KATEGORIJE

Definicija: Kategorija je struktura $\underline{\mathcal{C}}$, ki jo sestavljata:

1) Razred objektov $Ob\underline{\mathcal{C}}$

2) Za objekta A, B iz $Ob\underline{\mathcal{C}}$ imamo množico morfizmov $\underline{\mathcal{C}}(A,B)$.

Poleg tega imamo definirano preslikavo kompozitum:

$$\underline{\mathcal{C}}(B,C) \times \underline{\mathcal{C}}(A,B) \to \underline{\mathcal{C}}(A,C)$$
$$(g,f) \mapsto g \circ f$$

Za katero velja:

a) Za vse $h \in \underline{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in \underline{\mathcal{C}}(B,C)$, $f \in \underline{\mathcal{C}}(C,D)$ za vse A, B, C, D iz $Ob\underline{\mathcal{C}}$ velja:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

b) Za vsak objekt A iz $Ob\underline{\mathcal{C}}$ obstaja morfizem $1_A \in \underline{\mathcal{C}}(A,A)$ (identični morfizem), da velja:

$$f \circ 1_A = f \quad \text{za vse } f \in \underline{\mathcal{C}}(A,B) \text{ za vse } B$$
$$1_A \circ g = g \quad \text{za vse } f \in \underline{\mathcal{C}}(B,A) \text{ za vse } B$$

Primer: $\underline{Set}$:

Objekti: množice

$\underline{Set}(A,B) = \{$vse preslikave $A \to B\}$

$\circ$ = običajni kompozitum

Primer: $\underline{Grp}$:

Objekti: grupe

$\underline{Grp}(A,B) = \{$vsi homomorfizmi $A \to B\}$

$\circ$ = običajni kompozitum

Primer: $\underline{Ring}$:

Objekti: kolobarji z enoto

$\underline{Ring}(A,B) = \{$vsi homomorfizmi $A \to B\}$

$\circ$ = običajni kompozitum

Primer: $\underline{Vec}_K$:

Objekti: vektorski prostori nad poljem K

$\underline{Vec}_K(A,B) = \{$vse linearne preslikave $A \to B\}$

$\circ$ = običajni kompozitum

Primer: $\underline{Vec}_{\mathbb{Z}}$:

Objekti: Abelove grupe

$\underline{Vec_{\mathbb{Z}}}(A,B) = \{$vsi homomorfizmi $A \to B\}$

$= \{$vse linearne preslikave $A \to B\}$

$\circ$ = običajni kompozitum

Primer: $\underline{Top}$:

Objekti: topološki prostori

$\underline{Top}(A,B) = \{$zvezne preslikave $A \to B\}$

$\circ$ = običajni kompozitum

Primer: Naj bo M delno urejena množica z relacijo $\leq$ (refleksivna, tranzitivna, antisimetrična).

Definiramo kategorijo $\underline{M}$:

Objekti: elementi množice M

Morfizmi:

$a, b \in M$

$$\underline{M}(a,b) = \begin{cases} \{(a,b)\} & ; a \leq b \\ \emptyset & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Kompozitum:

$a, b, c \in M, \quad a \leq b, \ b \leq c \quad (\Rightarrow a \leq c)$

$(b,c) \circ (a,b) := (a,c)$

Identiteta:

$a \in M, \quad a \leq a$

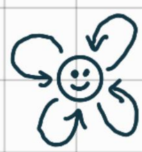
(a, a)

Primer: Naj bo $(M, \circ)$ monoid.

Definirajmo kategorijo $\underline{\mathrm{Mon}}_M$:

Objekti: ☺ (en objekt)

Morfizmi: elementi M



Kompozitum: $m_1 \circ m_2 := m_1 m_2$

Identiteta: enota monoida

POSEBNI TIPI MORFIZMOV

Definicija: Naj bo $\underline{\mathcal{C}}$ kategorija, $f \in \underline{\mathcal{C}}(A, B)$. Pravimo, da je f izomorfizem objektov A in B, če obstaja $g \in \underline{\mathcal{C}}(B, A)$, da velja:

$g \circ f = 1_A$
$f \circ g = 1_B$

Morfizmu g pravimo inverz morfizma f.

Tedaj sta objekta A in B izomorfna.

