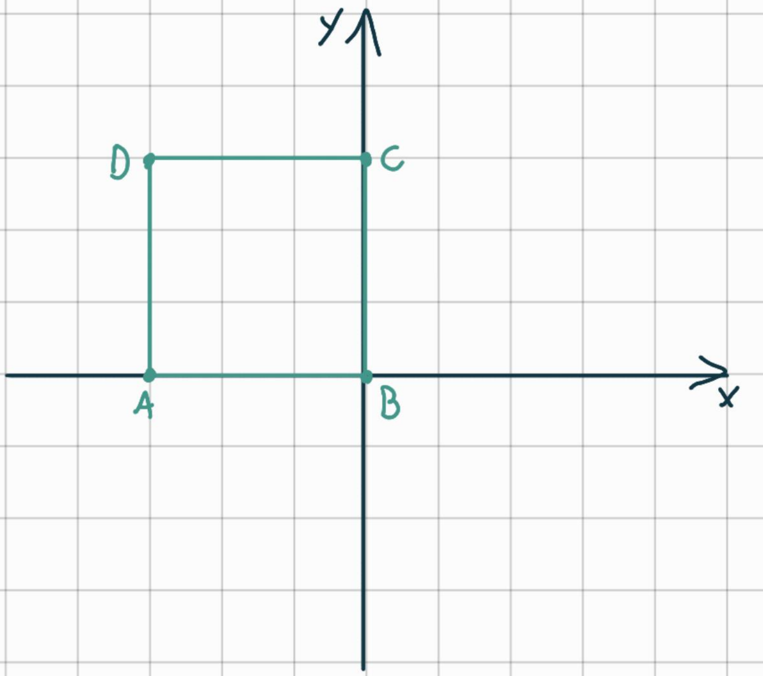
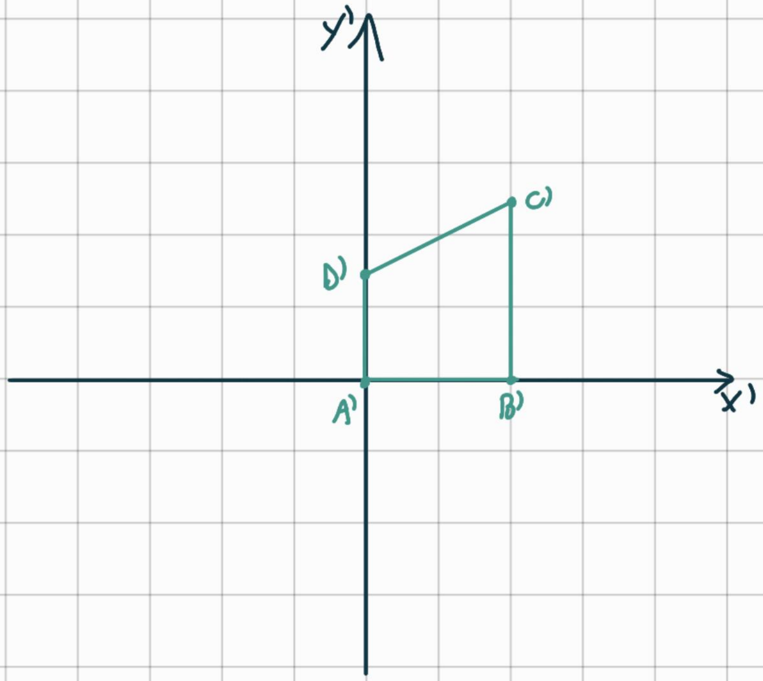
1) S fotoaparatom naredimo posnetek, na katerem vidimo kvadrat z oglišči $A(-1,0)$, $B(0,0)$, $C(0,1)$ in $D(-1,1)$. Nato fotoaparat obrnemo za $45°$ v levo in spet fotografiramo. Kaj vidimo na novem posnetku?

