Definicija: Izometrija Evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ je bijekcija $\tau: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ki ohranja razdalje med točkami:

$$d(T_1, T_2) = d(\tau(T_1), \tau(T_2)) \quad \forall T_1, T_2 \in \mathbb{R}^n$$

Izrek: Vsaka izometrija $\tau: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ima predpis $\tau(x) := Qx + a$, kjer je Q ortogonalna $n \times n$ matrika ter $a \in \mathbb{R}^n$ nek vektor.

---

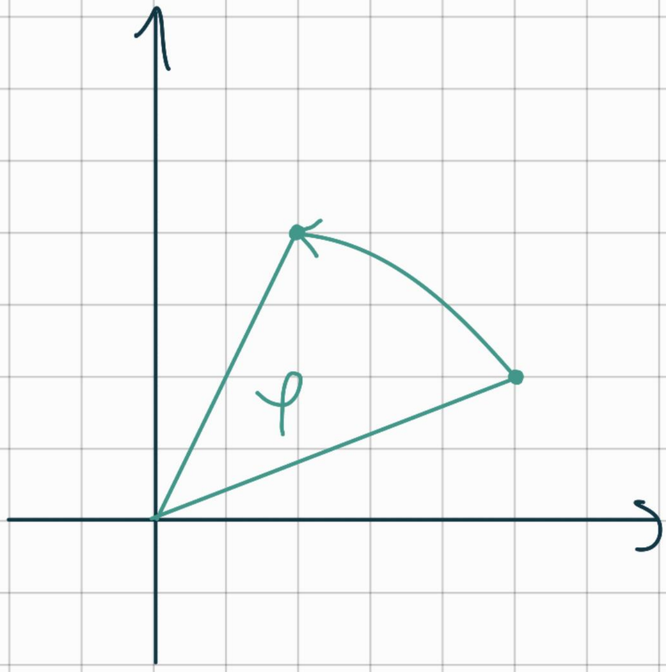
1) Zapiši predpisa za naslednji izometriji Evklidske ravnine:

a) Rotacija za $90°$ okoli točke $(1,1)$.

b) Zrcaljenje čez premico $x + y = 1$.

a) Iščemo predpis za dano rotacijo.

(i) Rotacija za kot $\varphi \in [0, 2\pi]$ okoli izhodišča:



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

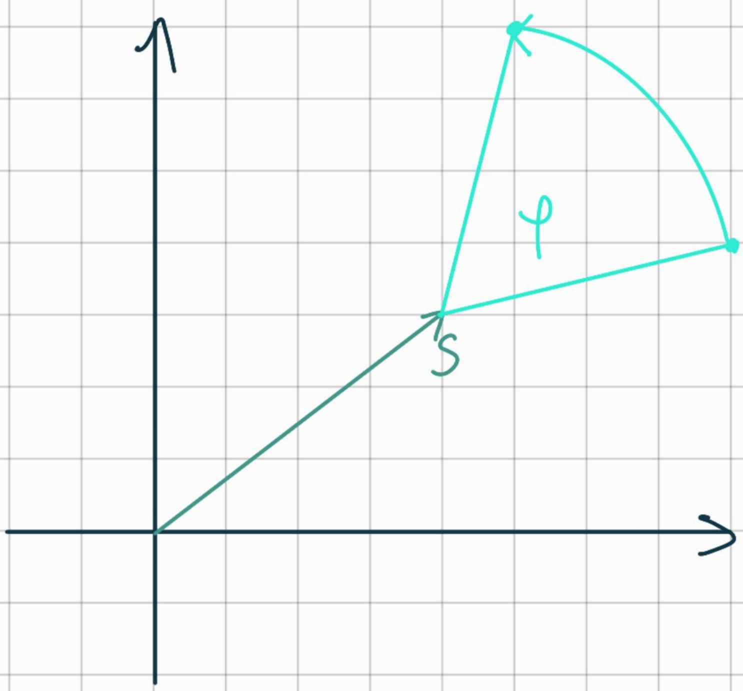
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\frac{\pi}{2}}(x,y) = (-y, x)$$

$$R_{-\frac{\pi}{2}} = R_{\frac{\pi}{2}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tau_{-\frac{\pi}{2}}(x,y) = (y, -x)$$

(ii) Rotacija za kut $\varphi \in [0, 2\pi]$ okoli točke S:



$$\tau(T) = S + R_\varphi(T - S)$$

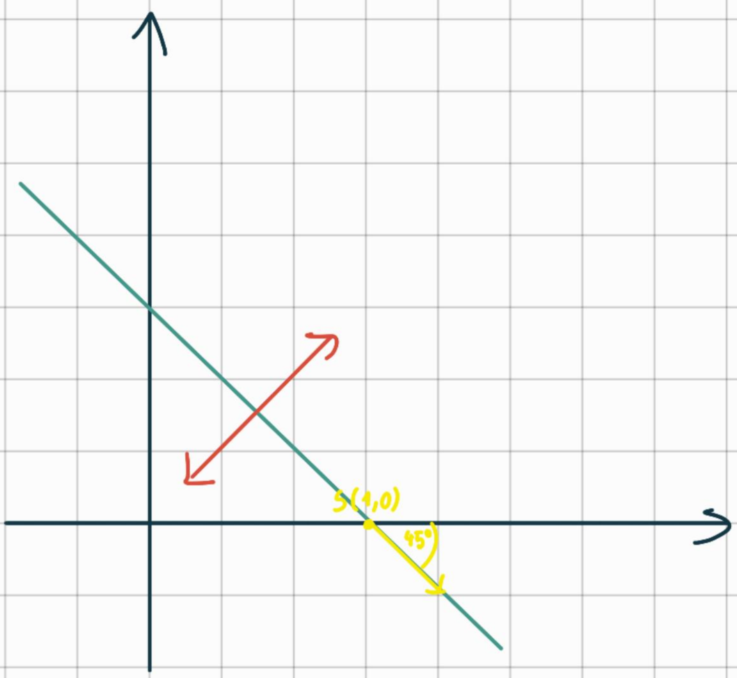
$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-y \\ x-1 \end{bmatrix} =$$

$$= (2-y, x) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)



