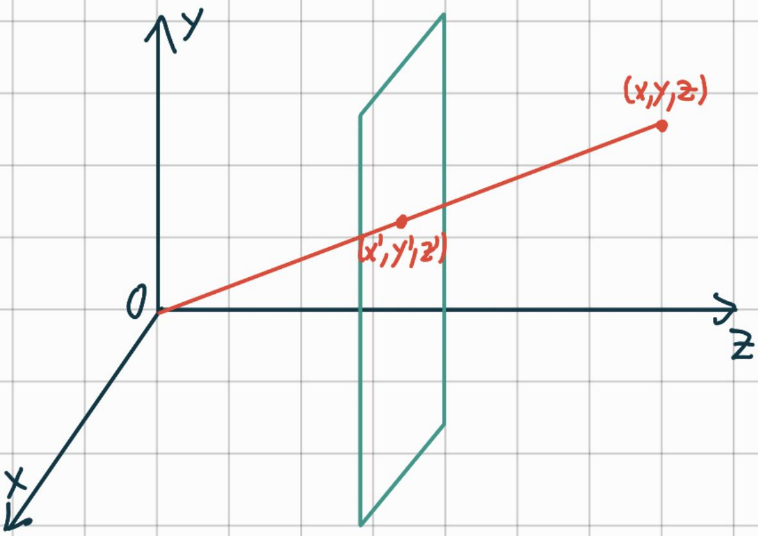
1) Objekte v $\mathbb{R}^3$ bi radi projicirali na ravnino $z=1$ vzdolž žarkov skozi koordinatno izhodišče.

a) Zapiši predpis za to projekcijo.

b) Ugotovi, kam se projicirata poltraka:

$$p_1: \vec{r} = (1,-2,1+t), \quad t \geq 0$$
$$p_2: \vec{r} = (-1,-2,1+t), \quad t \geq 0$$

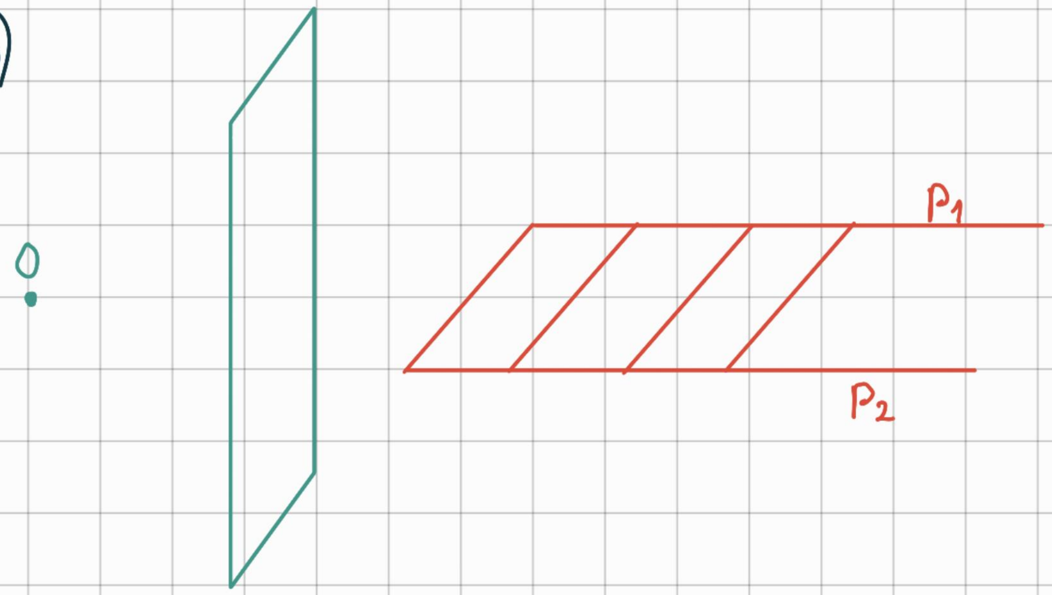
a) Recimo, da imamo točko $(x,y,z) \in \mathbb{R}$, ki leži desno od ravnine $z=f$. Njena projekcija na ravnino $z=f$ vzdolž žarka skozi izhodišče je presek žarka in ravnine. Takšni projekciji rečemo centralna projekcija.



