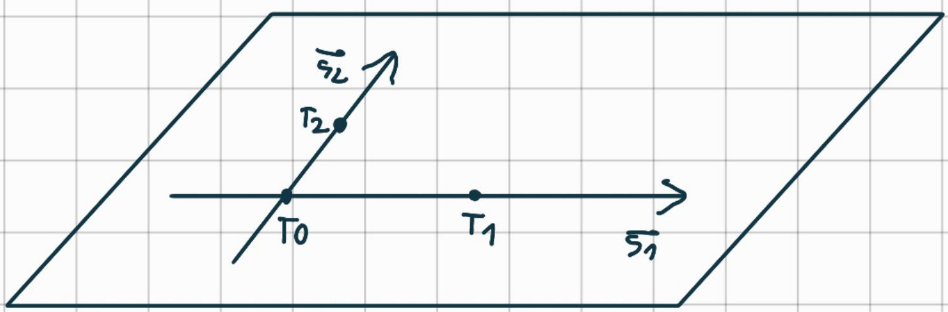
Definicija: **Afin podprostor** v $\mathbb{R}^n$ je podmnožica oblike $\mathcal{A} = a + U$, kjer je a začetna točka in U prostor skozi $\mathcal{A}$.

Primer: Premica v $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}$$

$$\vec{r}_0 \longleftrightarrow a$$
$$\forall t: t \cdot \vec{s} \longleftrightarrow U$$

Tri nekolinearne točke T_0, T_1, T_2 v $\mathbb{R}^n$ natanko določajo neko 2D ravnino Σ v $\mathbb{R}^n$.



$$\vec{s_1} = \overrightarrow{T_0 T_1}$$
$$\vec{s_2} = \overrightarrow{T_0 T_2}$$

Vsako točko $T \in \Sigma$ lahko potem enolično zapišemo v obliki:

$$T = T_0 + t_1 \vec{s_1} + t_2 \vec{s_2}$$

Paru (t_1, t_2) rečemo afina koordinata točke T glede na afino bazo $\{T_0, T_1, T_2\}$ ravnine Σ.

---

1) V ravnini $3x+2y+z=7$ ležijo točke $T_0(1,1,2)$, $T_1(3,-1,0)$, $T_2(0,3,1)$, $A(2,0,1)$ in $B(0,4,-1)$. Določi lego točk A in B glede na trikotnik $T_0T_1T_2$.

$$\vec{s}_1 = \overrightarrow{T_0T_1} = (2,-2,-2)$$
$$\vec{s}_2 = \overrightarrow{T_0T_2} = (-1,2,-1)$$

$$A = T_0 + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2$$
$$(2,0,1) = (1,1,2) + t_1(2,-2,-2) + t_2(-1,2,-1)$$

$$2 = 1 + 2t_1 - t_2$$
$$0 = 1 - 2t_1 + 2t_2$$
$$1 = 2 - 2t_1 - t_2$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = 0$$

$$B = T_0 + t_1'\vec{s}_1 + t_2'\vec{s}_2$$
$$(0,4,-1) = (1,1,2) + t_1'(2,-2,-2) + t_2'(-1,2,-1)$$

$$0 = 1 + 2t_1' - t_2'$$
$$4 = 1 + 2t_1' + 2t_2'$$
$$-1 = 2 - 2t_1' - t_2'$$

$$\Rightarrow t_1' = \frac{1}{2}, \quad t_2 = 2$$

---

2) V afinem prostoru $\mathbb{R}^2$ so dane točke $A(4,6,-2)$, $B(-2,0,4)$ in $C(0,4,1)$ ter premica p s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (3,2,3) + t(2,1,1)$.

a) Pokaži, da se premica p in trikotnik ABC ne sekata.

b) Konstruiraj ravnino Π, ki ne seka p in ABC ter razdeli $\mathbb{R}^2$ tako, da ležita p in ABC v svojem podprostoru.

a) Načrt:

i) Enačba ravnine Σ, ki vsebuje trikotnik ABC.

ii) Izračunamo presečišče p in Σ in ga označimo s T.

iii) Izračunamo afini koordinati T glede na afino ogrodje $\{A, B, C\}$ za Σ.

