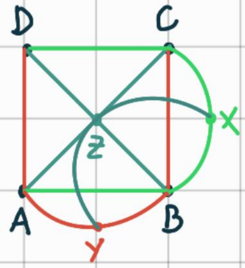
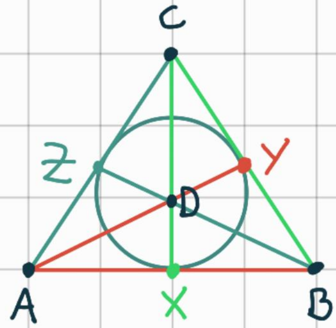
UVOD V PROJEKTIVNO GEOMETRIJO

Vse vzporedne premice v afini ravnini se sekajo na obzorju. Projektivno ravnino dobimo, če afini ravnini dodamo točke na obzorju. Torej vsaki množici vzporednih premic dodamo točko na obzorju. Vse nove točke tako ležijo na novi premici, ki jo imenujemo premica v neskončnosti.

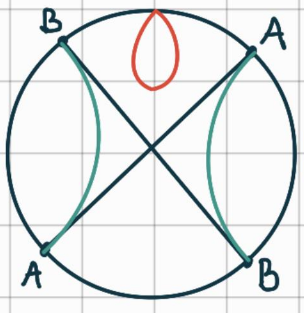
Primer: $\mathbb{Z}_2^2$:





Fanova ravnina.

Primer: $\mathbb{R}^2$:



Ko hiperboli v $\mathbb{R}^2$ dodamo dve točki v neskončnosti, dobimo sklenjeno krivuljo v projektivni ravnini $\mathbb{R}P^2$.

Realno afino ravnino vložimo v $\mathbb{R}^3$ na nivo $z=1$.

Vsaka točka $P \in A$ je enolično določena s premico, ki gre skozi P in koordinatno izhodišče O.

Obstajajo premice v $\mathbb{R}^3$, ki grejo skozi O in ne sekajo ravnine $z=1$. Te nam predstavljajo premice v neskončnosti (na obzorju).

Enorazsežni podprostori v $\mathbb{R}^3$ so tako projektivne točke, dvorazsežni pa projektivne premice.

Afino premico $p \subseteq A$ tako predstavlja ravnina v $\mathbb{R}^3$, ki gre skozi O in vsebuje p. Taka projektivna premica res vsebuje le eno projektivno točko v neskončnosti.

Definicija: Naj bo V vektorski prostor. Množica vseh vektorskih podprostorov v V se imenuje projektivna geometrija nad V.

Oznaka: $\mathcal{P}(V)$

Enorazsežni podprostori v V se imenujejo projektivne točke, dvorazsežni projektivne premice, $\dim V - 1$ razsežni pa projektivne hiperravnine.

Za $U \leq V$ definiramo projektivno dimenzijo kot $\operatorname{pdim} U := \dim U - 1$.

Razsežnost geometrije $\mathcal{P}(V)$ je $\operatorname{pdim} V$.

Naj bosta A, B različni projektivni točki v $\mathcal{P}(V)$.

Projektivna premica skozi A in B je $A \oplus B$.

Naj bo $\text{pdim}\, \mathcal{P}(V) = 2$ in naj bosta p, q projektivni premici v $\mathcal{P}(V)$.

$\dim V = 3$
$\dim p = \dim q = 2$

Tedaj je presek $p \cap q$ razsežnosti vsaj 1.

Zato se se poljubni premici v projektivni ravnini sekata.

DUALNOST

Definicija: Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Dualni vektorski prostor V^* je množica vseh linearnih funkcionalov $\varphi : V \to \mathbb{F}$.

Če je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ baza za V, je dualna baza za V^* $\{f_1, \ldots, f_n\}$, kjer je $f_i : V \to \mathbb{F}$ definiran kot $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.

V in V^* sta izomorfna, ampak je izomorfizem odvisen od baze.

Izomorfna sta tudi V in V^{**}:

$\varphi : V \longrightarrow V^{**}$
$\varphi(v)(f) := f(v)$

Definicija: **Zgornji anhilator** vektorskega podprostora $W \leq V$ je $W^{\perp} = \{ f \in V^* ;\ f(w) = 0 \ \forall w \in W \}$.

Spodnji anhilator vektorskega podprostora $U \leq V^*$ je $U_{\perp} = \{ v \in V ;\ f(v) = 0 \ \forall f \in U \}$.

Jasno je, da sta $W^{\perp}$ in $U_{\perp}$ vektorska podprostora.

Izrek: Preslikava $^{\perp} : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V^*)$ je bijekcija z inverzom $_{\perp} : \mathcal{P}(V^*) \to \mathcal{P}(V)$.

Dokaz: $W \leq V$

$W \subseteq (W^{\perp})_{\perp}$

$w \in W \Rightarrow w \in (W^{\perp})_{\perp}$

Po definiciji $W^{\perp}$ velja $f(w) = 0$ za vse $f \in W^{\perp}$.
Po definiciji $(W^{\perp})_{\perp}$ velja $w \in (W^{\perp})_{\perp}$.

$(W^{\perp})_{\perp} \subseteq W$

$w \notin W \Rightarrow w \notin (W^{\perp})_{\perp}$

Iščemo funkcional $f \in W^{\perp}$, da $f(w) \neq 0$.

Naj bo $\{w_1, \dots, w_k\}$ baza za W in jo dopolnimo do baze za V:

$\{w_1, \dots, w_{k+1}, \dots, w_n\}$, $w_{k+1} = w$

Naj bo $f : V \to \mathbb{F}$ dualni funkcional k baznemu vektorju $w_{k+1} = w$.

$\Rightarrow f(W) = 0$ in $f(w) = 1 \neq 0$

$\Rightarrow f \in W^{\perp}$ in $w \notin (W^{\perp})_{\perp}$

$\Rightarrow (W^{\perp})_{\perp} = W$

$U \leq W^*$

$(U_{\perp})^{\perp} = U$

$U_{\perp} = \{v \in V ; f(v) = 0 \ \forall f \in U\} \leq V$

$\equiv \{\varphi(v) \in V^{**} ; f(\varphi(v)) = 0 \ \forall f \in U\} \leq V^{**}$

$= U^{\perp}$

Uporabimo zgornji razmislek:

$(U_{\perp})^{\perp} \equiv (U^{\perp})^{\perp} \equiv (U^{\perp})_{\perp} = U$

Izrek: 1) $W_1 \leq W_2 \leq V \Rightarrow W_2^{\perp} \leq W_1^{\perp} \leq V^*$

2) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

3) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

4) $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W =: \operatorname{kdim} W$

Dokaz: 1) $f \in W_2^{\perp}$

$\Rightarrow f(w) = 0 \ \forall w \in W_2 \geq W_1$

$\Rightarrow f \in W_1^{\perp}$

2) $(\supseteq)$: $W_1 \cap W_2 \leq W_1, W_2$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} W_1^{\perp}, W_2^{\perp} \leq (W_1 \cap W_2)^{\perp}$

$\Rightarrow W_1^{\perp} + W_2^{\perp} \leq (W_1 \cap W_2)^{\perp}$

$(\subseteq)$: $f \in (W_1 \cap W_2)^{\perp}$

$\Rightarrow f(w) = 0 \quad \forall w \in W_1 \cap W_2$

$W_1 = (W_1 \cap W_2) \oplus U_1$
$W_2 = (W_1 \cap W_2) \oplus U_2$
$V = (W_1 \cap W_2) \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus U_0$

$\overset{\forall}{v} = w + u_1 + u_2 + u_0$ enoličen zapis

Definirajmo $f_1, f_2 : V \to \mathbb{F}$:

$f_1(v) = f_1(w + u_1 + u_2 + u_0) := f(u_1) + f(u_0)$
$f_2(v) = f_2(w + u_1 + u_2 + u_0) := f(u_2) + f(u_0)$

$\Rightarrow f = f_1 + f_2$

$f_1 \in W_1^{\perp}$
$f_2 \in W_2^{\perp}$

$\Rightarrow f \in W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

3) $(\subseteq)$ $W_1, W_2 \leq W_1 + W_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} (W_1 + W_2)^{\perp} \leq W_1^{\perp}, W_2^{\perp}$

$\Rightarrow (W_1+W_2)^\perp \subseteq W_1^\perp \cap W_2^\perp$

$(\supseteq)$ $f \in W_1^\perp \cap W_2^\perp \Rightarrow f(w) = 0 \quad \forall w \in W_1, W_2$

$w \in W_1 + W_2 \Rightarrow w = w_1 + w_2, \quad w_i \in W_i$

$f(w) = f(w_1) + f(w_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f \in (W_1+W_2)^\perp$

4) Dopolnimo bazo $\{w_1, \dots, w_k\}$ za W do baze $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ za V.