Parametriziramo žarek s predpisom $p: \vec{r} = k(x,y,z)$.
Da bo $z=f$, mora biti $k=\frac{f}{z}$.

$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = \left(\frac{fx}{z}, \frac{fy}{z}\right)$$

b)

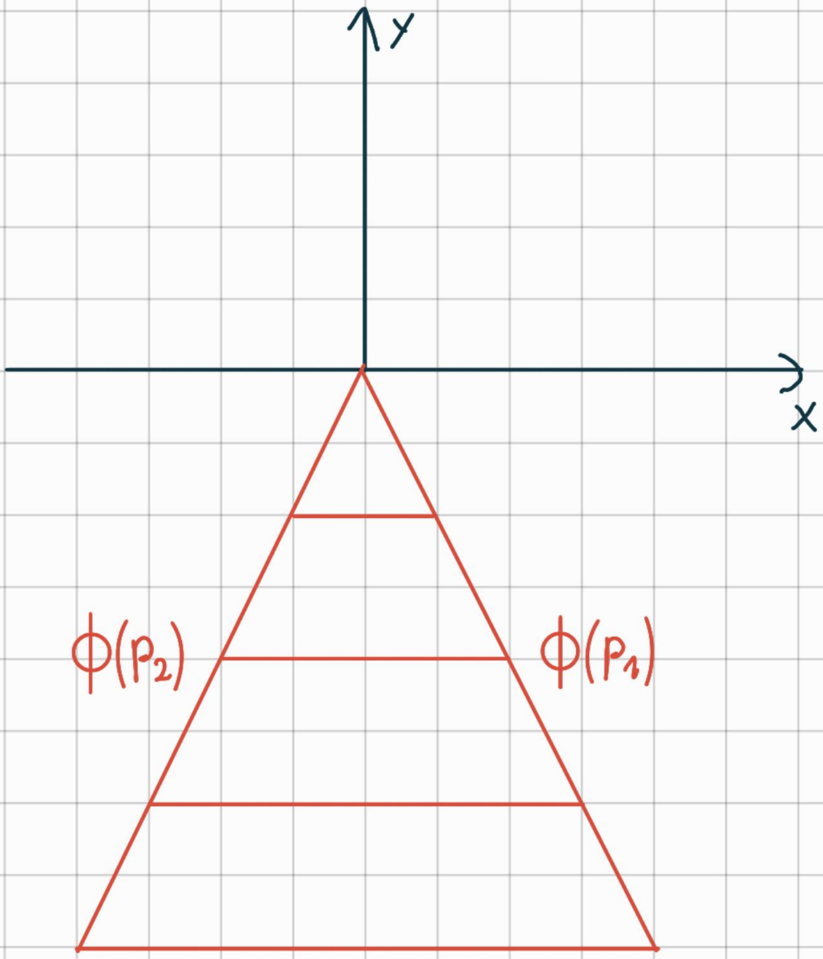


$\phi(p_1)$: $\vec{r} = \left(\frac{1}{1+t}, -\frac{2}{1+t}\right)$

$\Rightarrow$ Daljica od $(1,-2)$ do $(0,0)$.

$\phi(p_2)$: $\vec{r} = \left(-\frac{1}{1+t}, -\frac{2}{1+t}\right)$

$\Rightarrow$ Daljica od $(-1,-2)$ do $(0,0)$.



Lastnosti centralne projekcije:

- Vzporednice v $\mathbb{R}^3$, ki niso vzporedne ravnini fotoaparata, se sekajo v točki v neskončnosti, ki jo dobimo kot presek ravnine fotoaparata s tisto izmed vzporednic, ki gre skozi središče projekcije.

- Vzporednice v $\mathbb{R}^3$, ki so vzporedne ravnini fotoaparata, so vzporedne tudi na sliki.

- Če sta dva objekta v $\mathbb{R}^3$ enako velika, je tisti, ki je bližje fotoaparatu, na sliki večji.