Primer: $\underline{\mathbf{Set}}$:

$A, B \in \underline{\mathbf{Set}}$ izomorfni

$\Leftrightarrow \exists$ bijekcija $A \to B$

$\Leftrightarrow |A| = |B|$

Primer: $\underline{\mathbf{Grp}}$, $\underline{\mathbf{Ring}}$:

izomorfizem = izomorfizem grup/kolobarjev

Primer: $\underline{\mathbf{Top}}$:

izomorfizem = homeomorfizem topoloških prostorov

Primer: $(M, \leq)$:

$a, b \in M$ izomorfna

$\Leftrightarrow a \leq b$ in $b \leq a$

$\Leftrightarrow a = b$

Primer: $\underline{\mathbf{Mon}_M}$:

$m \in M$ izomorfizem

$\iff m$ obrnljiv v M

Opomba: Grupa je kategorija z enim objektom, v kateri so vsi morfizmi izomorfizmi.

Definicija: Naj bo $\underline{\mathcal{C}}$ kategorija, $f \in \underline{\mathcal{C}}(A,B)$.

1) f je prerez, če ima levi inverz:
$\exists g \in \underline{\mathcal{C}}(B,A) : g \circ f = 1_A$

2) f je retrakt, če ima desni inverz:
$\exists g \in \underline{\mathcal{C}}(B,A) : f \circ g = 1_B$

3) f je monomorfizem, če za vsaka $g,h \in \underline{\mathcal{C}}(C,A)$ iz enakosti $f \circ g = f \circ h$ sledi $g = h$.

4) f je epimorfizem, če za vsaka $g,h \in \underline{\mathcal{C}}(B,C)$ iz enakosti $g \circ f = h \circ f$ sledi $g = h$.

Primer: $\underline{\text{Set}}$, $\underline{\text{Grp}}$, $\underline{\text{Vec}}$:

monomorfizmi = injektivni morfizmi
epimorfizmi = surjektivni morfizmi

Primer: $\underline{\text{Ring}}$:

$i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$

i je homomorfizem kolobarjev.

i ni surjektiven, ampak je epimorfizem:

Vzemimo poljubna $f, g \in \underline{\mathrm{Ring}}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$, za katera je $g \circ i = f \circ i$, torej $g|_{\mathbb{Z}} = f|_{\mathbb{Z}}$.

$\mathbb{Q}$ je polje ulomkov celih števil.

$g|_{\mathbb{Z}}$ in $f|_{\mathbb{Z}}$ lahko na enoličen način razširimo do $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) f(b)^{-1} = g(a) g(b)^{-1} = g\left(\frac{a}{b}\right)$$

Primer: $\underline{\mathrm{Top}}$:

$i : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$

i je monomorfizem in epimorfizem, ni pa izomorfizem:

Monomorfizmi v $\underline{\mathrm{Top}}$ so vložitve.

Naj bosta $g, h \in \underline{\mathrm{Top}}(\mathbb{R}, X)$, $X \in T_2$.

$g \circ i = f \circ i$

$\Rightarrow g|_{\mathbb{Q}} = f|_{\mathbb{Q}}$

To sta zvezni preslikavi, ki se ujemata na gosti množici.

$\Rightarrow g = f$

Opomba: Vsak prerez je monomorfizem.
Vsak retrakt je epimorfizem.

Primer: $\underline{Ab}_0$:

$\underline{Ab}_0$ ... Abelove grupe brez torzije (brez končnih redov)

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto 2 \cdot x$$

f je monomorfizem, ni pa prerez.

Monomorfizem:

$$f \circ g = f \circ h$$
$$2g = 2h$$
$$2(g-h) = 0$$
$$g = h$$

Ni prerez:

Inverz bi bil $x \mapsto \frac{1}{2}x$.

Definicija: Naj bo $\underline{\mathcal{C}}$ kategorija.

1) Objekt Z je začetni objekt kategorije $\underline{\mathcal{C}}$, če za vsak objekt C iz $\underline{\mathcal{C}}$ velja $|\underline{\mathcal{C}}(Z, C)| = 1$.

2) Objekt K je končni objekt kategorije $\underline{\mathcal{C}}$, če za vsak objekt C iz $\underline{\mathcal{C}}$ velja $|\underline{\mathcal{C}}(C, K)| = 1$.

Trditev: Če v kategoriji $\underline{\mathcal{C}}$ obstaja začetni objekt, je do izomorfizma natanko določen.

Opomba: Enako za končne objekte.