(i) Zrcaljenje čez premico s smernim vektorjem $\vec{s} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ki gre skozi izhodišče:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \sin 2\varphi \\ -\cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Z_\varphi = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

(ii) Zrcaljenje čez premico s smernim vektorjem $\vec{s}=(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ki gre skozi poljubno točko S.

$$\tau(T) = S + Z_\varphi (T-S)$$

$S=(1,0)$
$\vec{n}=(1,-1)$
$\varphi = -45°$

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y \\ 1-x \end{bmatrix} =$$

$$= (1-y, 1-x) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Opomba: Množica vseh 2×2 ortogonalnih matrik tvori grupo:

$$O(2) = \{ Q \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,;\, Q^T Q = I \}$$

Vsaka matrika $Q \in O(2)$ je ene izmed naslednjih oblik:

- $\det Q = 1 \Rightarrow Q = R_\varphi$
- $\det Q = -1 \Rightarrow Q = Z_\varphi$

---

2) Geometrijsko opiši naslednje izometrije Evklidske ravnine:

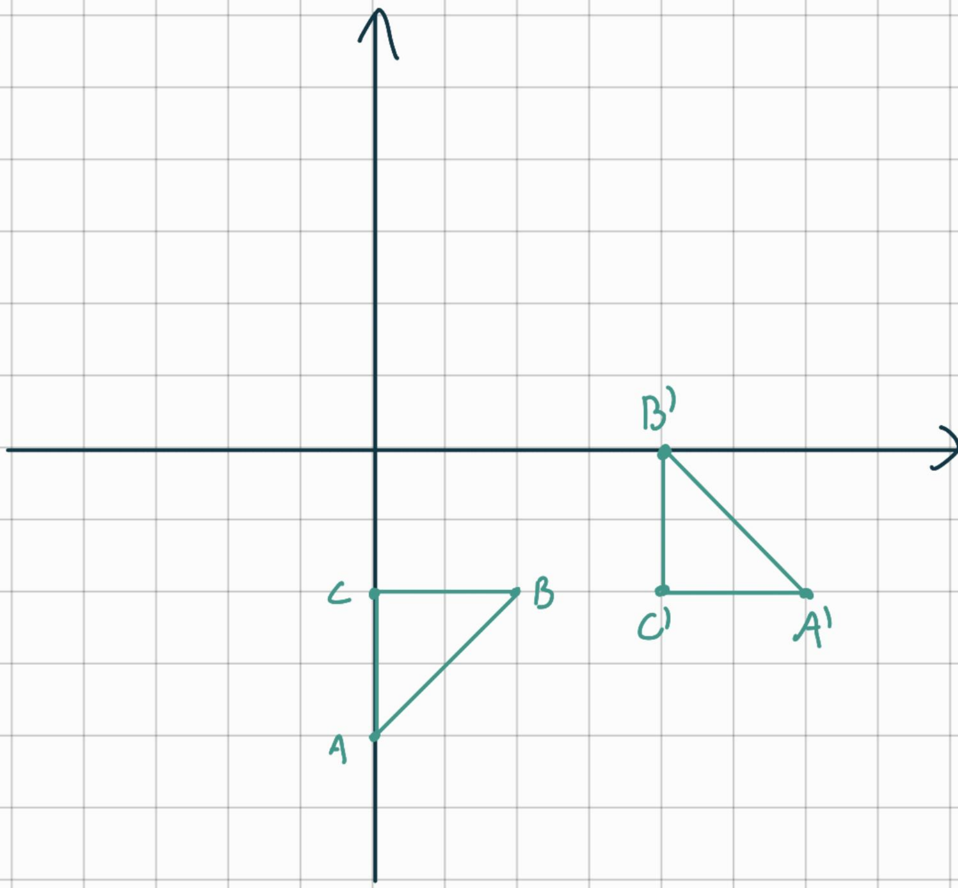
a) $\tau(x,y) = (-y+1, x-1)$

b) $\tau(x,y) = (y-2, x+2)$

c) $\tau(x,y) = (y-2, x+2)$

d) $\tau(x,y) = (x+2, -y)$

a)



$A(-2,0) \Rightarrow A'(3,-1)$
$B(1,-1) \Rightarrow B'(2,0)$
$C(0,-1) \Rightarrow C'(2,-1)$

Zdi se, da gre za rotacijo za $90°$ okoli $(1,0)$.

Računsko dobimo opis dane izometrije takole:

1) Izometrijo zapišemo v matrični obliki:

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} -y+1 \\ x-1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Q} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{a}$$

2) Geometrijski opis:

Če je $\det Q = 1$, velja $Q = R_\varphi$ za nek $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Če je $\det Q = 1$, imamo dve možnosti:

- $\varphi = 0$:

  $\Rightarrow Q = I \Rightarrow \tau(x) = x + a$

  τ je translacija.

- $\varphi \in (0, 2\pi)$:

  $\Rightarrow Q = R_\varphi$

  τ je rotacija za kot φ okoli točke S, ki zadošča pogoju $\tau(S) = S$.