$\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$ je dualna baza za V^*.

Naj bo $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in W^\perp$.

$0 = f(w_i) = \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, k$

$\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f_i\right)(u) = 0 \quad \forall u \in W$

$\Rightarrow \{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ je baza za $W^\perp$.

Primer:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[d, hook] & (a,b) \arrow[d, mapsto] & \\
\mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \arrow[d, "\perp"] & \mathrm{Lin}\{(a,b,1)\} \arrow[rd, mapsto, bend left] & \\
\mathcal{P}((\mathbb{R}^3)^*) \arrow[d, "\equiv"] & \mathrm{Lin}\{x f_1 + y f_2 + z f_3\} \arrow[d, leftrightarrow] & \{f(a,b,1)=0\} \\
\mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \arrow[d, leftrightarrow] & \mathrm{Lin}\{(x,y,z)\} = \mathrm{Lin}\{x e_1 + y e_2 + z e_3\} \arrow[d, dashed] & \\
\mathbb{R}^2 & \text{premica } ax + by + 1 = 0 &
\end{tikzcd}
$$

Če točka (a,b) leži na paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$, se z zgornjo konstrukcijo preslika v premico $ax + \frac{1}{4}a^2 y + 1 = 0$.

Za $y = x^2$ dobimo $0 = ax + \frac{1}{4}a^2x^2 + 1 = \left(\frac{ax}{2} + 1\right)^2$.

Torej so vse premice tangentne na parabolo $y = \frac{1}{4}x^2$.

Definicija: **Trditev** T o geometriji $\mathcal{P}(V)$ je izjava, v kateri nastopajo elementi geometrije $\mathcal{P}(V)$ in relacije med njimi ($\subseteq, \supseteq, \cap, +, \dim$).

Dualna trditev T^* trditve T je izjava o geometriji $\mathcal{P}(V^*)$, ki jo dobimo iz T, če vse $W \leq V$ zamenjamo z njihovimi zgornjimi anihilatorji $W^\perp \leq V^*$, $+$ zamenjamo s $\cap$, $\cap$ s $+$, $\subseteq$ z $\supseteq$, $\supseteq$ z $\subseteq$ in $\dim$ s kodim.

Primer: T: V projektivni ravnini $\mathcal{P}(V)$ skozi poljubni točki poteka natanko ena premica.

$\dim V = 3: \ \forall A, B \leq V,\ \dim A = \dim B = 1$
$\Rightarrow \exists!\ p \leq V,\ \dim p = 2 : \ A, B \leq p$

T^*: $\dim V^* = 3: \ \forall A^\perp, B^\perp \leq V^*,\ \operatorname{kodim} A^\perp = \operatorname{kodim} B^\perp = 1$
$\Rightarrow \exists!\ p^\perp \leq V^*,\ \operatorname{kodim} p^\perp = 2 : \ A^\perp, B^\perp \geq p$

$\dim V^* = 3: \ \forall q, r \leq V^*,\ \dim q = \dim r = 2$
$\Rightarrow \exists!\ X \leq V^*,\ \dim X = 1 : \ X \leq q, r$

Poljubni premici v V^* se sekata v natanko eni točki.

Primer: T: V projektivni ravnini so A, B, C kolinearne v $P(V)$.

$$\dim A = \dim B = \dim C = 1:$$
$$\exists p, \dim p = 2: A, B, C \leq p$$

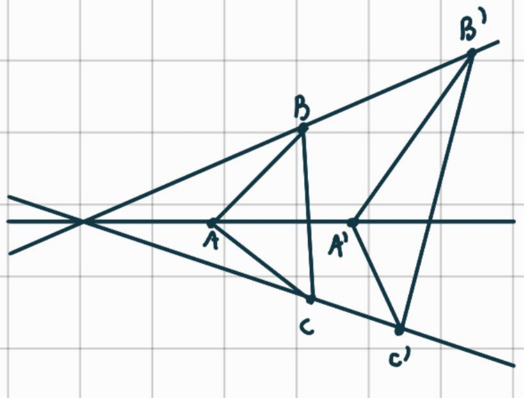
T^*: $\dim A^\perp = \dim B^\perp = \dim C^\perp = 2:$
$$\exists p^\perp: \dim p^\perp = 1: A^\perp, B^\perp, C^\perp \geq p^\perp$$

Premice $A^\perp, B^\perp, C^\perp$ se sekajo v skupni točki.

Princip dualnosti:

Za vsako resnično trditev T v $P(V)$ dobimo resnično trditev T^* v $P(V^*)$.

Definicija: Trikotnika ABC in $A'B'C'$ v projektivni ravnini sta v perspektivni legi, če $A \neq A'$, $B \neq B'$ in $C \neq C'$ in se premice AA', BB' in CC' sekajo v eni točki.



Desarguesov izrek za projektivno ravnino:

Trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta v perspektivni legi natanko tedaj, ko presečišča $X = AB \cap A'B'$, $Y = AC \cap A'C'$ in $Z = BC \cap B'C'$ ležijo na isti premici.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj bosta ABC, $A'B'C'$ v perspektivni legi.

Naj bo $P = AA' \cap BB' \cap CC'$.

Izberimo neničelne vektorje $a \in A, b \in B, c \in C, a' \in A', b' \in B', c' \in C', p \in P$.

$$p = \alpha a + \alpha' a' = \beta b + \beta' b' = \gamma c + \gamma' c',$$
$$\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathbb{F}$$

$$\Rightarrow x := \alpha a - \beta b = \beta' b' - \alpha' a' \in AB \cap A'B' = X$$

$$y := \alpha a - \gamma c = \gamma' c' - \alpha' a' \in AC \cap A'C' = Y$$

$$z := \beta b - \gamma c = \gamma' c' - \beta' b' \in BC \cap B'C' = Z$$

$$z = y - x$$

$\Rightarrow X, Y, Z$ so kolinearne

($\Leftarrow$) Trditev ($\Rightarrow$) pravi:

A, B, C nekolinearne, A', B', C' nekolinearne,
AA', BB', CC' se sekajo v eni skupni točki
$\Rightarrow AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C'$ so kolinearne

Označimo:

$$p := A^\perp, \; q := B^\perp, \; r := C^\perp$$
$$p' := A'^\perp, \; q' := B'^\perp, \; r' := C'^\perp$$
$$E := p \cap q, \; F := p \cap r, \; G = q \cap r$$
$$E' := p' \cap q', \; F' := p' \cap r', \; G' := q' \cap r'$$
$$\Rightarrow p = EF, \; q = EG, \; r = FG$$
$$p' = E'F', \; q' = E'G', \; r' = F'G'$$