Definicija: Projektivna ravnina $P(\mathbb{R}^3)$ je množica vseh premic v $\mathbb{R}^3$, ki potekajo skozi izhodišče:

$$P(\mathbb{R}^3) = \{[x:y:z] \, ; \, (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$$

Definicija: Homogene koordinate $[x,y,z]$ predstavljajo premico skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$ s smerjo (x,y,z).

Opomba: $[x:y:z] = [kx:ky:kz]$, $k \neq 0$

Ravnina $z=1$ nam porodi dekompozicijo:

$$P(\mathbb{R}^3) = \{\text{afini del}\} \cup \{\text{premice v } \infty\}$$

- Afini del:

  Premice, ki sekajo ravnino $z=1$. Predstavljajo točke v ravnini.

  $$\text{afini del} = \mathbb{R}^2$$
  $$[x,y,1] \longleftrightarrow (x,y)$$

- Premice v ∞:

Vodoravne premice oblike $[x:y:0]$. Predstavljajo smeri v ravnini oziroma točke v neskončnosti.

$P(\mathbb{R}^3)$	$\mathbb{R}^3$
točke	premice skozi izhodišče
premice	ravnine skozi izhodišče

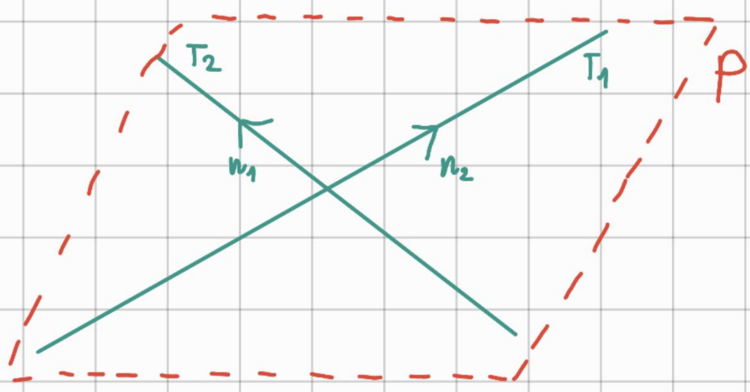
---

2) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ poišči:

a) Premico, ki poteka skozi točki $T_1=[2:3:1]$ in $T_2=[1:4:1]$.

b) Presek premic $p_1: x+y+z=0$ in $p_2: -x+y-z=0$.

a) Račun v 3D:



$T_1, T_2 \in P(\mathbb{R}^3)$ sta premici skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$.

Premica, ki gre skozi ti dve točki, je predstavljena z ravnino v $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje ti dve premici.

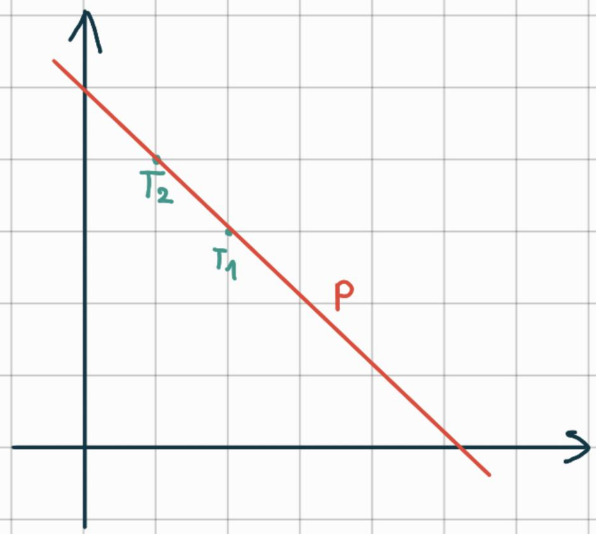
To je torej ravnina, ki ima normalo $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$.