$Q = R_{90°}$

$\tau(x,y) = (x,y)$

$$\begin{aligned} -y+1 &= x & \Rightarrow \quad x &= 1 \\ x-1 &= y & \Rightarrow \quad y &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Imamo rotacijo za $90°$ okoli $(1,0)$.

b) $A(0,0) \Rightarrow A'(-2,2)$
$B(1,0) \Rightarrow B'(-1,3)$
$C(0,1) \Rightarrow C'(-1,2)$

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\det Q = -1 \Rightarrow Q = Z_{45°}$

Če je $Q = Z_\varphi$ in ima τ neko premico fiksnih točk p, je τ zrcaljenje čez premico p.

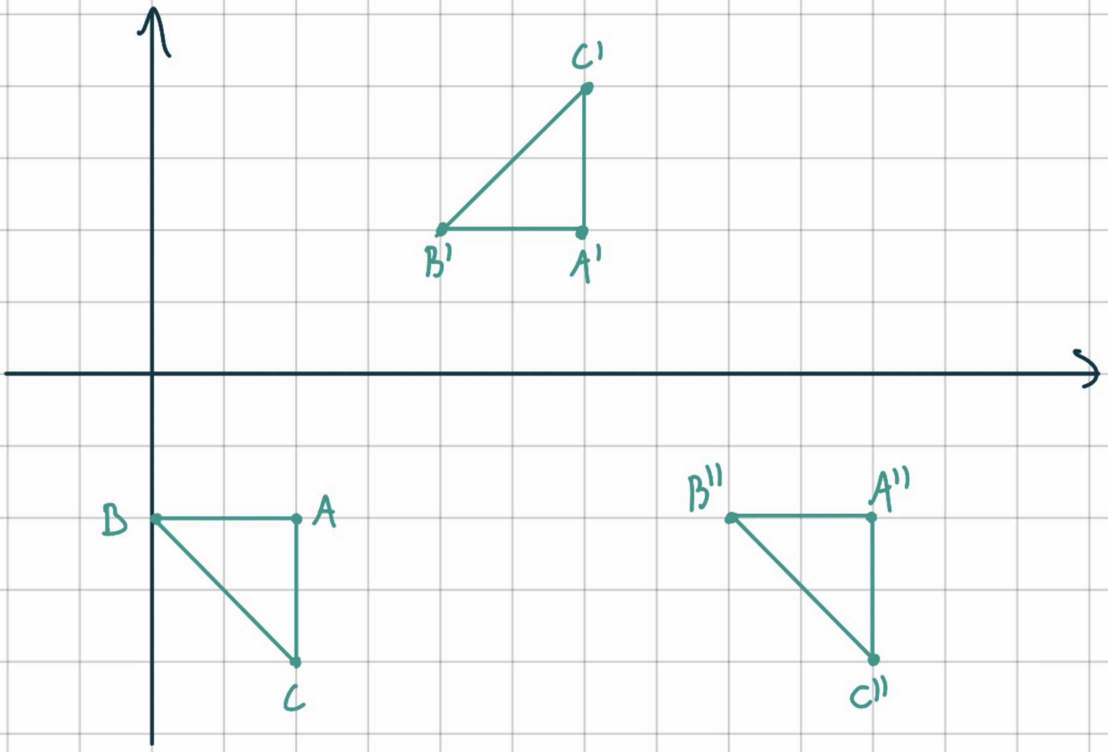
Fiksne točke:

$\tau(x,y) = (x,y)$
$(y-2, x+2) = (x,y)$

$y-2 = x \iff x+2 = y$
$x+2 = y$

$\Rightarrow$ Imamo zrcaljenje čez premico $y = x+2$.

c) $A(1,-1) \Rightarrow A'(3,1)$
$B(0,-1) \Rightarrow B'(2,1)$
$C(1,-2) \Rightarrow C'(3,2)$



Imamo izometrijo, ki je sestavljena iz dveh delov:

1) Zrcaljenje čez neko premico p.
2) Translacija v smeri $\vec{a}$.

Takim izometrijam rečemo zrcalni zdrs čez premico p za nek vektor $\vec{a}$.

Zapišimo τ v matrični obliki:

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} x+2 \\ -y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{Q} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}}$$

$$\det Q = -1 \Rightarrow Q = Z_0$$

Torej Q določa zrcaljenje čez neko premico s smerjo $(\cos 0, \sin 0) = (1,0) = \vec{n}$.

$\vec{a}$ določa translacijo za vektor $(2,0)$.

Torej je τ zrcalni zdrs čez premico $y=0$ za vektor $(2,0)$.

Definicija: **Grupa simetrij** množice $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je grupa vseh izometrij $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, za katere je $\tau(X) = X$.

Oznaka: $\mathrm{Sym}(X)$

---

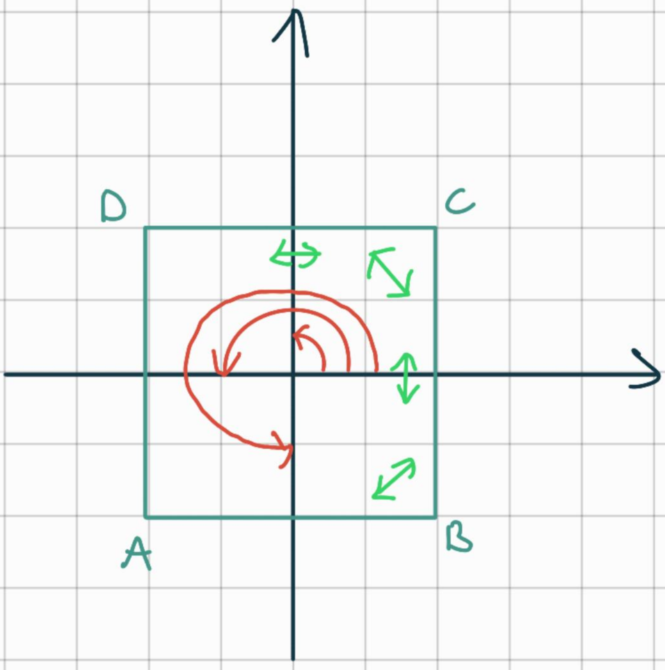
3) Poišči vse izometrije $\mathbb{R}^2$, ki ohranijo dane množice:

a) Kvadrat: $K = [-1,1] \times [-1,1] \subseteq \mathbb{R}^2$

b) Hiperbola: $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, xy = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

c) Mreža: $L = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$

a)



$$Sym(K) = \{ id, R_{90°}, R_{180°}, R_{270°}, Z_{0°}, Z_{90°}, Z_{45°}, Z_{-45°} \}$$

Pokazati moramo, da so to res vse simetrije kvadrata.