Dokaz: Naj bosta Z_1, Z_2 začetna objekta $\underline{\mathcal{C}}$.

$|\mathcal{C}(Z_1, Z_2)| = 1 \Rightarrow \exists!\ Z_1 \xrightarrow{f} Z_2$
$|\mathcal{C}(Z_2, Z_1)| = 1 \Rightarrow \exists!\ Z_2 \xrightarrow{g} Z_1$

Dokazujemo, da je $f \circ g = 1_{Z_2}$ in $g \circ f = 1_{Z_1}$.

$f \circ g \in \mathcal{C}(Z_2, Z_2)$ je edini morfizem
$1_{Z_2} \in \mathcal{C}(Z_2, Z_2)$

$\Rightarrow f \circ g = 1_{Z_2}$

Podobno $g \circ f = 1_{Z_1}$.

Primer: $\underline{\text{Set}}$, $\underline{\text{Top}}$:

$\emptyset$ je začetni objekt.
Enojci so končni objekti.

Primer: $\underline{\text{Grp}}$:

Trivialna grupa je začetni in končni objekt.

Primer: $\underline{\text{Mon}}_M$:

Če je $|M| = 1$, je ☺ začetni in končni objekt.
Sicer nimamo niti začetnega niti končnega objekta.

Definicija: Naj bo $\underline{\mathcal{C}}$ kategorija. Dualna ali nasprotna kategorija kategorije $\underline{\mathcal{C}}$ je kategorija $\underline{\mathcal{C}}^{opp}$, za katero velja:

1) $\text{Ob}\,\underline{\mathcal{C}}^{opp} := \text{Ob}\,\underline{\mathcal{C}}$

2) $\underline{\mathcal{C}}^{opp}(A,B) := \underline{\mathcal{C}}(B,A)$

3) $f \in \underline{\mathcal{C}}^{opp}(A,B)$, $g \in \underline{\mathcal{C}}^{opp}(B,C)$:
$g * f := f \circ g$

Primer: Končni objekt kategorije $\underline{\mathcal{C}}$ je začetni objekt kategorije $\underline{\mathcal{C}}^{opp}$.

FUNKTORJI IN NARAVNE TRANSFORMACIJE

Definicija: Naj bosta $\underline{\mathcal{C}}$ in $\underline{\mathcal{D}}$ kategoriji. Funktor med $\underline{\mathcal{C}}$ in $\underline{\mathcal{D}}$ je predpis, za katerega velja:

1) Vsakemu objektu C iz $\underline{\mathcal{C}}$ priredimo objekt $F(C)$ v $\underline{\mathcal{D}}$.

2) Za vsaka objekta A, B iz $\underline{\mathcal{C}}$ imamo preslikavo:

$$\underline{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \underline{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$
$$f \longmapsto F(f)$$

Za katero velja:

i) Za vsak objekt A iz $\underline{\mathcal{C}}$ velja $F(1_A) = 1_{F(A)}$.
ii) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

Primer: F iz $\underline{Grp}$ v $\underline{Set}$:

grupa $G \longmapsto$ množica G
homomorfizem $f: G \to H \longmapsto$ preslikava $f: G \to H$

F imenujemo pozabljivi funktor.

Primer: Naj bo G grupa.

Komutator elementov $x, y \in G$ je $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$.
Komutatorska podgrupa je $G' = \langle [x,y],\ x,y \in G \rangle$.

Definiramo funktor F iz $\underline{Grp}$ v $\underline{Grp}$:

$G \mapsto G'$
$f: G \to H$ homo $\mapsto f|_{G'}: G' \to H'$

Preveriti je treba, da f slika G' v H'.

$f([x,y]) = f(xyx^{-1}y^{-1}) = f(x)f(y)f^{-1}(x)f^{-1}(y) = [f(x), f(y)] \in H'$

Primer: F iz $\underline{Grp}$ v $\underline{Grp}$:

$G \mapsto Z(G)$
$f: G \to H \mapsto f|_{Z(G)}: Z(G) \to Z(H)$

To pa ne gre:

$\mathbb{Z}_2 \to S_3$ vložitev

$Z(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$
$Z(S_3) = \{id\}$

Primer: Naj bo $\underline{\mathcal{C}}$ kategorija.

Fiksirajmo objekt A.