$\vec{n} = (2,3,1) \times (1,4,1) = (-1,-1,5)$

Iskana premica je torej določena z ravnino v $\mathbb{R}^3$ z enačbo:

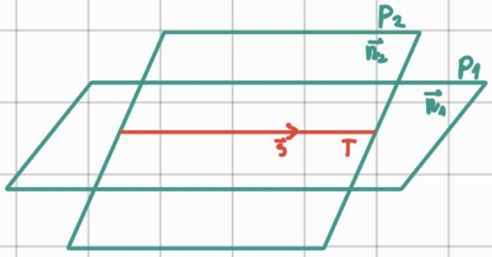
$-x-y+5z=0$

Račun v 2D:



$y=-x+5 \qquad (z=1)$

b) Račun v 3D:



Premici p_1 in p_2 v $P(\mathbb{R}^3)$ sta določeni z ravninama skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$.

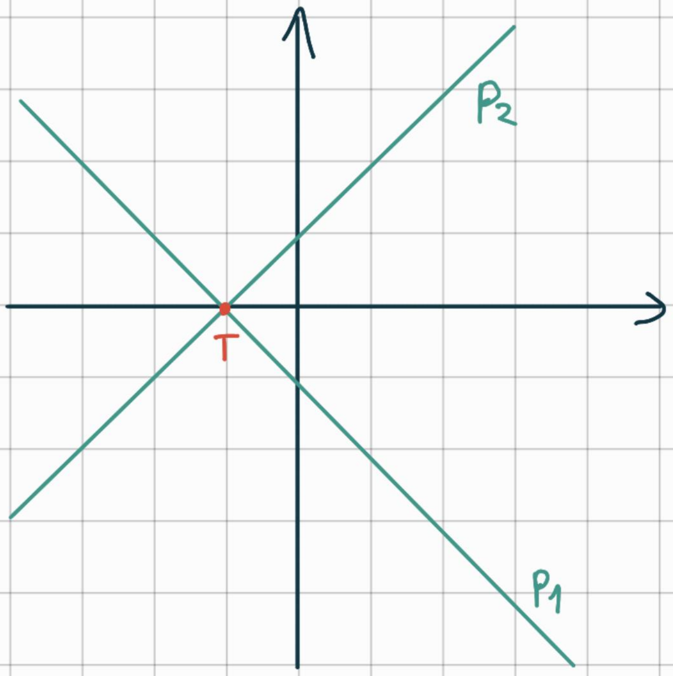
Njun presek je predstavljen s premico skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$.

$\vec{s}=\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$\vec{s}=(1,1,1)\times(-1,1,-1)=(-2,0,2)$

$\Rightarrow p_1 \cap p_2 = [-1:0:1]$

Račun v 2D:



$p_1: \; x+y=-1 \quad \sim \quad y=-1-x$
$p_2: \; -x+y=1 \quad \sim \quad y=1+x$

$(-1,0) \longleftrightarrow [-1:0:1]$

---

3) Izračunaj število točk in premic v projektivni ravnini $P(\mathbb{Z}_p^3)$, kjer je p praštevilo.

$$P(\mathbb{Z}_p^3) = \overset{p^2}{\mathbb{Z}_p^2} \cup \overset{p+1}{p_\infty}$$

število točk = število premic skozi izhodišče v $\mathbb{Z}_p^3$ =

$$= \frac{p^3-1}{p-1} = p^2+p+1$$

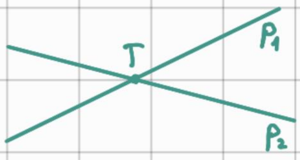
število premic = število ravnin skozi izhodišče v $\mathbb{Z}_p^3$ =

$$= \frac{\text{število normal}}{p-1} = \frac{p^3-1}{p-1} = p^2+p+1$$

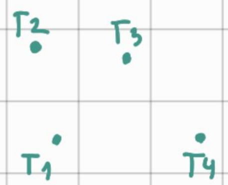
Aksiomi za projektivno ravnino:

P1: Skozi dve različni točki poteka natanko ena premica.

P2: Poljubni dve različni premici se sekata v natanko eni točki.



P3: Obstajajo 4 različne točke, od katerih nobene 3 niso kolinearne.



---

4) Opiši konstrukcijo aksiomatske projektivne ravnine iz aksiomatske afine ravnine.

Naj bo A aksiomatsko definirana afina ravnina.

Dokazali smo, da je vzporednost premic ekvivalenčna relacija na A.