Največja možna razdalja med dvema točkama v kvadratu je $2\sqrt{2}$, in sicer med točkama A in C ter B in D.

Torej se par $\{A,C\}$ preslika bodisi v $\{A,C\}$ bodisi v $\{B,D\}$. Podobno velja za $\{B,D\}$.

i) $\{A,C\} \to \{A,C\}$:

$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & C \end{pmatrix} = id$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & C \end{pmatrix} = Z_{45°}$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix} = Z_{-45^\circ} \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = R_{180^\circ}$$

ii) $\{A,C\} \rightarrow \{B,D\}$:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = Z_{90^\circ} \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} = R_{90^\circ}$$

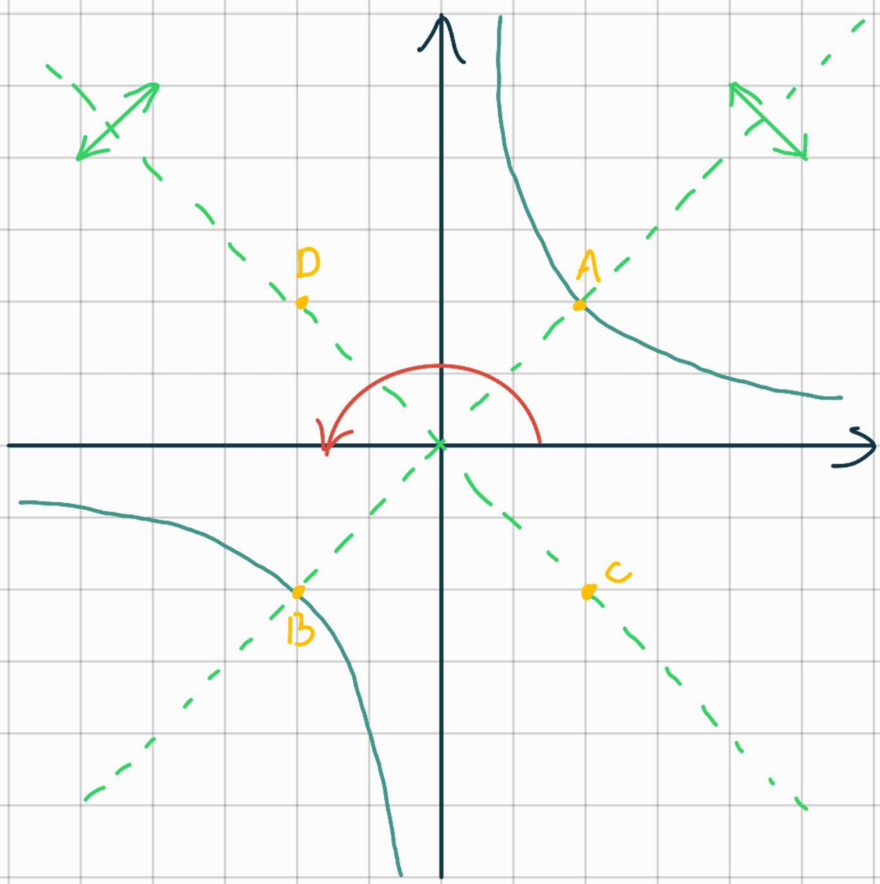
$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = R_{270^\circ} \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} = Z_{0^\circ}$$

Opomba: $\mathrm{Sym}(K) \cong D_4$

Opomba: $\mathrm{Sym}(\text{enakostranični } n\text{-kotnik}) \cong D_n$

Opomba: $\mathrm{Sym}(\text{enakostranični trikotnik}) \cong D_3 \cong S_3$

b)



$$\mathrm{Sym}(H) = \{id,\ R_{180^\circ},\ Z_{45^\circ},\ Z_{-45^\circ}\}$$

Pokazati moramo, da so to res vse simetrije.

Točki na obeh vejah hiperbole, ki sta najbližje skupaj, sta $A(-1,-1)$ in $B(1,1)$.

Od tod sledi, da se $\{A,B\}$ preslika nazaj vase.

Torej gre središče daljice med A in B v središče daljice med A in B, torej se O preslika v O.

$$\Rightarrow \tau(x) = Qx$$

Ker je $\tau(A)=A$ bodisi $\tau(A)=B=-A$, je premica $y=x$ lastni podprostor Q za lastni vrednosti $1, -1$.