Definirajmo funktor F iz $\underline{\mathcal{C}}$ v $\underline{Set}$:

C objekt $\underline{\mathcal{C}} \mapsto \underline{\mathcal{C}}(A,C)$

$f \in \underline{\mathcal{C}}(B,C)$ priredimo preslikavo:

$$F(f): \underline{\mathcal{C}}(A,B) \to \underline{\mathcal{C}}(A,C)$$
$$g \mapsto f \circ g$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & C \\ A \arrow[u, "g"] & \end{tikzcd}$$

To je funktor.

Definicija: Naj bosta $\underline{\mathcal{C}}$ in $\underline{\mathcal{D}}$ kategoriji. **Kofunktor** iz $\underline{\mathcal{C}}$ v $\underline{\mathcal{D}}$ je predpis, za katerega velja:

1) Objektu C iz $\underline{\mathcal{C}}$ priredimo objekt $F(C)$ v $\underline{\mathcal{D}}$.

2) Morfizmu $f \in \underline{\mathcal{C}}(A,B)$ priredimo morfizem $F(f) \in \underline{\mathcal{D}}(F(B),F(A))$, za katerega velja:

   i) $F(1_A) = 1_A$
   ii) $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$

Opomba: Kofunktor iz $\underline{\mathcal{C}}$ v $\underline{\mathcal{D}}$ je funktor iz $\underline{\mathcal{C}}^{opp}$ v $\underline{\mathcal{D}}^{opp}$.

Primer: F iz $\underline{Vec}_K$ v $\underline{Vec}_K$:

V objekt: $F(V) = V^* = \mathcal{L}(V,K)$

$A: U \to V$ homo $\longmapsto$ $F(A): V^* \to U^*$
$F(A) := A^d$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & K \\ U \arrow[u, "A"] \arrow[ur, "A^d(\varphi)"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi \in V^*$: $A^d(\varphi) = \varphi \circ A$

$F(id_V) = id_{V^*}$, ker je $I_V^d = I_V$.

$(A \circ B)^d = B^d \circ A^d$

$V \longrightarrow V^{**}$ je kofunktor iz $\underline{Vec}_K$ v $\underline{Vec}_K$.

Primer: Naj bo $\underline{\mathcal{C}}$ kategorija.

Fiksirajmo objekt A.

Definirajmo F iz $\underline{\mathcal{C}}$ v $\underline{Set}$:

C objekt $\underline{\mathcal{C}}$ $\mapsto$ $\underline{\mathcal{C}}(C, A)$

$f \in \underline{\mathcal{C}}(B, C)$ priredimo preslikavo:

$F(f): \underline{\mathcal{C}}(C, A) \to \underline{\mathcal{C}}(B, A)$
$g \mapsto g \circ f$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] & A \\ B \arrow[u, "f"] & \end{tikzcd}$$

To je kofunktor.

Definicija: Naj bosta $\underline{\mathcal{C}}$ in $\underline{\mathcal{D}}$ kategoriji. Naj bosta F in G funktorja iz $\underline{\mathcal{C}}$ v $\underline{\mathcal{D}}$. Naravna transformacija med F in G, $\mu : F \to G$, je nabor morfizmov $\mu_C \in \underline{\mathcal{D}}(F(C), G(C))$, za katerega velja:

Za poljuben $f \in \underline{\mathcal{C}}(A, B)$ spodnji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & F(B) \arrow[d, "\mu_B"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

$$G(f) \circ \mu_A = \mu_B \circ F(f)$$

Primer: Dva funktorja iz $\underline{Grp}$ v $\underline{Grp}$:

1. funktor: Identični funktor

$$\begin{aligned} Id :\ & G \mapsto G \\ & (f : G \to H) \mapsto (f : G \to H) \end{aligned}$$

2. funktor: Abelacija

$$\begin{aligned} Ab :\ & G \mapsto G^{ab} = G/G' \\ & (f : G \to H) \mapsto \left(f^{ab} : \begin{array}{l} G^{ab} \to H^{ab} \\ xG' \mapsto f(x)H' \end{array} \right) \end{aligned}$$

f^{ab} je dobro definirana in je homomorfizem ...