Reševanje:

i) $\vec{s_1} = \overrightarrow{AB} = (-6, -6, 6)$
$\vec{s_2} = \overrightarrow{AC} = (-4, -2, 3)$

$\vec{n} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = (-6, -6, -12) \sim (1, 1, 2)$

$\Sigma: x + y + 2z = d$

$A: 4 + 6 + 2 \cdot (-2) = d$

$\Rightarrow d = 6$

$\Rightarrow \Sigma: x + y + 2z = 6$

ii) Parametrizacijo premice vstavimo v enačbo ravnine:

$$p: \begin{aligned} x &= 3+2t \\ y &= 2+t \\ z &= 3+t \end{aligned}$$

$$\Sigma: x+y+2z=6$$

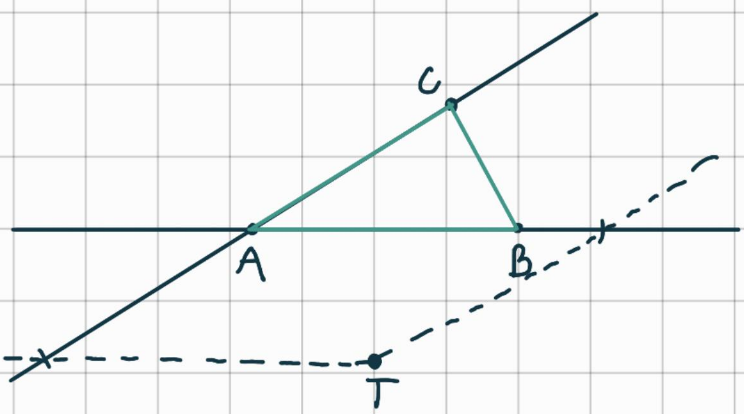
$$\Rightarrow 3+2t+2+t+6+2t=6$$
$$5t=-5$$
$$t=-1$$

$$\Rightarrow T(1,1,2)$$

iii) $T = A + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\\-2\end{bmatrix} + t_1\begin{bmatrix}-6\\-6\\6\end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix}-4\\-2\\3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{7}{6},\ t_2 = -1$$

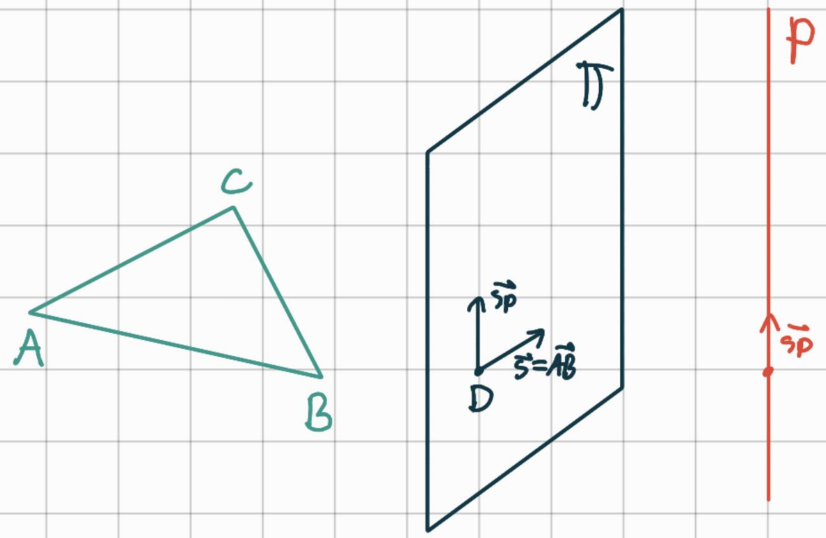


Opomba: Kako iz afinih koordinat ugotovimo, ali točka leži v trikotniku?

$$t_1 \geq 0$$
$$t_2 \geq 0$$
$$t_1 + t_2 \leq 1$$

$\Rightarrow T$ ne leži v ABC

b) Iščemo neko ravnino Π, ki bo ločevala ABC in p:



Π in p morata biti vzporedni.