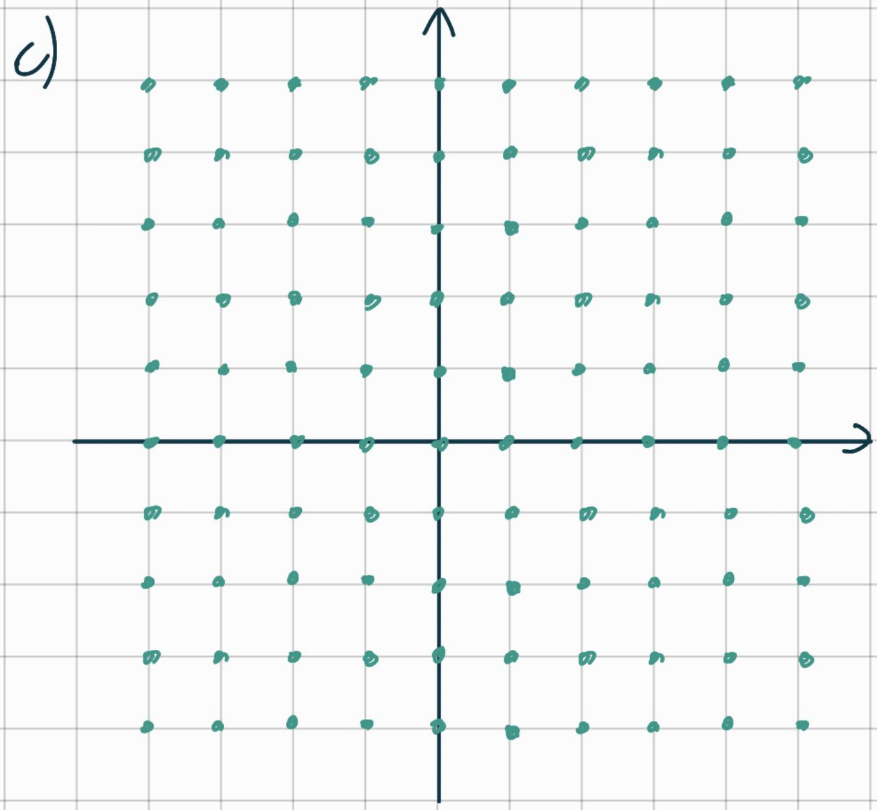
Ker je Q ortogonalna, je tudi premica $y=-x$ lastni podprostor za lastni vrednosti $1, -1$.

Imamo torej možnosti:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} = id \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{pmatrix} = Z_{45°}$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix} = Z_{-45°} \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = R_{180°}$$

Opomba: $\mathrm{Sym}(H) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (vsi elementi reda 2) c)



Vsako izometrijo $\mathbb{R}^2$ lahko zapišemo v obliki:

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Ker T preslika mrežo nazaj vase, velja:

i) $T(1,0) = \begin{bmatrix} a+e \\ c+f \end{bmatrix} \in L \Rightarrow \begin{matrix} a+e \in \mathbb{Z} \\ c+f \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

ii) $T(0,1) = \begin{bmatrix} b+c \\ d+f \end{bmatrix} \in L \Rightarrow \begin{matrix} b+c \in \mathbb{Z} \\ d+f \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

iii) $T(0,0) = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \in L \Rightarrow \begin{matrix} e \in \mathbb{Z} \\ f \in \mathbb{Z} \end{matrix}$

Sklep:

i) $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$

ii) e, f lahko poljubna

iii) a,b,c,d takšni, da je $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ortogonalna matrika

Možnosti:

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$

id, $Z_{0°}$, $Z_{90°}$, $R_{180°}$, $Z_{45°}$, $R_{270°}$, $R_{90°}$, $Z_{-45°}$

Rezultat:

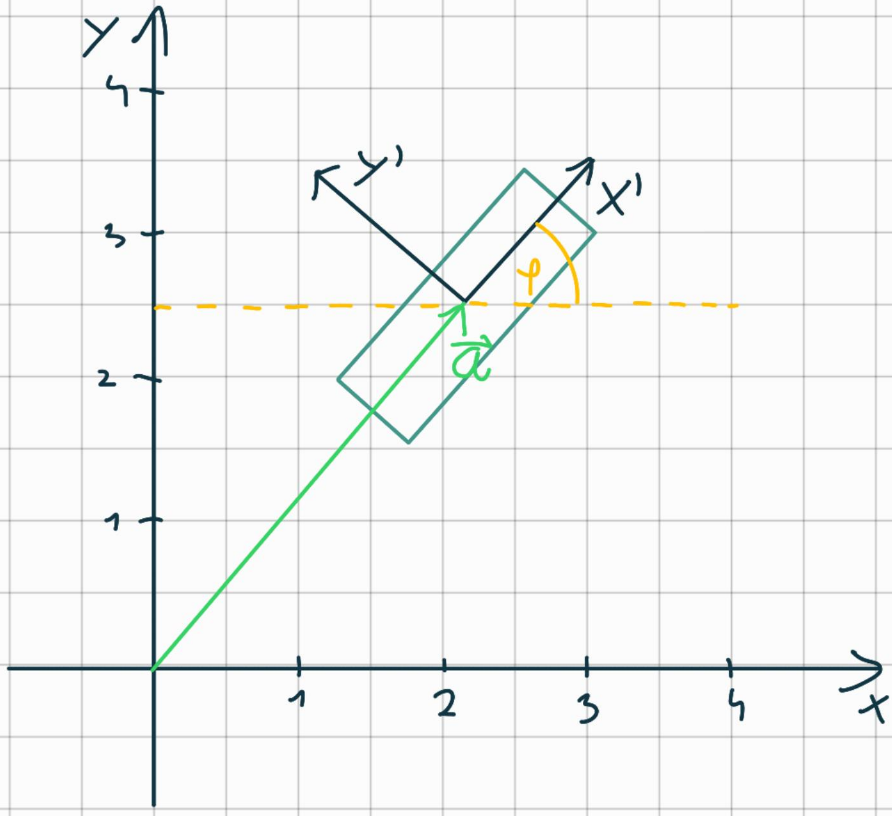
$$Sym(L) = \{\tau(x) = Qx + a \,;\, Q \in D_4,\ a \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cong D_4 \rtimes \mathbb{Z}^2 \qquad \text{(semidirektni produkt)}$$

---

4) V $\mathbb{R}^2$ so dane točke $A(3,1)$, $B(0,0)$, $C(0,1)$. Robot vidi te tri točke na položajih $A'(0,-2)$, $B'(-1,1)$, $C'(0,1)$. Določi položaj in orientacijo robota.