$(AA')^\perp = (A+A')^\perp = A^\perp \cap A'^\perp = p \cap p' = EF \cap E'F'$
$(BB')^\perp = (B+B')^\perp = B^\perp \cap B'^\perp = q \cap q' = EG \cap E'G'$
$(CC')^\perp = (C+C')^\perp = C^\perp \cap C'^\perp = r \cap r' = FG \cap F'G'$

$(AB \cap A'B')^\perp = (AB)^\perp + (A'B')^\perp = (A^\perp \cap B^\perp) + (A'^\perp \cap B'^\perp) =$
$= (p \cap q) + (p' \cap q') = E + E' = EE'$

$(AC \cap A'C')^\perp = \ldots = (p \cap r) + (p' \cap r') = \ldots = FF'$

$(BC \cap B'C')^\perp = \ldots = (q \cap r) + (q' \cap r') = \ldots = GG'$

Dualna trditev $(\Rightarrow)^*$ pravi:

p, q, r se ne sekajo v skupni točki (EFG $\triangle$)
p', q', r' se ne sekajo v skupni točki ($E'F'G'$ $\triangle$)
$EF \cap E'F'$, $EG \cap E'G'$, $FG \cap F'G'$ so kolinearne
$\Rightarrow EE', FF', GG'$ se sekajo v skupni točki

To je pa ravno ekvivalentno $(\Leftarrow)$.

VLOŽITEV AFINE GEOMETRIJE V PROJEKTIVNO

Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, $\dim V = n+1$.

Naj bo $W < V$, $\dim W = n$.

Naj bo $a \in V \setminus W$.

$\mathcal{A} = a + W$ afin podprostor v V

Za afin podprostor $X \subseteq \mathcal{A}$ definiramo:

$\ell(X) = \operatorname{Lin} X \leq V$

$\Rightarrow \ell : A(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(V)$

Velja:

- $\ell(x+U) = \mathrm{Lin}\{x\} \oplus U$

  $\Rightarrow \ell$ slika točke v projektivne točke

  $\Rightarrow \ell$ je dobro definirana

- $\ell(x+U) \cap \mathcal{A} = x+U$

  $\Rightarrow \ell$ ima levi inverz

  $\Rightarrow \ell$ je injektivna

- $Z \leq V,\ Z \nleq W : Z \cap \mathcal{A} \neq \emptyset,\ \ell(Z \cap \mathcal{A}) = Z$

Izrek: Za preslikavo $\ell : A(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(V)$ velja:

1) ℓ je injektivna

2) $Z \leq V$ je v sliki $\ell \iff Z \nleq W$

   $\mathrm{im}\,\ell = P(V) \setminus P(W)$

3) ℓ ohranja inkluzije:

   $X \leq Y \leq \mathcal{A} \Rightarrow \ell(X) \leq \ell(Y) \leq P(V)$

4) $\{X_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ družina afinih podprostorov v $\mathcal{A}$ z nepraznim presekom

$$\Rightarrow \ell\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \ell(X_\lambda)$$

5) $\{X_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ družina afinih podprostorov v $\mathcal{A}$

$$\Rightarrow \ell\left(\mathrm{Af}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \ell(X_\lambda)$$

6) $\dim X = \operatorname{pdim} \ell(X)$

7) $X \parallel Y$ v $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ $\ell(X) \cap W \subseteq \ell(Y) \cap W$ ali
$\ell(Y) \cap W \subseteq \ell(X) \cap W$

Dokaz: 7) $\ell(\overset{\overset{a+U}{\shortparallel}}{X}) \cap W = (\mathrm{Lin}\{x\} \oplus U) \cap W = U$

$\ell(\overset{\overset{a'+U'}{\shortparallel}}{Y}) \cap W' = U'$

$X \parallel Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} U \leq U'$ ali $U' \leq U$

$\Leftrightarrow \ell(X) \cap W \leq \ell(Y) \cap W$ ali $\ell(Y) \cap W \leq \ell(X) \cap W$

Preslikava $\ell : A(\mathcal{A}) \to P(V)$ je vložitev afine v projektivno geometrijo.

Označimo s PV množico vseh točk v $P(V)$. Tedaj je $PV = PW \cup \{\mathrm{Lin}\{x\} ; x \in \mathcal{A}\}$. Množico PW imenujemo hiperravnina v neskončnosti.

Hiperravnina v ∞ je odvisna od izbire vložitve.

Primer: $\dim V = 3$, $W < V$, $\dim W = 2$, $\mathcal{A} = a + W$,
$\ell : A(\mathcal{A}) \to P(V)$

$p, q \subseteq \mathcal{A}$ vzporedni premici

$\ell(p) \cap W$ točka v neskončnosti
$\ell(q) \cap W$ točka v neskončnosti

$p \parallel q \overset{(?)}{\iff} \ell(p)$ in $\ell(q)$ se sekata v neskončnosti

p, q, r vzporedne $\iff p, q, r$ se sekajo v ∞

Drugi Desarguesov izrek za afino ravnino:

Naj bodo p, q, r različne premice, ki se sekajo v skupni točki $O \in \mathcal{A}$. Naj bodo $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$ in $R, R' \in r$ take točke, da je $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$. Tedaj je $PR \parallel P'R'$.

Dokaz: Če gre $\mathcal{A} \subseteq V$ skozi koordinatno izhodišče, ga transliramo za vektor, ki ni v $\mathcal{A}$.

Naj bo $\ell : A(\mathcal{A}) \to P(V)$ vložitev afine v projektivno ravnino.

Ker ℓ ohranja inkluzije, točka $\ell(O)$ leži na projektivnih premicah $\ell(p), \ell(q), \ell(r)$. Ker $PQ \parallel P'Q'$, se premici $\ell(P)\ell(Q)$ in $\ell(P')\ell(Q')$ sekata v ∞. Enako se premici $\ell(Q)\ell(R)$ in $\ell(Q')\ell(R')$ sekata v ∞.

Ker $\ell(P), \ell(P') \in \ell(p)$, $\ell(Q), \ell(Q') \in \ell(q)$, $\ell(R), \ell(R') \in \ell(r)$ in $\ell(O) \in \ell(p) \cap \ell(q) \cap \ell(r)$, sta trikotnika $\ell(P)\ell(Q)\ell(R)$ in $\ell(P')\ell(Q')\ell(R')$ v perspektivni legi.

Po Desarguesovem izreku za projektivno ravnino so presečišča $\ell(P)\ell(Q) \cap \ell(P')\ell(Q')$, $\ell(Q)\ell(R) \cap \ell(Q')\ell(R')$ in $\ell(P)\ell(R) \cap \ell(P')\ell(R')$ na isti premici.

Ker sta dve presečišči v neskončnosti, je tudi tretje točka v neskončnosti. Torej $PR \parallel P'R'$.

Prvi Desarguesov izrek za afino ravnino:

Naj bodo p, q, r različne vzporedne premice v afini ravnini $\mathcal{A}$. Naj bodo $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$ in $R, R' \in r$ take točke, da je $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$. Tedaj je $PR \parallel P'R'$.

Dokaz: Naj bo $\ell : A(\mathcal{A}) \to P(V)$ vložitev kot v prejšnjem primeru.

Ker $p \parallel q \parallel r$, se $\ell(p)$, $\ell(q)$ in $\ell(r)$ sekajo v skupni točki v neskončnosti.

Ostalo isto kot prej.

KOLINEACIJE IN PROJEKTIVNOSTI

Definicija: Naj bosta V, V' vektorska prostora nad $\mathbb{F}$, $\dim V = \dim V' \geq 3$. Bijektivna preslikava $\vartheta : PV \to PV'$ je kolineacija, če poljubne kolinearne točke preslika v kolinearne.