Prvotni posnetek:



Novi posnetek:



i) Izračunajmo zveze med koordinatami (x,y,z) in (x',y',z'):

$$x' = \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot z$$
$$y' = y$$
$$z' = -\sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot z$$

$$x' = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$
$$y' = y$$
$$z' = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$$

ii) Izračunajmo pretvorbe slike pri vrtenju fotoaparata:

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{točka na prvotni sliki} & & \text{žarek, ki poradi to točko} & & \text{ta žarek v zasukanih koordinatah} & & \text{točka na zavrteni sliki} \\
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \longleftrightarrow & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \longleftrightarrow & \begin{bmatrix} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) \\ y' = y \\ z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+1) \end{bmatrix} & \longleftrightarrow & \begin{bmatrix} \frac{x+1}{1-x} \\ \frac{\sqrt{2}x}{1-x} \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto \left(\frac{1+x}{1-x}, \frac{\sqrt{2}x}{1-x}\right)$$

$$\Phi(A) = \Phi(-1,0) = (0,0)$$
$$\Phi(B) = \Phi(0,0) = (1,0)$$
$$\Phi(C) = \Phi(0,1) = (1,\sqrt{2})$$
$$\Phi(D) = \Phi(-1,1) = (0,\tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

Definicija: Naj bo O obseg in $n \geq 3$. Kolineacija projektivnega prostora $P(O^n)$ je bijekcija $\vartheta: P(O^n) \to P(O^n)$, ki kolineane točke preslika v kolineane.

Osnovni izrek projektivne geometrije:

Vsaka kolineacija $\vartheta : P(\mathcal{O}^n) \to P(\mathcal{O}^n)$ je oblike $\vartheta(p) = Mp$, kjer je $M : \mathcal{O}^n \to \mathcal{O}^n$ obrnljiva semilinearna preslikava.

Definicija: Preslikava $\vartheta : P(\mathcal{O}^n) \to P(\mathcal{O}^n)$, $p \mapsto Mp$ je **projektivnost**, če je M obrnljiva linearna.

Opomba: Če je $\mathcal{O} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p\}$, so vse kolineacije projektivnosti.

Opomba: Grupa projektivnosti $P(\mathbb{R}^3)$ je izomorfna grupi $\mathrm{Aut}(P(\mathbb{R}^3)) = PGL(3) = \frac{GL(3)}{M \setminus kM}$.

---

2) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dano projektivno ogrodje $X_0 = [1:1:1]$, $X_1 = [1:0:0]$, $X_2 = [0:1:0]$, $X_3 = [0:0:1]$.

a) Poišči predpis za projektivnost $\vartheta_A : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$, ki je določena s pogoji:

$$\vartheta_A(X_0) = [1:1:1] = X_0$$
$$\vartheta_A(X_1) = [1:0:0] = X_1$$
$$\vartheta_A(X_2) = [1:1:0]$$
$$\vartheta_A(X_3) = [1:0:1]$$

b) Ugotovi, kam ϑ_A preslika premico $p_\infty : z = 0$ in afini del $z = 1$.

a) $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

- $M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a+b+c &= \alpha \\ d+e+f &= \alpha \\ g+h+i &= \alpha \end{aligned}$$

- $M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= \beta \\ d &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned}$$

- $M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} b &= \gamma \\ e &= \gamma \\ h &= 0 \end{aligned}$$

- $M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \delta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} c &= \delta \\ f &= 0 \\ i &= \delta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} -c & c & c \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vartheta([x:y:z]) = [-x+y+z : y : z]$$

b) Kako ϑ_A slika p_∞?

$$\vartheta_A([x:y:0]) = [-x+y : y : 0]$$

$$\Rightarrow \vartheta_A(p_\infty) = p_\infty$$

Kako ϑ_A slika $z=1$?

$$\vartheta_A([x:y:1]) = [-x+y+1 : y : 1])$$

$$\Rightarrow \vartheta_A(x,y) = (-x+y+1,\ y) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Torej je zožitev projektivnosti ϑ_A na afini del afina transformacija.

---

3) Opiši vložitev grupe afinih transformacij $\mathbb{R}^2$ v grupo projektivnosti $P(\mathbb{R}^3)$.

Naj bo $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ afina transformacija s predpisom $\tau(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$.