$D = A - \frac{1}{2}\vec{AC} = (4,6,-2)+(3,3,-3) = (7,9,-5)$

$\vec{s} = \vec{AB} = (-6,-6,6)$

$\vec{n} = \vec{s_p} \times \vec{s} = (2,1,1)\times(-6,-6,6) = (12,-18,-6) \sim (2,-3,-1)$

$\Rightarrow \Pi: 2x-3y-z = d$

$14-27+5 = d = -8$

$\Rightarrow \Pi: 2x-3y-z = -8$

---

3) Predstavi dane afine podprostore s sistemom enačb:

a) Poljuben prostor oblike $A = a + U$ v $\mathbb{R}^m$.

b) Premico skozi točki $(0,1)$ in $(2,2)$ v $\mathbb{Z}_5^2$.

c) Premico skozi točki $(0,1)$ in $(i,2)$ v $\mathbb{H}^2$.

a) Premico p v $\mathbb{R}^3$ lahko podamo:

i) S parametrizacijo:

$\vec{r}_0$ ... začetna točka
$\vec{s}_0$ ... smerni vektor

$U = \text{Lin}\{\vec{s}_1\}$

ii) S sistemom enačb:

$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ ... baza ortogonalnega komplementa U

$U^\perp = \text{Lin}\{n_1, n_2\}$

$A = a + U \in \mathbb{R}^m$ afin podprostor dimenzije k

$\Rightarrow U$ ima bazo, ki jo tvorijo smeri $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k$

$U = \text{Lin}\{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k\}$

$U^\perp = \text{Lin}\{\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_{m-k}\}$

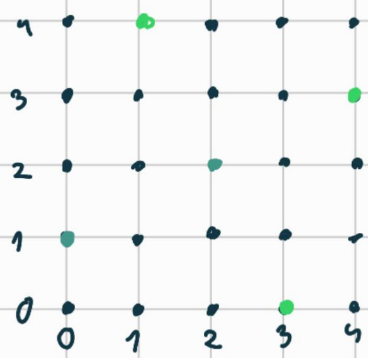
$\vec{r} = (x_1, \dots, x_m)$

Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned}
\vec{n}_1 \cdot \vec{r} &= \vec{n}_1 \cdot \vec{a} \\
\vec{n}_2 \cdot \vec{r} &= \vec{n}_2 \cdot \vec{a} \\
&\vdots \\
\vec{n}_{m-k} \cdot \vec{r} &= \vec{n}_{m-k} \cdot \vec{a}
\end{aligned}$$

b) $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$

$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$:



$\vec{r_0} = (0,1)$
$\vec{s} = (2,1)$

$\vec{r}(t) = (0,1) + t(2,1) \quad , \; t \in \mathbb{Z}_5$

$\vec{r}(0) = (0,1)$
$\vec{r}(1) = (2,2)$
$\vec{r}(2) = (4,3)$
$\vec{r}(3) = (6,4) = (1,4)$
$\vec{r}(4) = (8,5) = (3,0)$

V $\mathbb{Z}_5^2$ nimamo skalarnega produkta, zato nimamo normal.

Zato normale nadomestimo s koordinatami (linearnimi funkcionali):

$\varphi(x,x,z) = ax + by + cz$

$\varphi_1(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{a})$
$\varphi_2(\vec{r}) = \varphi_2(\vec{a})$
$\vdots$
$\varphi_{n-k}(\vec{r}) = \varphi_{n-k}(\vec{a})$

Namesto ortogonalnega komplementa vzamemo anihilator:

$U^{\perp} = \{\varphi \in U^* \,;\, \varphi(U) = 0\}$

$0 = \varphi(\vec{s}) = 2a + b \Rightarrow \varphi(x,y) = 2x + y$

Dobimo enačbo:

$2x + y = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = y \Rightarrow 2x + y = 1$

c) $\vec{r}(t) = (0,1) + t \cdot (i,1)\,,\quad t \in \mathbb{H}$

Poskusimo enačbo:

$\vec{n} = (1, -i)$

$x - iy = -i$

Ali parametrizacija zadošča tej enačbi?

$ti - i(1+t) = -i$
$ti - i - it = -i$
$ti = it$

Imamo problem, ker $\mathbb{H}$ ni komutativen:

$t = j: \quad ij \neq ji$

Kakšno obliko imajo linearni funkcionali $\varphi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}$?

$\varphi(x,y) = xa + yb$

Prava enačba:

$x - yi = -i$

Koeficienti morajo biti vedno na desni.

Definicija: Afina podprostora $\mathcal{A}_1 = a_1 + U_1$ in $\mathcal{A}_2 = a_2 + U_2$ sta vzporedna, če je bodisi $U_1 \subseteq U_2$ bodisi $U_2 \subseteq U_1$.