Primer: $A : V \to V'$ bijektivna semilinearna preslikava

$$\vartheta_A : PV \to PV'$$
$$X \mapsto AX$$

X, Y, Z kolinearne

$\Rightarrow Z \leq X \oplus Y$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ \vartheta_A(Z)}}{AZ} \leq A(X \oplus Y) = AX \oplus AY$$

$$\vartheta_A(Z) \leq \vartheta_A(X) \oplus \vartheta_A(Y)$$

$\Rightarrow \vartheta_A(X), \vartheta_A(Y), \vartheta_A(Z)$ kolinearne

$\Rightarrow \vartheta_A$ kolineacija

Lema: Naj bo $\vartheta: PV \to PV'$ kolineacija in $L_1, \ldots, L_k \in PV$. Če je $L < L_1 + \ldots + L_k$, je $\vartheta(L) < \vartheta(L_1) + \ldots + \vartheta(L_k)$.

Dokaz: Indukcija na k...

$k = 2$:

$$L < L_1 + L_2$$

$\Rightarrow L, L_1, L_2$ kolinearne

$\Rightarrow \vartheta(L), \vartheta(L_1), \vartheta(L_2)$ kolinearne

$$\Rightarrow \vartheta(L) < \vartheta(L_1) + \vartheta(L_2)$$

$k \to k+1$:

$$L < L_1 + \ldots + L_k + L_{k+1}$$

$$v \in L \setminus \{0\} \Rightarrow v = (v_1 + \ldots + v_k) + v_{k+1}$$

$$\Rightarrow v \in \mathrm{Lin}\{v_1 + \ldots + v_k\} + \mathrm{Lin}\{v_{k+1}\}$$

$$\Rightarrow \vartheta(L) < \vartheta(\mathrm{Lin}\{v_1 + \ldots + v_k\}) + \vartheta(L_{k+1})$$

$$\overset{\text{I.P.}}{<} \vartheta(L_1) + \ldots + \vartheta(L_k) + \vartheta(L_{k+1})$$

Kolineacijo $\vartheta : PV \to PV'$ lahko razširimo do preslikave $\hat{\vartheta} : P(V) \to P(V')$ s predpisom $\hat{\vartheta}(L_1 + \ldots + L_k) := \vartheta(L_1) + \ldots + \vartheta(L_k)$.

Preslikava $\hat{\vartheta}$ je bijekcija, ki ohranja inkluzijo.

Po prejšnji lemi je $\hat{\vartheta}$ dobro definirana.

Trditev: Naj bo $\vartheta : PV \to PV'$ kolineacija in $X, Y \leq V$.

1) $\hat{\vartheta}(X+Y) = \hat{\vartheta}(X) + \hat{\vartheta}(Y)$

2) $\hat{\vartheta}(X \cap Y) = \hat{\vartheta}(X) \cap \hat{\vartheta}(Y)$

Dokaz: 1) $X = L_1 + \ldots + L_k$
$Y = M_1 + \ldots + M_l$

$\Rightarrow X+Y = L_1 + \ldots + L_k + M_1 + \ldots + M_l$

$\Rightarrow \hat{\vartheta}(X+Y) = \hat{\vartheta}(X) + \hat{\vartheta}(Y)$

2) $\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)$

$\dim \hat{\vartheta}(X+Y) \overset{(1)}{=} \dim(\hat{\vartheta}(X) + \hat{\vartheta}(Y)) =$

$= \dim \hat{\vartheta}(X) + \dim \hat{\vartheta}(Y) - \dim(\hat{\vartheta}(X) \cap \vartheta(Y))$

$\Rightarrow \dim(\hat{\vartheta}(X) \cap \hat{\vartheta}(Y)) = \dim(X \cap Y) = \dim \hat{\vartheta}(X \cap Y)$

$X \cap Y \leq X, Y$

$\Rightarrow \hat{\vartheta}(X \cap Y) \leq \hat{\vartheta}(X) \cap \hat{\vartheta}(Y)$

Osnovni izrek projektivne geometrije:

Naj bosta V, V' vektorska prostora nad $\mathbb{F}$, $\dim V = \dim V' \geq 3$. Za vsako kolineacijo $\vartheta : PV \to PV'$ obstaja obrnljiva semilinearna preslikava $A : V \to V'$, da je $\vartheta(L) = AL$ za vse $L \in PV$.

Dokaz: Izberimo $W \leq V$, $\dim W = \dim V - 1$.

$W' := \tilde{\vartheta}(W)$

$a \in V \setminus W$
$\mathcal{A} := a + W$

$a' \in \vartheta(\mathrm{Lin}\{a\}) \setminus \{0\}$
$\mathcal{A}' := a' + W'$

$\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$
$x \mapsto \vartheta(\mathrm{Lin}\{x\}) \cap \mathcal{A}'$

Velja: $\mathrm{Lin}\,\gamma(x) = \vartheta(\mathrm{Lin}\{x\})$ *

γ je surjektivna

$y \in \mathcal{A}' \Rightarrow \mathrm{Lin}\{y\} \cap \mathcal{A}' = y$

ϑ surjektivna $\Rightarrow \exists x \in \mathcal{A} : \vartheta(\mathrm{Lin}\{x\}) = \mathrm{Lin}\{y\}$

$\Rightarrow \gamma(x) = \mathrm{Lin}\{y\} \cap \mathcal{A}' = y$

γ je injektivna

$\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$ / Lin
$\vartheta(\mathrm{Lin}\{x_1\}) = \vartheta(\mathrm{Lin}\{x_2\})$ / ϑ injektivna
$\mathrm{Lin}\{x_1\} = \mathrm{Lin}\{x_2\}$ / $\cap \mathcal{A}$
$x_1 = x_2$

γ je afina transformacija

$X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{A}$ kolinearne

$\Rightarrow X_1, X_2, X_3 \in p$ za neko premico p

$\Rightarrow \gamma(X_i) = \tilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{X_i\}) \cap \mathcal{A}' \subseteq \tilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{p\}) \cap \mathcal{A}'$

Ker je $\tilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{p\}) \cap \mathcal{A}'$ afina premica, so $\gamma(X_1)$, $\gamma(X_2)$, $\gamma(X_3)$ kolinearne.

γ ohranja vzporednost

Naj bosta $\ell: \mathcal{A} \to PV$, $\ell': \mathcal{A}' \to PV'$ vložitvi afine geometrije v projektivno.

$$
\begin{aligned}
p_1 \parallel p_2 &\Leftrightarrow \ell(p_1) \cap W = \ell(p_2) \cap W \qquad / \vartheta \\
&\Leftrightarrow \tilde{\vartheta}(\ell(p_1) \cap W) = \tilde{\vartheta}(\ell(p_2) \cap W) \\
&\qquad\quad \tilde{\vartheta}(\ell(p_1)) \cap W' \qquad \tilde{\vartheta}(\ell(p_2)) \cap W' \\
&\qquad\quad \mathrm{Lin}\{\gamma(p_1)\} \cap W' \qquad \mathrm{Lin}\{\gamma(p_2)\} \cap W' \\
&\Leftrightarrow \gamma(p_1) \parallel \gamma(p_2)
\end{aligned}
$$

Po osnovnem izreku afine geometrije obstaja obrnljiva semilinearna preslikava $B: W \to W'$ in $c \in \mathcal{A}'$, da je $\gamma(x) = B(x-a)+c$.

Naj bo τ avtomorfizem, ki pripada preslikavi B.

$A: V \to V'$

$w + \lambda a \mapsto B(w) + \tau(\lambda) \cdot c$

Po konstrukciji je A semilinearna z avtomorfizmom τ.

Ker A presliba bazo v bazo, je A bijektivna.