Ekvivalenčnim razredom bomo rekli smeri v A:

$A/_{\parallel}$ ... smeri v A

Definiramo afini ravnini A pridruženo projektivno ravnino $P(A)$:

- Točke:

$$P(A) = \overset{\text{afini del}}{A} \cup \{\text{smeri } \overset{p_\infty}{v} A\}$$

- Premice:

  - p_∞
  - Za vsako premico $p \in A$ definiramo premico $\tilde{p} \in P(A)$ kot $\tilde{p} = p \cup [p]$.

Pokazati moramo aksiome:

P1: Vzemimo točki $T_1, T_2 \in P(A)$.

$T_1, T_2 \in A$:

Obstaja natanko ena premica $p \subseteq A$, ki vsebuje T_1 in T_2. Tedaj velja $T_1, T_2 \in \tilde{p} \subseteq P(A)$.

Ker je p enolična, je tudi $\tilde{p}$ enolična.

$T_1, T_2 \in p_\infty$:

T_1 in T_2 ležita na p_∞. Poljubna premica oblike $\tilde{p}$ pa seka p_∞ v natanko 1 točki.

$T_1 \in A$, $T_2 \in p_\infty$:

T_2 določa smer v A. Izmed vseh premic v A z dano smerjo po aksiomu A_2 obstaja natanko ena premica, ki vsebuje T_1.

P2: $\tilde{p} \cap p_\infty = \{[p]\}$

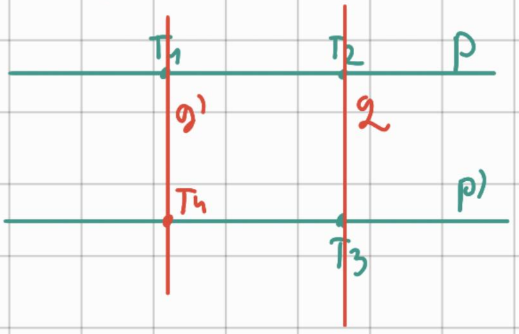
$\tilde{p}, \tilde{q}$: $p \parallel q$ v A:

V A se ne sekata, sekata pa se v točki $[p] = [q] \in p_\infty$.

$\tilde{p}, \tilde{q}$: $p \nparallel q$ v A:

Obstaja natanko ena točka $T \in A$, da je $p \cap q = \{T\}$.

P3: Vzemimo $T_1, T_2 \in A$. Obstaja točka T_3, ki ne leži na premici, ki gre skozi T_1 in T_2 (po A3).



Naj bo q premica skozi T_2 in T_3. Vzporednica q, ki gre skozi T_1, seka p' v točki T_4.

Paprusov izrek:

Naj bodo $A, B, C \in p$ in $A', B', C' \in p'$ različne kolinearne točke, ki so različne od točke $X = p \cap p'$.

Potem so kolinearne tudi točke:

$$A'' = BC' \cap B'C$$
$$B'' = AC' \cap A'C$$
$$C'' = AB' \cap A'B$$

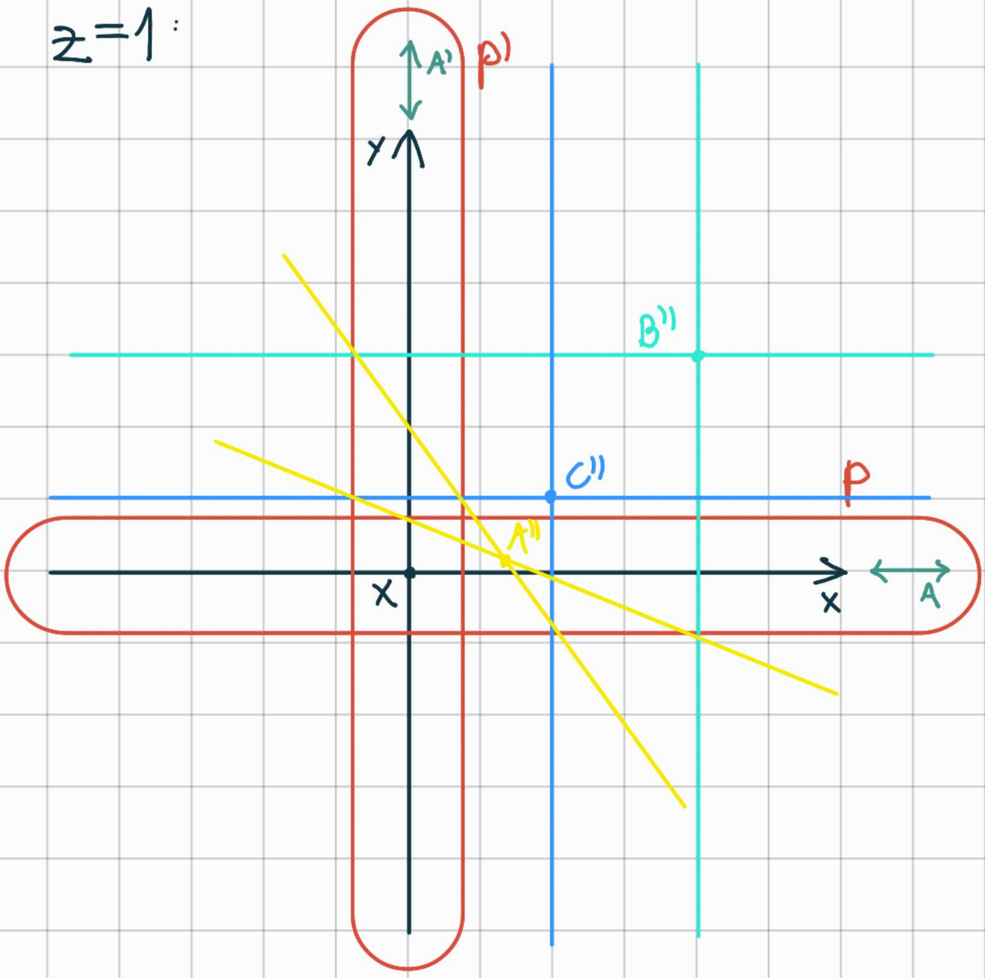
---

5) Dokaži, da v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}^3)$, kjer je $\mathbb{F}$ polje, velja Paprusov izrek.

Izberimo si koordinate na $P(\mathbb{F}^3)$, da bo:

$$X = [0:0:1]$$
$$A = [1:0:0]$$

$z=1$:



$p \dots \; x=0$
$p' \dots \; y=0$

$\Rightarrow B=[b:0:1]$
$C=[c:0:1]$
$B'=[0:b':1]$
$C'=[0:c':1]$

$b, c, b', c' \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$

$AC': \; y=c'$
$A'C: \; x=c$

$\Rightarrow B''=[c:c':1]$

$AB': \; y=b'$
$A'B: \; x=b$

$\Rightarrow C''=[b:b'':1]$

$BC': \; \frac{x}{b}+\frac{y}{c'}=1 \longleftrightarrow \vec{n}_{BC'}=\left(\frac{1}{b},\frac{1}{c'},-1\right)$
$B'C: \; \frac{x}{c}+\frac{y}{b'}=1 \longleftrightarrow \vec{n}_{B'C}=\left(\frac{1}{c},\frac{1}{b'},-1\right)$

$\Rightarrow \vec{s}_A=\vec{n}_{BC'}\times\vec{n}_{B'C}$

$\Rightarrow A''=\left[\frac{1}{b'}-\frac{1}{c'} : \frac{1}{b}-\frac{1}{c} : \frac{1}{bb'}-\frac{1}{cc'}\right]$

Kako pokažemo, da so A'', B'', C'' kolinearne?

Lahko pokažemo, da je $[A'', B'', C''] = 0$.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{b'} - \frac{1}{c'} & c & b \\ \frac{1}{b} - \frac{1}{c} & c' & b' \\ \frac{1}{bb'} - \frac{1}{cc'} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

Opomba: Velja tudi obrat tega izreka:

Projektivna ravnina je izomorfna ravnini oblike $P(\mathbb{F}^3)$
$\iff$ V projektivni ravnini velja Paprusov izrek