Naj bo
$$i(\tau) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c:c} A & \vec{b} \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \end{array}.$$

Tako dobimo preslikavo $i : Aff(\mathbb{R}^2) \to PGL(3)$.

i je homomorfizem grup

$$\tau_1(\vec{x}) = A_1\vec{x} + \vec{b}_1$$
$$\tau_2(\vec{x}) = A_2\vec{x} + \vec{b}_2$$

$$(\tau_1 \circ \tau_2)(\vec{x}) = \tau_2(A_1\vec{x} + \vec{b}_1) = A_2A_1\vec{x} + (A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2)$$

$$\Rightarrow i(\tau_1 \circ \tau_2) = \begin{bmatrix} A_2A_1 & A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i(\tau_2) \cdot i(\tau_1) = \begin{bmatrix} A_2 & \vec{b}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & \vec{b}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2A_1 & A_2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kako afine transformacije $\mathbb{R}^2$ porodijo projektivnosti $P(\mathbb{R}^3)$?

- Translacije:

$$\tau(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{b}$$

$$i(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Zrcaljenja čez x-os:

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$i(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opomba: Naj bo $i(\tau) = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Na afinem delu $i(\tau)$ deluje kot τ:

$$i(\tau)([\vec{x} : 1]) = [A\vec{x} + \vec{b} : 1]$$

Na p_∞ $i(\tau)$ določa, kako se transformirajo smeri:

$$i(\tau)([\vec{x} : 0]) = [A\vec{x} : 0]$$

Opomba: ϑ je v sliki i

$\Leftrightarrow$ ϑ je oblike $\vartheta = \begin{bmatrix} A & \vec{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

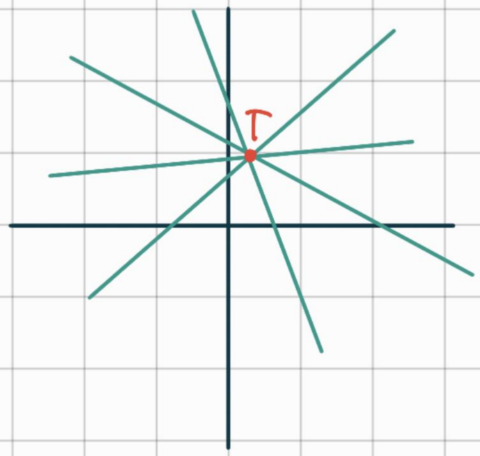
$\Leftrightarrow$ $z = 0$ je invarianta podprostora ϑ

$\Leftrightarrow$ $\vartheta(p_\infty) = p_\infty$

(Afina transformacija je projektivnost, ki p_∞ preslika nazaj vase.)

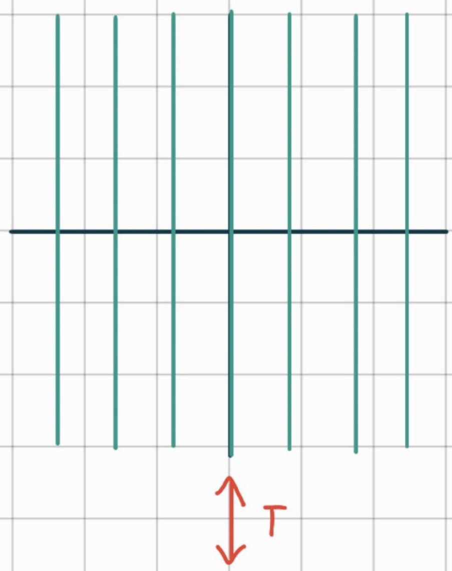
Definicija: Šop premic skozi točko $T \in P(\mathbb{R}^3)$ je množica vseh premic v $P(\mathbb{R}^3)$, ki vsebujejo T.

Primer: $T \in \mathbb{R}^2 \subseteq P(\mathbb{R}^3)$

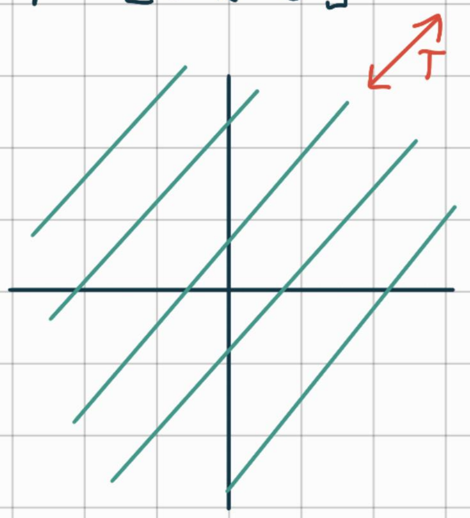


Primer: $T = [1:0:0]$

Primer: $T = [0:1:0]$



Primer: $T = [1:k:0]$



4) Projektivnost $\vartheta: P(\mathbb{R}^3) \longrightarrow P(\mathbb{R}^3)$ je dana s predpisom $\vartheta([x:y:z]) = [x:y:x+z]$.