Kriterij za vzporednost:

$\mathcal{A} = a + U$
$\mathcal{A}' = a' + U'$

$\dim \mathcal{A} < \dim \mathcal{A}'$

Potem sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ vzporedna, če velja:

i) Vse smeri $\mathcal{A}$ so pravokotne na normale $\mathcal{A}'$.

ii) Vsaka smer $\mathcal{A}$ je linearna kombinacija smeri $\mathcal{A}'$.

iii) Vsaka normala $\mathcal{A}$ je linearna kombinacija normal $\mathcal{A}'$.

---

4) V $\mathbb{R}^4$ sta dani ravnina Π skozi točke $T_0(1,0,0,0)$, $T_1(2,0,2,1)$ in $T_2(1,1,1,0)$ ter premica p, ki je določena s sistemom enačb $x - w = 0$, $x - y + z = 1$ in $x + y - 2w = 2$. Ugotovi, ali sta Π in p vzporedni.

Ravnina Π:

$$\vec{s_1}' = \overrightarrow{T_0T_1} = (1,0,2,1)$$
$$\vec{s_2}' = \overrightarrow{T_0T_2} = (0,1,1,0)$$

Vsaka normala $\vec{n}$ ravnine Π reši sistem enačb:

$$\vec{n} = (a,b,c,d)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{s_1} = 0$$
$$\vec{n} \cdot \vec{s_2} = 0$$

$$a + 2c + d = 0$$
$$b + c = 0$$

$$b := -c$$
$$a := -2c+d$$

$$\vec{n}(a,b,c,d) = (-2c-d, -c, c, d)$$

Dobimo normalo $\vec{n}$ za Π:

$$\vec{n_1}' = (-2,-1,1,0)$$
$$\vec{n_2}' = (-1,0,0,1)$$

Premica p:

$$\vec{n_1} = (1,0,0,-1)$$
$$\vec{n_2} = (1,-1,0,1)$$
$$\vec{n_3} = (1,1,0,-2)$$

Smer premice p reši sistem enačb:

$$\vec{s} \cdot \vec{n_1} = 0$$
$$\vec{s} \cdot \vec{n_2} = 0$$
$$\vec{s} \cdot \vec{n_3} = 0$$

Dobimo smer $\vec{s}$ za p:

$$\vec{s} = (1,1,0,1)$$

Kriteriji za vzporednost:

i) $\vec{s} \cdot \vec{n_1}' = \vec{s} \cdot \vec{n_2}' = 0$

ii) $\vec{s_1} = \alpha \cdot \vec{s_1}' + \beta \cdot \vec{s_2}'$

iii) $\vec{n_1}' = \alpha \vec{n_1} + \beta \vec{n_2} + \gamma \vec{n_3}$
$\quad \vec{n_2}' = \delta \vec{n_1} + \varepsilon \vec{n_2} + \mu \vec{n_3}$

Uporabimo prvi kriterij:

$$\vec{s} \cdot \vec{n_1}' = (1,1,0,1) \cdot (-2,-1,1,0) = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow \Pi$ in p nista vzporedni.

Izkaže se, da sta Π in p mimobežni.

Afina prostora $A = a + U$ in $A' = a' + U'$ v $\mathbb{R}^n$ sta lahko mimobežna, če je $\dim A + \dim A' < n$.

5a) Poišči število linearnih premic v afinem prostoru $\mathbb{Z}_p^n$.

5b) Poišči število afinih premic v $\mathbb{Z}_p^n$.

5a) $\vec{r}(t) = \vec{0} + t \cdot \vec{s}$

Linearne premice v $\mathbb{Z}_p^2$:

Vsaka linearna premica v $\mathbb{Z}_p^2$ je natanko določena s smernim vektorjem $\vec{s} \neq \vec{0}$.

Različnih smernih vektorjev je $p^2 - 1$.

Po $p-1$ vektorjev določa isto premico.

$\Rightarrow$ Število linearnih premic v $\mathbb{Z}_p^2$ je $\frac{p^2-1}{p-1} = p+1$.

Linearne premice v $\mathbb{Z}_p^n$:

Število linearnih premic v $\mathbb{Z}_p^n$ je $\frac{p^n-1}{p-1}$.

5b) Kako dobimo vzporednice premici? Vse točke premaknemo gor.

$\Rightarrow$ Število afinih premic v $\mathbb{Z}_p^2$ je $(p+1) \cdot p$.

$\Rightarrow$ Število afinih premic v $\mathbb{Z}_p^n$ je $\frac{p^n-1}{p-1} \cdot p^{n-1}$.