$\vartheta(L) = AL$

i) $L \not\leq W$:

BŠS: $x = w + 1 \cdot a \in L$

$\Rightarrow x \in \mathcal{A}$

$\vartheta(\mathrm{Lin}\{x\}) \cap \mathcal{A}' = \gamma(x) = B(x-a) + c =$

$= A(x-a) + Aa = Ax$

$\Rightarrow \vartheta(\mathrm{Lin}\{x\}) = \mathrm{Lin}\{Ax\} = A(\mathrm{Lin}\{x\})$

ii) $L \leq W$:

$x \in L$

$\vartheta(\mathrm{Lin}\{x\}) = \tilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{x+a, a\} \cap W) =$

$= \tilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{x+a\} \oplus \mathrm{Lin}\{a\}) \cap \tilde{\vartheta}(W) =$

$= (\vartheta(\mathrm{Lin}\{x+a\}) \oplus \vartheta(\mathrm{Lin}\{a\})) \cap W' \overset{(i)}{=}$

$= (\mathrm{Lin}\{A(x+a)\} \oplus \mathrm{Lin}\{Ax\}) \cap W' =$

$= \mathrm{Lin}\{Ax + Aa, Aa\} \cap W' =$

$= \mathrm{Lin}\{Ax\}$

Definicija: Za $\vartheta = \vartheta_A$ rečemo, da je kolineacija ϑ **porojena** s semilinearno preslikavo A.

Če ϑ_A pripada linearni preslikavi A, ji rečemo **projektivnost**.

Opomba: Za $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p\}$ je vsaka kolineacija projektivnost.

Trditev: Množica vseh kolineacij $PV \to PV$ je grupa za kompozitum. Podmnožica vseh projektivnosti $PV \to PV$ je grupa edinka.

Definicija: $GL(V)$ ... grupa vseh obrnljivih linearnih preslikav $V \to V$
$\Gamma L(V)$ ... grupa vseh obrnljivih semilinearnih preslikav $V \to V$

$PGL(V)$ ... grupa vseh projektivnosti $PV \to PV$
$P\Gamma L(V)$ ... grupa vseh kolineacij $PV \to PV$

$\mathbb{F}^{-1} := \mathbb{F} \setminus \{0\}$ ... grupa za množenje
$\sim$ grupa vseh skalarnih matrik

Izrek: $PGL(V) \cong GL(V)/\mathbb{F}^{-1}$

$P\Gamma L(V) \cong \Gamma L(V)/\mathbb{F}^{-1}$

Dokaz: (2) $\varphi : \Gamma L(V) \to P\Gamma L(V)$
$A \mapsto \vartheta_A$

Ker je $\vartheta_{AB}(L) = A \cdot B(L) = A(B(L)) = \vartheta_A \circ \vartheta_B(L)$, je φ homomorfizem grup.

Po osnovnem izreku projektivne geometrije je $\mathcal{G}$ surjektivna.

Dokažimo, da je $\ker \mathcal{G} = \mathbb{F}^{-1}$.

$(\supseteq)$: $\lambda \in \mathbb{F}^{-1} \Rightarrow \vartheta_{\lambda I}(L) = L \Rightarrow \vartheta_{\lambda I} = id_{PV} \Rightarrow \lambda I \in \ker \mathcal{G}$

$(\subseteq)$: $A \in \ker \mathcal{G} \Rightarrow A(\mathrm{Lin}\{x\}) = \mathrm{Lin}\{x\} \Rightarrow \exists \lambda_x \in \mathbb{F}^{-1}: Ax = \lambda_x x$

- x, y linearno neodvisna:

$$A(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$$
$$\parallel$$
$$Ax + Ay = \lambda_x x + \lambda_y y$$

$$\Rightarrow \lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$$

- x, y linearno odvisna:

Izberemo z, ki je linearno neodvisen od x in y.

$$\Rightarrow \lambda_x = \lambda_z = \lambda_y$$

$$\Rightarrow Ax = \lambda x \quad \forall x \in V$$

$$\Rightarrow A = \lambda I \in \mathbb{F}^{-1}$$

Definicija: Naj bo $\dim V = n$. Množico projektivnih točk $\{L_0, \dots, L_n\}$ imenujemo *projektivno ogrodje* za PV, če nobena n-terica točk ne leži na skupni hiperravnini.

Primer: $\dim V = 2$ (PV projektivna premica):

$\{L_0, L_1, L_2\}$ je projektivno ogrodje

$\Leftrightarrow L_0, L_1, L_2$ so različne točke

Hiperravnina je točka.

Primer: $\dim V = 3$ (PV projektivna ravnina):

$\{L_0, L_1, L_2, L_3\}$ je projektivno ogrodje

$\Leftrightarrow$ Nobena trojica točk ni kolinearna

Trditev: Naj bo $\{L_0, \dots, L_n\}$ projektivno ogrodje za PV in $\vartheta: PV \to PV$ taka projektivnost, da je $\vartheta(L_i) = L_i$ za vse $i = 0, \dots, n$. Tedaj je ϑ identiteta.

Dokaz: Izberimo $v_i \in L_i \setminus \{0\}$.

Naj bo A linearna, da je $\vartheta = \vartheta_A$.

$\Rightarrow Av_i = \lambda_i v_i \ \forall i$

Ker nobena n-terica projektivnih točk ne leži na hiperravnini, je poljubna n-terica vektorjev v_i baza za V.

$\Rightarrow v_0 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ za neke $\beta_i \in \mathbb{C}$

Če je $\beta_i = 0$, vektorji $\{v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ niso baza.

$$\lambda_0 v_0 = \lambda_0 \beta_1 v_1 + \dots + \lambda_0 \beta_n v_n$$
$$\shortparallel$$
$$A(v_0) = A(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) = \beta_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \beta_n \lambda_n v_n$$

$\Rightarrow \lambda_0 \beta_i = \beta_i \lambda_i$

$\Rightarrow \lambda_i = \lambda_0$

$\Rightarrow A = \lambda_0 I$

$\Rightarrow \vartheta = id_{PV}$

Posledica: Naj bo $\{L_0, L_n\}$ projektivno ogrodje za PV in $\{M_0, \dots, M_n\}$ projektivno ogrodje za PV'. Tedaj obstaja natanko ena projektivnost $\vartheta : PV \to PV'$, da je $\vartheta(L_i) = M_i$.

Dokaz: Izberimo $v_i' \in L_i \setminus \{0\}$.

$\Rightarrow v_0' = \alpha_1 v_1' + \dots + \alpha_n v_n' \;,\; \alpha_i \neq 0$

BŠS: $\alpha_i = 1$

Izberimo $u_i' \in M_i \setminus \{0\}$, da je $u_0 = u_1 + \dots + u_n$.

Definiramo linearno preslikavo $A : V \to V'$, $Av_i' = u_i$ za $i = 1, \dots, n$.

Tedaj je $\vartheta_A(L_i) = \vartheta_A(\mathrm{Lin}\{v_i'\}) = \mathrm{Lin}\{Av_i'\} = M_i$ za $i = 1, \dots, n$ in $\vartheta_A(L_0) = \vartheta_A(\mathrm{Lin}\{v_1' + \dots + v_n'\}) =$
$= \mathrm{Lin}\{A(v_1' + \dots + v_n')\} = \mathrm{Lin}\{(u_1 + \dots + u_n)\} = M_0$.

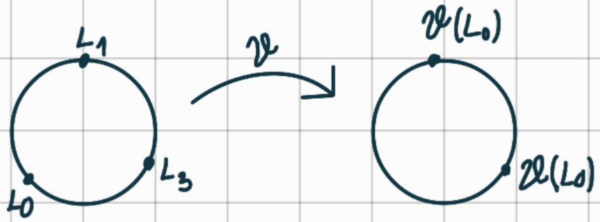
Denimo, da je $\tilde{\vartheta} : PV \to PV'$ projektivnost, za katero velja $\tilde{\vartheta}(L_i) = M_i$ za vse i. Tedaj je $\vartheta_A^{-1} \circ \tilde{\vartheta} : PV \to PV$ projektivnost, za katero velja $\vartheta_A^{-1} \circ \tilde{\vartheta}(L_i) = L_i$ za vse i.