Naredimo naravno transformacijo med Id in Ab:

G grupa

$$\nu_G : G \to G^{ab}$$
$$g \mapsto gG'$$

Ta nabor je naravna transformacija med Id in Ab:

G, H grupi

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\nu_G"'] & H \arrow[d, "\nu_H"] \\
G^{ab} \arrow[r, "f^{ab}"'] & H^{ab}
\end{tikzcd}$$

Ta diagram komutira:

$x \in G$

$$(\nu_H \circ f)(x) = \nu_H(f(x)) = f(x)H' = f^{ab}(xG') = f^{ab}(\nu_G(x)) = (f^{ab} \circ \nu_G)(x)$$

PRODUKTI, KOPRODUKTI, PROSTI OBJEKTI

Definicija: Naj bo $\mathcal{C}$ kategorija. Naj bo I indeksna množica in A_i, $i \in I$, družina objektov iz $\mathcal{C}$.

Produkt družine objektov A_i je objekt P, skupaj z morfizmi $\pi_i : P \to A_i$, $i \in I$, da velja:

Za vsak objekt X in vsak nabor morfizmov $f_i : X \to A_i$ obstaja natanko en morfizem $f : X \to P$, da diagram komutira za vse $i \in I$:

$$\begin{tikzcd} A_i & P \arrow[l, "\pi_i"'] \\ & X \arrow[ul, "f_i"] \arrow[u, dashed, "f"'] \end{tikzcd}$$

Morfizmom π_i pravimo strukturni morfizmi.

Primer: Set:

A, B množici

$A \times B$ je produkt A in B:

$$A \xleftarrow{\pi_1 = pr_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2 = pr_2} B$$

X poljubna množica

$f_1 : X \to A$
$f_2 : X \to B$

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\ & X \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

Recimo, da obstaja tak f:

$\pi_1 \circ f = f_1 \Rightarrow \pi_1(a_x, b_x) = f_1(x) \Rightarrow a_x = f_1(x)$
$\pi_2 \circ f = f_2 \Rightarrow \pi_2(a_x, b_x) = f_2(x) \Rightarrow b_x = f_2(x)$

$f(x) = (a_x, b_x)$

Če f obstaja, mora veljati $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, torej je enolično.

Smo ga že konstruirali, torej obstaja.

Podobno, produkt poljubne družine množic je kartezični produkt $\prod_{i \in I} A_i$, skupaj s projekcijami na faktorje.

Primer: $\underline{\mathrm{Grp}}$:

Produkt družine grup je kartezični produkt z operacijo po komponentah in projekcijami.

Primer: $\underline{\mathrm{Top}}$, $\underline{\mathrm{Ring}}$, $\underline{\mathrm{Vec}_k}$:

Spet vse deluje ...

Primer: $\underline{\mathrm{Field}}$:

$f: F_1 \to F_2$ neničelen homomorfizem

$\ker f \triangleleft F_1 \Rightarrow \ker f = \{0\} \Rightarrow f$ injektiven

$\Rightarrow F_1$ in F_2 morata biti iste karakteristike.

Produkt polj bi moral biti tudi produkt v kategoriji kolobarjev, torej kartezični produkt.

Ampak kartezični produkt pa ni polje.

Torej v poljih nimamo produktov.

Primer: Kategorija, določena iz delno urejene množice $(M, \leq)$.

Produkt $a, b \in M$, če obstaja:

$$\begin{tikzcd}
a & p \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & b \\
& X \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$\pi_1 = (p, a) : p \leq a$
$\pi_2 = (p, b) : p \leq b$

$x \leq a, \; x \leq b \Rightarrow x \leq p$

$p = \inf(a, b)$ (če obstaja)

Trditev: Naj bo A_i, $i \in I$, družina objektov iz $\underline{\mathcal{C}}$. Naj bosta $(P, \pi_i)_{i\in I}$ in $(Q, \sigma_i)_{i\in I}$ produkta objektov A_i. Potem sta P in Q izomorfna.

Dokaz: Naredimo novo kategorijo $\underline{\mathcal{D}}$:

Objekti:

$$\begin{tikzcd}
& A_i \\
C \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\
& A_j
\end{tikzcd}$$

(C, skupaj z morfizmi $f_i : C \to A_i$)

Morfizem med dvema takima objektoma:

$$\begin{tikzcd}
& A_i \\
C \arrow[ur, "f_i"] & \vdots
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
& A_i \\
\tilde{C} \arrow[ur, "g_i"] &
\end{tikzcd}$$

$\quad\; \| \qquad\qquad\qquad\quad \|$
$\quad D_1 \qquad\qquad\qquad D_2$

Morfizem med D_1 in D_2 je morfizem f med C in $\tilde{C}$ v $\underline{\mathcal{C}}$, za katerega komutira diagram za vsak $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} & \bar{C} \arrow[dl, "g_i"'] \\ A_i & C \arrow[l, "f_i"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Produkt v $\underline{\mathcal{C}}$ je končni objekt v $\underline{\mathcal{D}}$, ki je pa enolično določen.