a) Izračunaj $\vartheta^{-1}(p_\infty)$ in $\vartheta(p_\infty)$, kjer je $p_\infty: z=0$.

b) Opiši, kam ϑ preslika šopa premic skozi točki $[0:1:0]$ in $[1:0:0]$.

a) Cilj: Radi bi si geometrijsko predstavljaji, kaj počnejo projektivnosti. Zato poglejmo prasliko in sliko p_∞.

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Zožitev ϑ na afini del:

$$\vartheta(x,y) = \left(\frac{x}{x+1}, \frac{y}{x+1}\right)$$

$\vartheta^{-1}(p_\infty)$ je premica $x+z=0$, katere zožitev na $z=1$ je premica $x=-1$.

$$[-1:y:1] \longmapsto [-1:y:0]$$
$$[0:1:0] \longmapsto [0:1:0]$$

$\mathcal{V}(p_\infty)$ je neka premica, ki seka afini del.

$$[1:k:0] \mapsto [1:k:1]$$
$$[0:1:0] \mapsto [0:1:0]$$

$\mathcal{V}(p_\infty)$ je torej premica z enačbo $x-z=0$ oziroma $x=1$ na afinem delu $z=1$.

Poglejmo še, kam se preslika y-os.

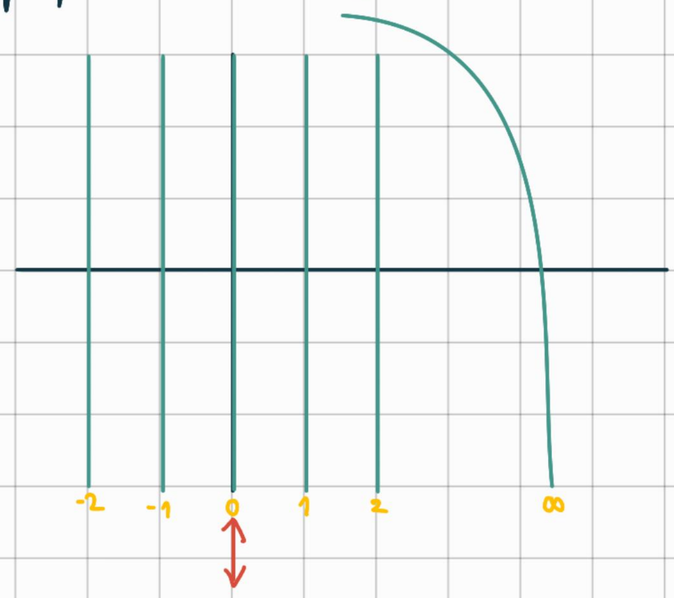
$$[0:y:1] \mapsto [0:y:1]$$
$$[0:1:0] \mapsto [0:1:0]$$

Torej so točke na y-osi fiksne točke.

b) Projektivnost $\mathcal{V}$ preslika šop premic skozi T v šop premic skozi $\mathcal{V}(T)$.