Po trditvi je $\nu_A^{-1} \circ \tilde{\nu} = id_{PV}$ oz. $\tilde{\nu} = \nu_A$.

Primer: $V = \mathbb{R}^2$

$\{L_0, L_1, L_2\}$ projektivno ogrodje

$\nu : P\mathbb{R}^2 \to P\mathbb{R}^2$



Slika $\nu(L_2)$ nam pove, ali ν ohrani ali obrne orientacijo.

PERSPEKTIVNOSTI

Definicija: Naj bosta $U, U' < V$, $\dim U = \dim U'$. Naj bo $T < V$, da je $U \oplus T = V = U' \oplus T$.

Preslikavo $\theta : PU \to PU'$, definirano s predpisom $\theta(X) = (X \oplus T) \cap U'$, imenujemo perspektivnost s centrom T.

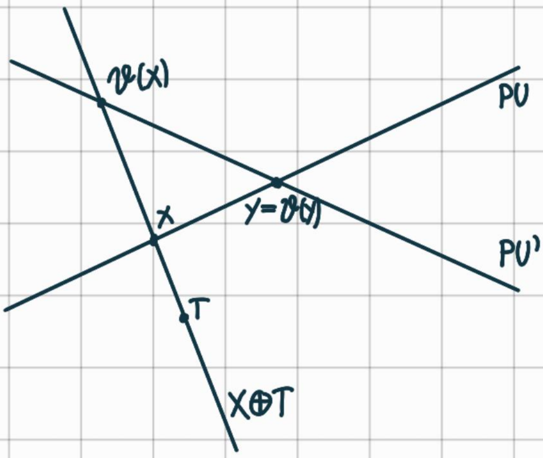
Preslikava je dobro definirana, saj velja:

$$\dim((X \oplus T) \cap U') = \dim(X \oplus T) + \dim U' - \dim(X \oplus T + U') =$$

$$= \dim X + (\dim T + \dim U') - \dim V = 1$$

Primer: $V = \mathbb{R}^3$

$\dim U = \dim U' = 2 \Rightarrow \dim T = 1$



Lema: Za $X, Y, Z \leq V$, $Z \leq X$ velja:

$$X \cap (Y+Z) = X \cap Y + \overset{X\cap Z}{\overset{\|}{Z}}.$$

Dokaz:

$(\supseteq)$ $X \cap Y \leq X,\ Y+Z$

$Z \leq X,\ Y+Z$

$\Rightarrow X \cap Y + Z \subseteq X \cap (Y+Z)$

$(\subseteq)$ $x \in X \cap (Y+Z)$

$\Rightarrow x = y + z \in Y+Z$

$\Rightarrow y = x - z \in X$

$\Rightarrow y \in X \cap Y$

$\Rightarrow x = y + z \in (X \cap Y) + Z$

Lema: Naj bo $\theta: PU \longrightarrow PU'$ perspektivnost s centrom T. Potem je njen inverz $\theta^{-1}: PU' \longrightarrow PU$ perspektivnost s centrom T.

Dokaz: Naj bo $\eta: PU' \to PU$ perspektivnost s centrom T:

$$\theta(X) \oplus T = (X \oplus T \cap U') \oplus T = (X \oplus T) \cap (U' \oplus T) =$$

$$= X \oplus T \cap V = X \oplus T$$

$$\eta(\theta(X)) = (\theta(X) \oplus T) \cap U = (X \oplus T) \cap U = X \oplus (T \cap U) = X$$

Enako dobimo $\theta(y(x)) = X$.

Izrek: Vsaka perspektivnost je projektivnost.

Dokaz: Naj bo $\theta : PU \to PU'$ perspektivnost s centrom T.

Izberimo bazo $\{u_1, \dots, u_k\}$ za U in označimo $L_i = \mathrm{Lin}\{u_i\}$, $i = 1, \dots, k$. Označimo $L_i' = \theta(L_i) = L_i \oplus T \cap U'$, $i = 1, \dots, k$.

Izberimo neničelne vektorje $u_i' \in L_i'$.

$u_i' = \alpha_i u_i + t_i \in L_i \oplus T$

Če je $\alpha_i = 0$, je $u_i' = U' \cap T$, kar ni možno.

BŠS: $\forall i : \alpha_i = 1$

Definiramo linearno preslikavo $A : U \to U'$, $Au_i = u_i'$.

Za $L = \mathrm{Lin}\{u\} \in PU$ je $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (u_i' - t_i) =$

$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i' - t = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A u_i - t = A\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) - t = Au - t$

$\Rightarrow \theta L = L \oplus T \cap U' = \mathrm{Lin}\{u\} \oplus T \cap U' = \mathrm{Lin}\{Au + t\} \cap U' =$

$= \mathrm{Lin}\{Au\} \oplus (T \cap U') = \mathrm{Lin}\{Au\} = AL = \vartheta_A(L)$

$\Rightarrow \theta = \vartheta_A$ je projektivnost.

HOMOGENE KOORDINATE

Na množici $\mathbb{F}^n \setminus \{0\}$ definiramo ekvivalenčno relacijo:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \sim (\beta_1, \dots, \beta_n) :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\} : \forall i : \beta_i = \lambda \cdot \alpha_i$$

Ekvivalenčne razrede n-terice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ označimo z $[\alpha_1 : \dots : \alpha_n]$.

Izberimo poljubno ogrodje $\{L_0, \dots, L_n\}$ za PV. Za vsak i izberemo $u_i \in L_i \setminus \{0\}$, da je $u_0 = u_1 + \dots + u_n$.

Vsaki projektivni točki $L = \text{Lin}\{u\} = \text{Lin}\{\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\}$ priredimo homogene homogene koordinate $[\alpha_1 : \dots : \alpha_n]$.

Trditev: $\text{Lin}\{\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\} = \text{Lin}\{\sum_{i=1}^n \beta_i u_i\}$

$$\Rightarrow [\alpha_1 : \dots : \alpha_n] = [\beta_1 : \dots : \beta_n]$$

Dokaz: $\exists \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\} : \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i$

$$\Rightarrow \beta_i = \lambda \alpha_i \quad \forall i$$

Torej so homogene koordinate dobro definirane.

Trditev: Homogene koordinate so odvisne le od izbire projektivnega ogrodja in ne od izbire baznih vektorjev u_i.

Dokaz: Naj bodo $u_i' \in L_i \setminus \{0\}$ in $u_0' = u_1' + \dots + u_n'$.

Za vsak $i = 0, \dots, n$ obstaja $\lambda_i \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, da je $u_i = \lambda_i u_i'$.

$$\Rightarrow u_0 = \lambda_0 u_0'$$

$\Rightarrow u_1 + \ldots + u_n = \lambda_0(u_1' + \ldots + u_n')$

$\Rightarrow \lambda_1 u_1' + \ldots + \lambda_n u_n' = \lambda_0 u_1' + \ldots + \lambda_0 u_n'$

$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda_0$

Zapišimo homogene koordinate za L glede na $\{u_1, \ldots, u_n\}$ in glede na $\{u_1', \ldots, u_n'\}$.

$u \in L \setminus \{0\}$:

$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \Rightarrow L = [\alpha_1 : \ldots : \alpha_n]$

$u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i' \Rightarrow L = [\beta_1 : \ldots : \beta_n]$

Ker je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_0 u_i'$, je $\alpha_i \lambda_0 = \beta_i$ za vse i.

$\Rightarrow [\alpha_1 : \ldots : \alpha_n] = [\beta_1 : \ldots : \beta_n]$

Naj bo p projektivna premica in $\{C, A, B\}$ projektivno ogrodje za p.

Izberimo $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, da je $c = a + b$.