Prostor orientiranih položajev robota:



Za določanje lege robota potrebujemo:

i) Središče robota: $a = (a_x, a_y) \in \mathbb{R}^2$

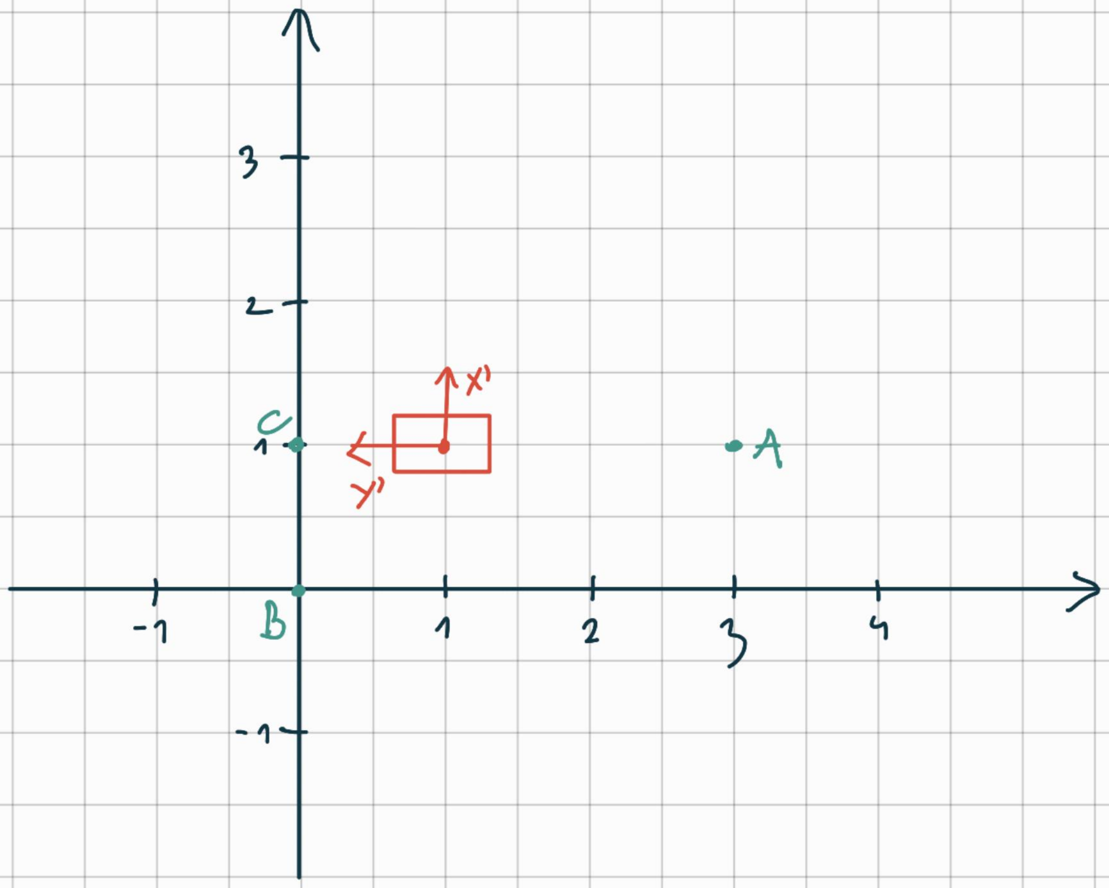
ii) Orientacija robota: $\varphi \in [0, 2\pi) \iff R_\varphi$

Prostor vseh položajev robota lahko parametriziramo:

$$SE(2) = \{\tau(x) = R_\varphi \cdot x + a \, ; \, \varphi \in [0, 2\pi), \, a \in \mathbb{R}^2\}$$

= grupa vseh izometrij $\mathbb{R}^2$, ki ohranjajo orientacijo (translacije, rotacije)

Položaju bo pripadala izometrija $\tau: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, za katero je $\tau(B_0) = B$, kjer je B_0 referenčni položaj robota.



$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi = 90^\circ$$

Kako to ugotovimo brez skice?

Med sistemoma (x,y) in (x',y') imamo zvezo:

$$x = R_\varphi \cdot x' + a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \tau(x')$$

i) A:

$x = 3$ $\qquad$ $x' = 0$

$y = 1$ $\qquad$ $y' = -2$

ii) B:

$x = 0$ $\qquad$ $x' = -1$

$y = 0$ $\qquad$ $y' = -1$

iii) C:

$x = 0$ $\qquad$ $x' = 0$

$y = 1$ $\qquad$ $y' = 1$

$$\tau(x', y') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

V predpis vstavimo točke in rešimo sistem linearnih enačb...

$\Rightarrow$ $e = 1$ $\qquad$ $b = -1$

$c = 1$ $\qquad$ $a = 0$

$f = 1$ $\qquad$ $d = 0$

$$\Rightarrow \tau(x', y') = \overset{\substack{R_{90^\circ} \\ \parallel}}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

orientacija $\qquad\qquad$ lega

Klasifikacija izometrij $\mathbb{R}^2$:

1) Translacije:

$\tau(x) = x + a$, $\quad Q = id$, $a \in \mathbb{R}^2$

Translacija za vektor a.

2) Rotacije:

$\tau(x) = R_\varphi x + a$, $\quad Q = R_\varphi$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $a \in \mathbb{R}^2$

Rotacija za kot φ okoli točke, ki zadošča $\tau(S) = S$.

3) Zrcaljenja:

$\tau(x) = Z_\varphi x + a$, $\quad Q = Z_\varphi$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$a \cdot s = 0$, $s = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

Zrcaljenje čez premico s smerjo s, ki vsebuje točko $\frac{a}{2}$.