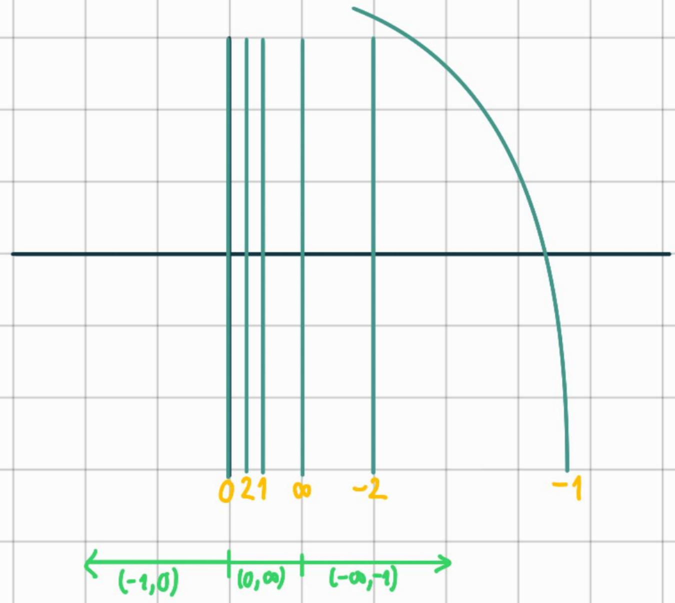
Če je $T \in \mathbb{R}^2$, dobimo "navaden" šop premic. Če je $T \in p_\infty$, dobimo vzporednice.

Šop premic skozi $[0:1:0]$:

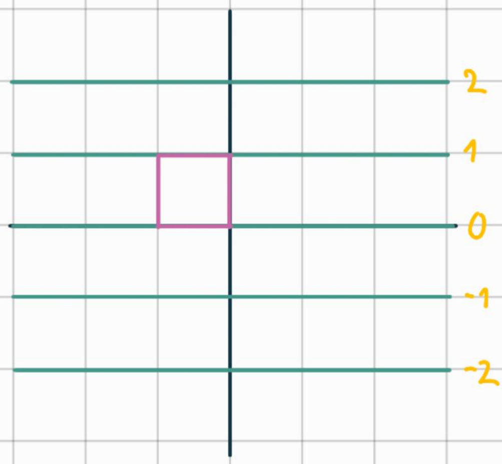


V šopu premic so navpičnice, ki jih lahko parametriziramo z $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

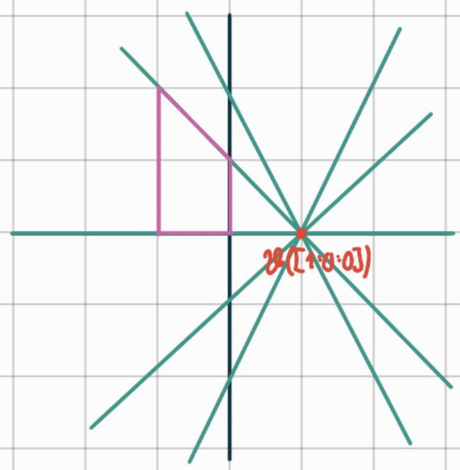
Ker je $\vartheta([0:1:0]) = [0:1:0]$, se vsaka navpična premica preslika bodisi v navpičnico bodisi v ∞.



Šop premic skozi $[1:0:0]$:



$$\vartheta([1:0:0]) = [1:0:1]$$

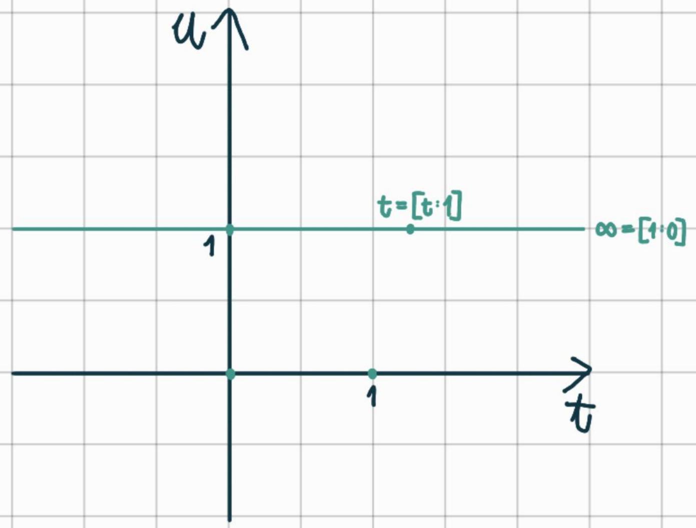


Opomba: Projektivnosti, inducirane z matrikami oblike $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, tvorijo podgrupo, izomorfno $\mathbb{R}^2$.