Za $D \in p$, $d \in D \setminus \{0\}$, zapišemo $d = \alpha a + \beta b$ in zato $D = [\alpha : \beta]$.

Posebej velja $A = [1:0]$, $B = [0:1]$, $C = [1:1]$.

Za $D \neq A$ je $\beta \neq 0$ in zato $D = [\alpha : \beta] = [\beta^{-1}\alpha : 1]$.

Definicija: Dvorazmerje točk A, B, C, D na projektivni premici p je število $\lambda = D(A,B,C,D)$, da je $D = [\lambda : 1]$ v projektivnem ogrodju $\{C, A, B\}$.

Trditev: i) $\mathcal{D}(B,A,C,D) = \mathcal{D}(A,B,C,D)^{-1} = \mathcal{D}(A,B,D,C)$

ii) $\mathcal{D}(A,C,B,D) = 1 - \mathcal{D}(A,B,C,D) = \mathcal{D}(D,B,C,A)$

Dokaz: $\lambda := \mathcal{D}(A,B,C,D)$

$c = a + b \quad (*)$
$d = \lambda a + b \quad (**)$

$\mathcal{D}(B,A,C,D) = \lambda^{-1}$

Iščemo a', b', c', d', da velja:

$c' = b' + a'$
$d' = \mu b' + a'$

$(*)\ c = a + b \Rightarrow c' = c,\ a' = a,\ b' = b$

$(**)\ d = \lambda a + b = \lambda a' + b' = b' + \lambda a' \quad / \cdot \lambda^{-1}$

$$\underbrace{\lambda^{-1} d}_{= d'} = \lambda^{-1} b' + a'$$

$\Rightarrow \mu = \mathcal{D}(B,A,C,D) = \lambda^{-1}$

$\mathcal{D}(D,B,C,A) = 1 - \lambda$

Iščemo a', b', c', d', da velja:

$$c' = d' + b'$$
$$a' = \mu d' + b'$$

$$d = \lambda a + b = \lambda(c-b) + b = \lambda c + (1-\lambda) b$$

$$\lambda c = d + (\lambda - 1) b$$

$$c' = \lambda c, \quad d' = d, \quad b' = (\lambda-1) b$$

$$\lambda a = d - b = d' - (\lambda-1)^{-1} b' \quad / \cdot (-(\lambda-1))$$

$$-\lambda(\lambda-1) a = -(\lambda-1) d' + b'$$

$$\Rightarrow \mu = D(D,B,C,A) = 1-\lambda$$

Opomba: $D(B,A,D,C) = D(A,B,C,D) = D(D,C,B,A)$

Izrek: Vsaka projektivnost ohranja dvorazmerje.

Dokaz: Naj bo $\vartheta_M : p \to p'$ projektivnost med projektivnima premicama.

$$A, B, C, D \in p$$

$$D(A,B,C,D) = \lambda$$

$$\begin{aligned} c &= a + b \\ d &= \lambda a + b \end{aligned} \quad \xrightarrow{M} \quad \begin{aligned} Mc &= M(a+b) = Ma + Mb \\ Md &= M(\lambda a + b) = \lambda Ma + Mb \end{aligned}$$

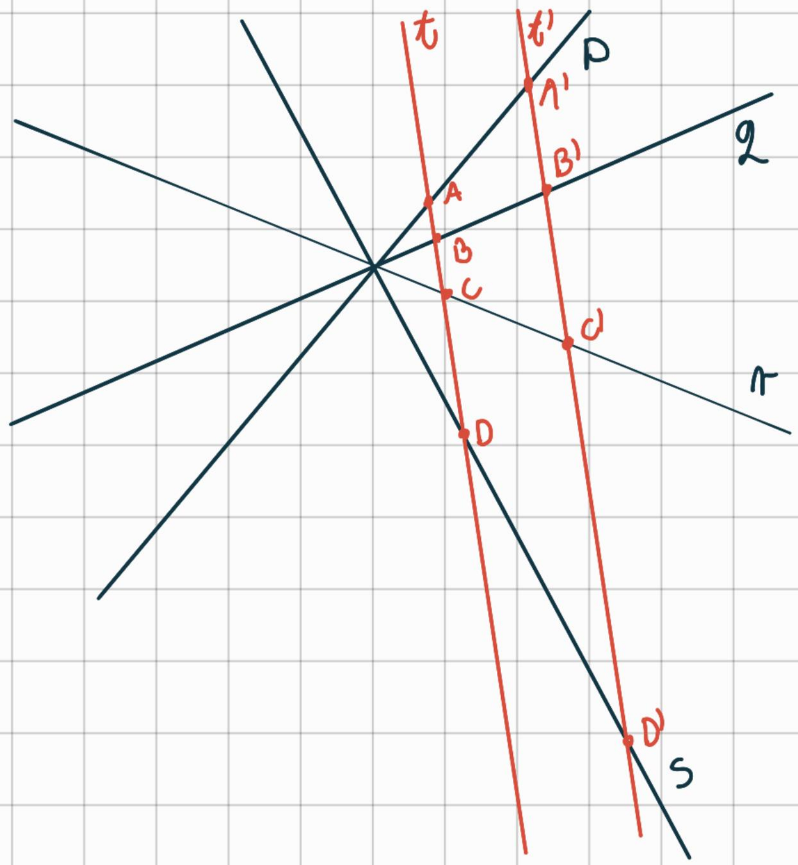
$$a \in A \Rightarrow Ma \in MA = \vartheta_M(A)$$

$$\Rightarrow \lambda = D(\vartheta_M(A), \vartheta_M(B), \vartheta_M(C), \vartheta_M(D))$$

Definicija: Naj bodo p, q, r, s različne projektivne premice v projektivni ravnini, ki gredo skozi skupno točko O. Izberimo poljubno premico t, ki ne gre skozi točko O.

Označimo $A = p \cap t$, $B = q \cap t$, $C = r \cap t$, $D = s \cap t$.

Dvorazmerje šopa premic je $\mathcal{D}(p,q,r,s) = \mathcal{D}(A,B,C,D)$.



Opomba: Definicija je neodvisna od izbire premice t:

Če je t' še ena premica, ki ne gre skozi točko O, obstaja perspektivnost $\vartheta: t \to t'$ s centrom O, ki preslika preseke A, B, C, D v preseke s t'.

Po izreku je $\mathcal{D}(A', B', C', D') = \mathcal{D}(A,B,C,D)$.

Zdaj predpostavimo še $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ $\quad (2 \neq 0)$.

Definicija: Točke A, B, C, D na projektivni premici tvorijo **harmonično četverko**, če je $\mathcal{D}(A,B,C,D) = -1$.

Izrek: Naj bodo A, B, C, D različne točke na projektivni premici p. Naj bo p' afina premica, vložena v p tako, da je C točka v neskončnosti.

Točke A, B, C, D so harmonična četverka natanko tedaj, ko je D razpolovišče daljice AB v p'.

Opomba: Kako izberemo projektivno ogrodje, da je C v neskončnosti?

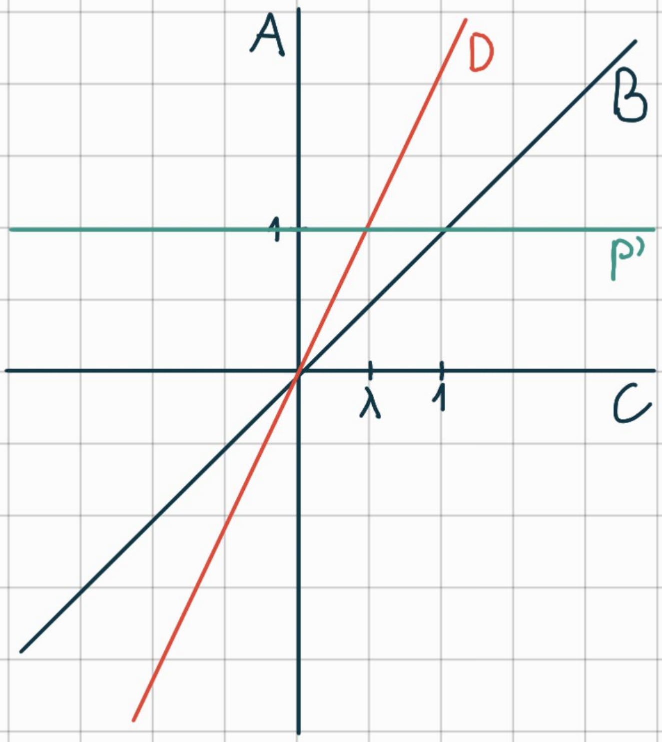
Zadnja homogena koordinata točke C mora biti 0.

