varphi_g(h) = gh$

Po Cauchyevem izreku ima $G$ element reda 2.

$\varphi : G \to Sym(G)$
$\varphi_g(h) = gh$

$\varphi_a(h) = ah$
$\varphi_a(ah) = h$

Ali je lahko $ah = h \Leftrightarrow a = 1$? Ne.

$\varphi_a$ je produkt transpozicij, nima negibnih točk.

$\Rightarrow$ Ima $m$ transpozicij.

$s(\varphi_a) = -1$ ker $s(\varphi_a) = (-1)^m$ in je $m$ liho

$$G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Sym}(G) \xrightarrow{\text{sign}} \{-1, 1\}$$

$f := s \circ \varphi$ je homomorfizem.

$\varphi_a \to -1$
$id \to 1$

$\Rightarrow f$ je surjektiven.

$\Rightarrow \ker f \triangleleft G$, $|G : \ker f| = 2$

---

Naj bo $p$ praštevilo. Koliko različnih $p$-podgrup Sylowa ima $S_p$?

$|S_p| = p \cdot (p-1)!$

$p$-podgrupa Sylowa ima red $p$.

$n_p \equiv 1 \mod p$
$n_p \mid (p-1)!$

$\Rightarrow n_p \in \{1\} \cup \{kp+1 ; (kp+1) \mid (p-1)!\}$

Vsaka $p$-podgrupa Sylowa je izomorfna $\mathbb{Z}_p$.

$S_p$ ima $(p-1)!$ $p$-ciklov.

$C_p$ ima $p-1$ elementov $(a, a^2, \ldots)$ reda $p$.

$\Rightarrow S_p$ ima $\frac{(p-1)!}{p-1} = (p-2)!$ $p$-podgrup Sylowa.

---

Koliko $p$-podgrup Sylowa ima $A_5$?

$|A_5| = \frac{5!}{2} = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

a) $p = 2$:

$n_2 \equiv 1 \bmod 2$
$n_2 \mid 15$

$\Rightarrow n_2 \in \{\cancel{1}, 3, 5, 15\}$

Naj bosta $H, K$ različni podgrupi reda 4.

$|H \cap K| \in \{1, 2\}$

???

b) $p = 3$:

$n_3 \equiv 1 \bmod 3$
$n_3 \mid 20$

$\Rightarrow n_3 \in \{\cancel{1}, 4, 10, 20\}$

Naj bosta $H, K$ različni podgrupi reda 3.

$|H \cap K| = 1$

???

c) $p = 5$:

$n_5 \equiv 1 \mod 5$
$n_5 \mid 12$

$\Rightarrow n_5 \in \{1, 6\}$

Naj bosta $H, K$ različni podgrupi reda 5.

$|H \cap K| = 1$

???