Projektivnost Θ_A preslika premico $ax+by+z=0$ na premico p_∞, premico p_∞ pa na premico $ax+by-z=0$. Točke na premici $ax+by=0$ so fiksne točke Θ_A, vsako premico skozi točko $[0:0:1]$ pa Θ_A preslika nazaj vase.

Taki projektivnosti Θ_A rečemo **centralna kolineacija** s centrom $[0:0:1]$ in osjo $ax+by=0$.

Definicija: **Parametrizacija** projektivne premice $p \subseteq P(\mathbb{R}^n)$ je projektivnost $i_p : P(\mathbb{R}^2) \to p$, kjer je $P(\mathbb{R}^2)$ standardna projektivna premica.



Definicija: Naj bosta p in q različni premici v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ in O točka, ki ne leži na p oz q. **Perspektivnost** s premice p na premico q s centrom O je preslikava $\Theta : p \to q$, ki vsaki točki $T \in p$ priredi presečišče premice OT in premice q.

Trditev: Projektivnost $\theta : p \to q$ je perspektivnost natanko tedaj, ko ohranja presečišče premic p in q.

V tem primeru je $O = T\theta(T) \cap U\theta(U)$ za poljubni različni točki $T, U \in p$, ki sta različni od $p \cap q$.

---

5) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani premici:

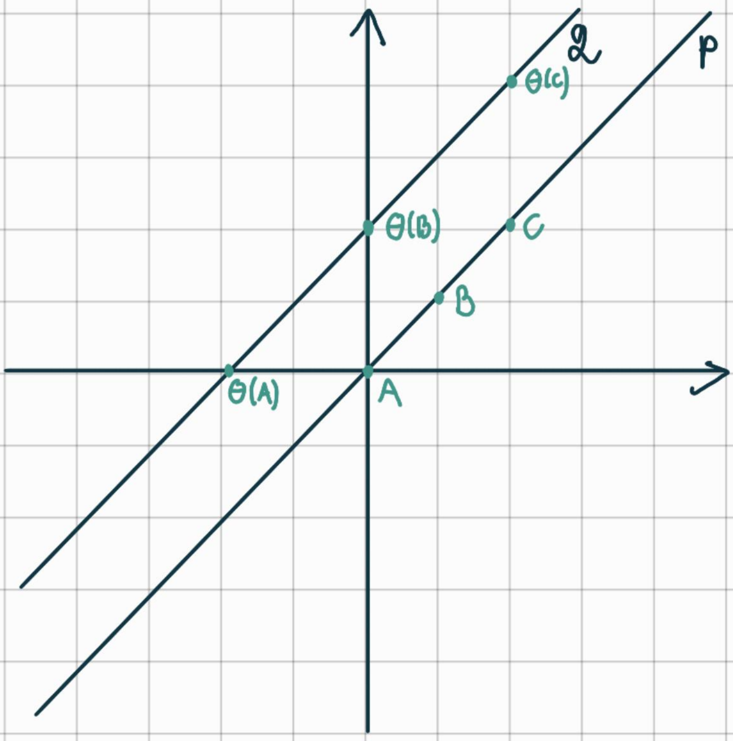
$$p = \{[x:y:z] ; x-y=0\}$$
$$q = \{[x:y:z] ; x-y+2z=0\}$$

a) Poišči projektivnost $\theta : p \to q$, za katero velja:

$$\theta([0:0:1]) = [-2:0:1]$$
$$\theta([1:1:1]) = [0:4:2]$$
$$\theta([2:2:1]) = [2:4:1]$$

b) Ugotovi, ali je θ perspektivnost. Če je, poišči njen center.

a)



Točke A, B, C tvorijo projektivno ogrodje premice p, zato je projektivnost $\theta : p \to q$ natanko določena z njihovimi slikami.

Parametrizacija premice p:

$$i_p : P(\mathbb{R}^2) \longrightarrow p$$
$$[t:u] \longmapsto [t:t:u]$$

Parameter t se preslika v točko (t,t) na afinem delu, točka v neskončnosti $[1:0] \in P(\mathbb{R}^2)$ pa se preslika v točko $[1:1:0] \in p_\infty$, ki ustreza smeri premice p.