4) Zrcalni zdrsi:

$\tau(x) = Z_\varphi x + a$, $\quad Q = Z_\varphi$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

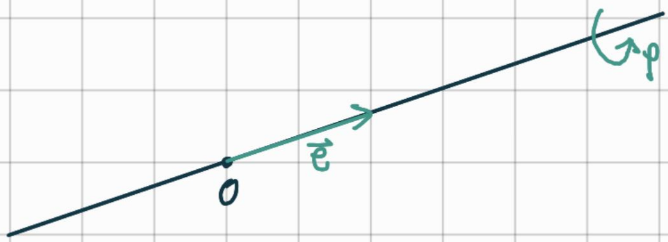
$a \cdot s \neq 0$, $s = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

Zapišimo $a = a_\perp + a_\parallel$, kjer je $a_\perp$ pravokoten na s in $a_\parallel$ vzporeden s.

Zrcalni zdrs čez premico s smerjo s, ki vsebuje točko $\frac{a_\perp}{2}$ za vektor $a_\parallel$.

Linearna rotacija v $\mathbb{R}^3$ je določena z:

- Orientirano osjo rotacije (enotski vektor $\vec{e}$ v $\mathbb{R}^3$)
- Kotom rotacije ($\varphi \in [0, \pi]$)



Pri rotacijah v negativni smeri uporabimo $-\vec{e}$.

$R(\vec{e}, \varphi)$ lahko izračunamo na tri načine:

- Z uporabo prehodnih matrik:

$$R(\vec{e}, \varphi) = P \cdot R(\vec{k}, \varphi) \cdot P^T$$

- Z uporabo Rodriguesove formule
- Z uporabo kvaternionov

Rotacijske matrike tvorijo grupo:

$$SO(3) = \{ R \in \mathbb{R}^{3\times3};\ R^T R = I,\ \det(R) = 1 \}$$

$R(\vec{k}, 90°)\, \vec{i} = \vec{j}$ $\qquad$ $R(\vec{i}, 90°)\, \vec{j} = \vec{k}$ $\qquad$ $R(\vec{j}, 90°)\, \vec{i} = -\vec{k}$

$R(\vec{k}, 90°)\, \vec{j} = -\vec{i}$ $\qquad$ $R(\vec{i}, 90°)\, \vec{k} = -\vec{j}$ $\qquad$ $R(\vec{j}, 90°)\, \vec{k} = \vec{i}$

$$R(\vec{k},\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rodriguesova formula:

$$R(\vec{e},\varphi)\vec{r} = \cos\varphi \cdot \vec{r} + (\vec{e}\cdot\vec{r})(1-\cos\varphi)\vec{e} + \sin\varphi \cdot \vec{e}\times\vec{r}$$

---

5) Zapiši matriko za linearno rotacijo $\mathbb{R}^3$ za kot $\varphi = 60^\circ$ okoli osi s smerjo $\vec{e} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

$$\vec{e} = (0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}$$
$$\sin\varphi = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{e}\times\vec{i} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

$$R(\vec{e},\varphi)\vec{i} = \tfrac{1}{2}\vec{i} + 0 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{6}}{4}, -\tfrac{\sqrt{6}}{4})$$

$$R(\vec{e},\varphi)\vec{j} = \ldots = (-\tfrac{\sqrt{6}}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4})$$

$$R(\vec{e},\varphi)\vec{k} = \ldots = (\tfrac{\sqrt{6}}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4})$$

$$R(\vec{e},\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Kako iz matrike $R(\vec{e},\varphi)$ izračunamo φ in $\vec{e}$?

Vemo, da lahko $R(\vec{e},\varphi)$ faktoriziramo v obliki:

$$R = R(\vec{e}, \varphi) = P \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P^T \quad / \operatorname{tr}$$

$$\operatorname{tr}(R) = 2\cos\varphi + 1$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\operatorname{tr}(R) - 1}{2}$$

Os rotacije je lastni podprostor pri $\lambda = 1$.

$$\vec{e} = \frac{1}{2\sin\varphi} \begin{bmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{bmatrix}$$

Definicija: *Linearna izometrija* prostora $\mathbb{R}^3$ je izometrija oblike $\tau(x) = Qx$, kjer je Q ortogonalna 3×3 matrika.

Linearne izometrije tvorijo ortogonalno grupo:

$$O(3) = \{ Q \in \mathbb{R}^{3\times 3} ; Q^T Q = I \}$$

Poznamo tri tipe linearnih izometrij $\mathbb{R}^3$:

i) Rotacija:

Če je $\det(Q) = 1$, je $Q = R(\vec{e}, \varphi)$ za nek enotski vektor $\vec{e}$ in $\varphi \in [0, \pi)$.

Lastne vrednosti so $1, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$.

Lastni vektor pri $\lambda = 1$ je $\vec{e}$.

ii) Zrcaljenja:

Če je $\det(Q) = -1$ in $tr(Q) = 1$, je $Q = Z(\vec{n})$ zrcaljenje čez ravnino z normalo $\vec{n}$.

Lastne vrednosti so $1, 1, -1$.

Lastni vektor pri $\lambda = -1$ je $\vec{n}$.

iii) Zrcalni zasuki:

Če je $\det(Q) = -1$ in $tr(Q) \neq 1$, je $Q = R(\vec{n}, \varphi) + Z(\vec{n})$.

Lastne vrednosti so $-1, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$.