Definicija: Naj bodo A_i, $i \in I$, objekti kategorije $\underline{\mathcal{C}}$. **Koprodukt družine objektov** A_i je produkt teh objektov v $\underline{\mathcal{C}}^{opp}$.

Natančneje, to je objekt Q, skupaj z morfizmi $\sigma_i : A_i \to Q$, da velja:

Za vsak objekt X in za vse $f_i : A_i \to X$ obstaja natanko en morfizem $f : Q \to X_i$, da komutirajo vsi diagrami:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & Q \arrow[d, dashed, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Primer: $\underline{\text{Set}}$:

A, B množici

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[dr, "f_2"'] & Q \arrow[d, dashed, "f"] & B \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

X množica

$f_1 : A \to X$
$f_2 : B \to X$

$$f: Q \to X$$
$$f(a) = f_1(a)$$
$$f(b) = f_2(b)$$

$Q = A + B = A \sqcup B$ (vsota / disjunktna unija)

Primer: <u>Grp</u>:

G, H grupi

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & Q \arrow[d, dashed, "f"] & H \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

$Q = G * H$ (prosti produkt)

α = formalni produkt $g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_k h_k$, $g_i \in G, h_i \in H$
produkt = sklop besed

$\sigma_1: G \to G * H$, $\sigma_2: H \to G * H$ naravni preslikavi

$$f(g) := f_1(g)$$
$$f(h) := f_2(h)$$

$$f(g_1 h_1 \cdots g_k h_k) := f(g_1) f(h_1) \cdots f(g_k) f(h_k)$$

Primer: <u>Vec_K</u>:

$$\begin{tikzcd}
V_i \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & Q \arrow[d, dashed, "f"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

$Q := \{(v_i)_{i\in I} \ ; \ v_i \in V_i, \text{ le končno mnogo } v_i \neq 0\} =$

$= \bigoplus_{i\in I} V_i$ (direktna vsota)

$\sigma_i : V_i \to \bigoplus_{i\in I} V_i$

$f((v_i)_{i\in I}) = \sum f_i(v_i)$

Definicija: Kategorija $\underline{\mathcal{C}}$ je **konkretna kategorija**, če lahko na objekte gledamo kot na množice in na morfizme kot preslikave med množicami.

Primer:  ni konkretna kategorija.

Definicija: Naj bo $\underline{\mathcal{C}}$ konkretna kategorija. Naj bo X neprazna množica. **Prosti objekt** nad množico X je objekt F, skupaj s preslikavo $\iota : X \to F$, da velja:

Za vsak objekt C in vsako preslikavo $\varkappa : X \to C$ obstaja natanko en morfizem iz F v C, da komutira diagram:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\iota"'] & C \\ F \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Trditev: Prosti objekt, če obstaja, je do izomorfizma natanko določen.

Dokaz: Kategorija $\underline{\mathcal{D}}$:

Objekti: $X \xrightarrow{\varkappa} C$

Morfizem med $X \xrightarrow{\kappa} C$, $X \xrightarrow{\lambda} D$ =

= morfizem f med C in D, da komutira diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\kappa"'] & D \\
C \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Prosti objekt v $\underline{\mathcal{C}}$ = začetni objekt v $\underline{\mathcal{D}}$

Primer: $\underline{Vec_K}$:

X poljubna množica

$F = \mathrm{Lin}\, X = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k \,;\, k \geq 0,\ x_i \in X,\ \alpha_i \in K\}$

Primer: $\underline{Mon}$:

X poljubna množica

$F = \{x_1 x_2 \cdots x_k \,;\, x_i \in X\}$ ... prosti monoid nad X

produkt = sklop besed

Primer: $\underline{Grp}$:

X poljubna množica

X^{-1} ... formalni inverz

$F = \{x_1 x_2 \cdots x_k \,;\, x_i \in X \cup X^{-1}\}$ ... prosta grupa nad X

produkt = sklop + krajšanje (na reduciranih besedah)