Parametrizacija premice q:

$$i_q : P(\mathbb{R}^2) \longrightarrow q$$
$$[t:u] \longmapsto [t:t+2u:u]$$

Parameter t se preslika v točko $(t,t+2)$ na afinem delu, točka v neskončnosti pa spet v točko $[1:1:0] \in p_\infty$.

Zapišimo predpis za projektivnost Θ v teh parametrizacijah in ga označimo Θ_A.

$$\Theta([0:0:1]) = [-2:0:1] \Rightarrow \Theta_A([0:1]) = [-2:1]$$
$$\Theta([1:1:1]) = [0:4:2] \Rightarrow \Theta_A([1:1]) = [0:1]$$
$$\Theta([2:2:1]) = [2:4:1] \Rightarrow \Theta_A([2:1]) = [2:1]$$

$\Theta_A([0:1]) = [-2:1]$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$b = -2\alpha$

$d = \alpha$

$\Rightarrow b = -2d$

$\Theta_A([1:1]) = [0:1]$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$a + b = 0$
$c + d = \beta$

$\Rightarrow a = -b = 2d$

$\Theta_A([2:1]) = [2:1]$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$2a + b = 2\gamma$
$2c + d = \gamma$

$\Rightarrow 2a + b = 4c + 2d$

$\Rightarrow c = 0$

Izberemo $d = 1$.

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \Theta_A([t:u]) = [2t - 2u : u]$

Na afinem delu:

$\theta(t) = 2t - 2$

V homogenih koordinatah na $P(\mathbb{R}^3)$:

$\theta([t:t:u]) = [2t-2u : 2t : u]$

b) Presečišče premic p in q:

$T = [1:1:0]$

$\Rightarrow \theta(T) = \theta([1:1:0]) = [2:2:0] = [1:1:0] = T$

$\Rightarrow \theta$ je perspektivnost.

$A = [0:0:1]$

$\Rightarrow \theta(A) = [-2:0:1]$

$\Rightarrow \overline{A\theta(A)} = \{[x:y:z];\ y=0\}$

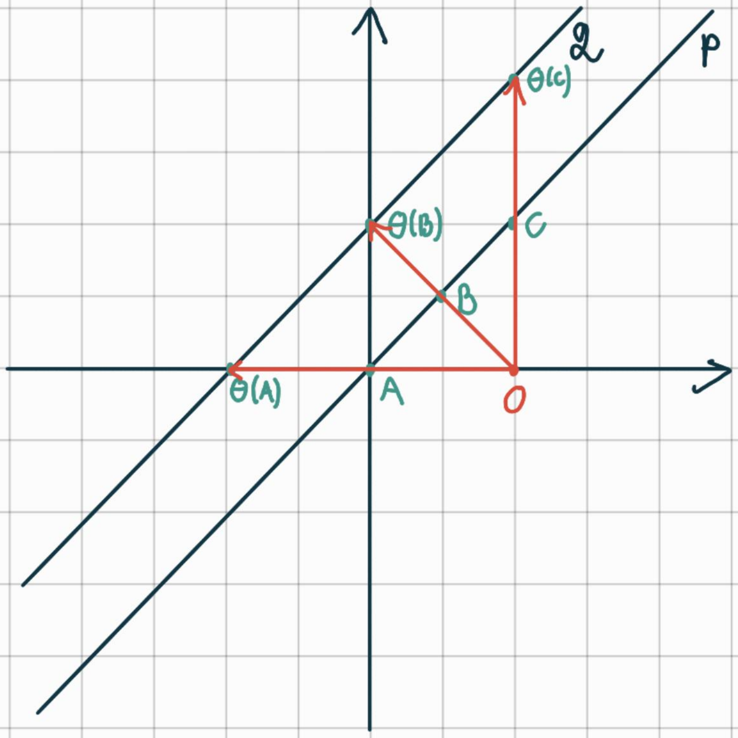
$C = [2:2:1]$

$\Rightarrow \theta(C) = [2:4:1]$

$\Rightarrow \overline{C\theta(C)} = \{[x:y:z];\ x-2z=0\}$

Presek teh dveh premic:

$O = [2:0:1]$



q
p
Θ(C)
Θ(B)
C
B
Θ(A)
A
O