Lastni vektor pri $\lambda = -1$ je $\vec{n}$.

$$Q = U \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} U^T$$

$$\cos\varphi = \frac{sl(Q) + 1}{2}$$

---

6) Geometrično opiši linearni izometriji $\mathbb{R}^3$, ki ju določata matriki:

a) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$

b) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

a) $\det(Q) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 1$

$\cos\varphi = \frac{tr(Q)-1}{2} = 0$

$\varphi = 90°$

$\vec{e} = \frac{1}{2\sin\varphi} \begin{bmatrix} R_{32}-R_{23} \\ R_{13}-R_{31} \\ R_{21}-R_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

Imamo rotacijo za $90°$ okoli $\vec{e}$.

b) $\det(Q) = \frac{1}{27} - \frac{3}{27} - \frac{8}{27} - \left(\frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27}\right) = -1$

$tr(Q) = 1$

Imamo zrcaljenje čez ravnino z normalo $\vec{n}$.

$\vec{n}$ je lastni vektor pri lastni vrednosti $\lambda = -1$.

$\Leftrightarrow \vec{n} \in \ker(Q - \lambda I) = \ker(Q + I)$

$Q + I = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$x + y - 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = z$$
$$y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = z$$

$\Rightarrow$ Rešitev je $\lambda\cdot(1,1,1)$.

$\Rightarrow \vec{n} = (1,1,1)$

Imamo zrcaljenje čez ravnino $x+y+z=0$.

---

7) Geometrično opiši naslednji izometriji Evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$:

a) $\tau(x,y,z) = (z, y+1, -x)$

b) $\tau(x,y,z) = (-y+1, x-1, -z)$

a) Najprej zapišemo τ v obliki $\tau(x) = Qx + a$.

$$\tau(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\det Q = 1 \Rightarrow Q = R(e, \varphi)$

$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} Q - 1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \Rightarrow \varphi = 90°$

$\vec{e} = \pm \vec{j}$

Preslikava τ je kompozicija rotacije okoli vektorja $\vec{j}$ za $90°$ in translacije za vektor $\vec{r}$.

Ločili bomo dve skupini točk:

1) Točke na y-osi se prestavijo za vektor $\vec{j}$.

2) Točke, ki ne ležijo na y-osi, se najprej zavrtijo za 90° okoli y-osi, nato pa premaknejo za vektor $\vec{j}$.

To je vijačni premik.

b) Najprej zapišemo τ v obliki $\tau(x) = Qx + a$.

$$\tau(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\det Q = -1$
$\operatorname{tr} Q = -1$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} Q + 1}{2} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Imamo zrcalni zasuk.

Lastni vektor pri $\lambda = -1$ je $\vec{n}$:

$Q\vec{k} = -\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{n} = \vec{k}$

Torej je τ zrcalni zasuk za kot $\varphi = \frac{\pi}{2}$ okoli neke ravnine z normalo $\vec{n} = \vec{k}$.

Radi bi ugotovili še, okoli katere vodoravne ravnine vrti in zrcali ta zrcalni zasuk, ter, okoli katere točke vrti.

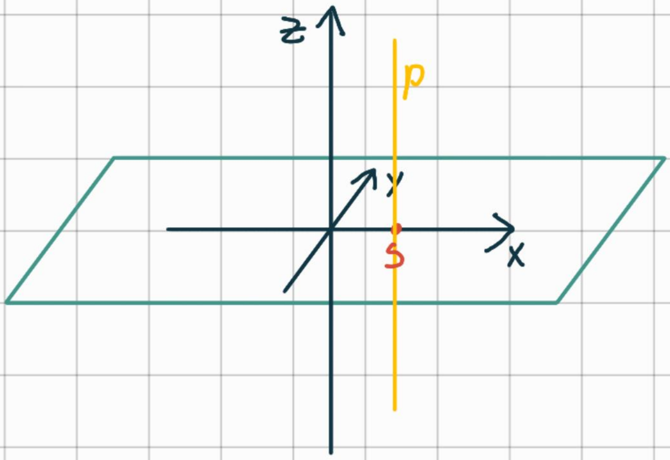
Ideja: Poiščimo fiksne točke τ.

$\tau(x,y,z) = (x,y,z)$

$$\begin{aligned} -y+1 &= x &&\Rightarrow -y+1 = y+1 \Rightarrow y=0 \\ x-1 &= y &&\Rightarrow x = 1 \\ -z &= z &&\Rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ τ ima fiksno točko $S(1,0,0)$

$\Rightarrow$ Vrtimo in zrcalimo glede na ravnino $z=0$ in vrtimo okoli točke $S(1,0,0)$ za $90°$.



i) Točke na ravnini $z=0$ τ zarotira za $90°$ okoli točke S.

ii) Točke izven ravnine $z=0$ τ prezrcali čez to ravnino in jih zavrti za 90 okoli premice p.

Klasifikacija izometrij $\mathbb{R}^3$, ki ohranjajo orientacijo:

1) Translacije:

$\tau(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}, \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$

2) Rotacije:

$$\tau(\vec{x}) = R(\vec{e},\varphi) + \vec{a}, \quad \vec{a}\cdot\vec{e} = 0$$

3) Vijačni premiki:

$$\tau(\vec{x}) = R(\vec{e},\varphi) + \vec{a}, \quad \vec{a}\cdot\vec{e} \neq 0$$

Klasifikacija izometrij $\mathbb{R}^3$, ki ne ohranjajo orientacije:

1) Zrcaljenja:

$$\tau(\vec{x}) = Z(\vec{n})\vec{x} + \vec{a}, \quad \vec{a} \parallel \vec{n}$$

2) Zrcalni zdrsi:

$$\tau(\vec{x}) = Z(\vec{n})\vec{x} + \vec{a}, \quad \vec{a} \nparallel \vec{n}$$

3) Zrcalni zasuki:

$$\tau(\vec{x}) = Z(\vec{n}) \circ R(\vec{e},\varphi)\vec{x} + \vec{a}$$