$\{\ldots, C, \ldots\}$

$\Rightarrow C = [1:0]$

Dokaz: Naj bo $\{B, C, A\}$ projektivno ogrodje.

$\Rightarrow C = [1:0],\ A = [0:1],\ B = [1:1]$



$D = [\lambda : 1]$ bo razpolovišče daljice AB v p'

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$b = c + a$
$d = \lambda c + a$

$\Rightarrow \lambda = D(C, A, B, D)$

$D(A, B, C, D) = 1 - D(A, C, B, D) = 1 - \lambda^{-1}$

A, B, C, D je harmonična četverka

$\Leftrightarrow 1 - \lambda^{-1} = -1 \Leftrightarrow \lambda = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Konstrukcija harmonične četverke:

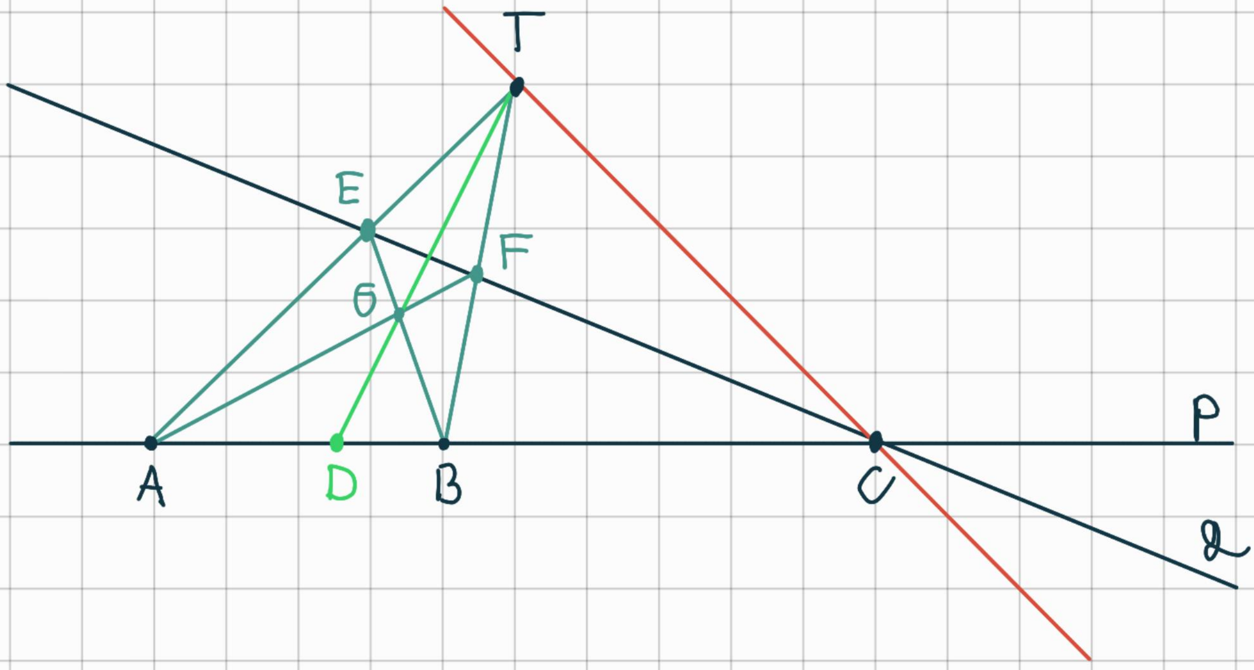
Naj bodo A, B, C različne točke na projektivni premici p v projektivni ravnini.

Naj bo q premica, ki gre skozi C in ne gre skozi A in B, in naj bo T točka, ki ne leži na zgornjih premicah.

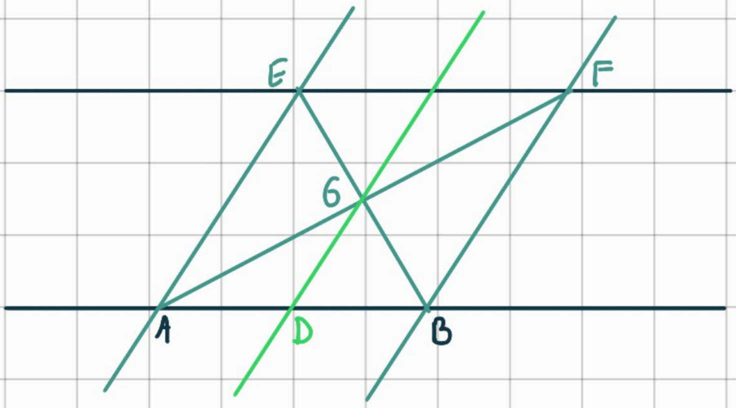
Označimo $\overline{TA} \cap q = E$, $\overline{TB} \cap q = F$, $\overline{EB} \cap \overline{FA} = G$ in $D = \overline{TG} \cap \overline{AB}$.

Tedaj je A, B, C, D harmonična četverka.

Dokaz:



Narišimo skico, da bo premica $\overline{CT}$ v neskončnosti.



V paralelogramu se diagonali razpolovijata, zato je D razpolovišče daljice $\overline{AB}$ v afini premici $\overline{AB}\setminus\{C\}$.

Po izreku je A,B,C,D harmonična četverka.

Trditev: Projektivnost $\vartheta : p \to p$ na projektivni premici p, ki ni identiteta, je involucija natanko tedaj, ko obstajata različni točki $A, B \in p$, da je $\vartheta(A) = B$ in $\vartheta(B) = A$.

Dokaz: $(\Rightarrow)$ $\vartheta^2 = id$, $\vartheta \neq id$

$\exists A \in p : \vartheta(A) =: B \neq A$

$\Rightarrow \vartheta(B) = \vartheta^2(A) = A$

$(\Leftarrow)$ Naj bo $C \in p \setminus \{A, B\}$ poljubna.

Označimo $D = \vartheta(C)$ in $E = \vartheta(D)$.

Radi bi pokazali, da je $E = C$.

$$\mathcal{D}(A,B,C,D) = \mathcal{D}(\vartheta(A), \vartheta(B), \vartheta(C), \vartheta(D)) =$$

$$= \mathcal{D}(B, A, D, E) = \mathcal{D}(A,B,E,D)$$

$$\Rightarrow C = E$$

STOŽNICE

Naj bo $V = \mathbb{O}^n$ vektorski prostor.

Če je $p \in \mathbb{O}[x_1, \dots, x_n]$ polinom, množico ničel $\{(x_1,\dots,x_n) \in V;\ p(x_1,\dots,x_n) = 0\}$ imenujemo algebraična množica.

Če je $n=2$ in p polinom stopnje 2, jo imenujemo stožnica.

Polinom p je homogen, če obstaja $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da je $p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d p(x_1, \dots, x_n)$.

Primer: $d = 0$

$$\Rightarrow p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = p(x_1, \dots, x_n) \quad \forall \lambda$$

$$\Rightarrow p(x_1, \dots, x_n) = p(0, \dots, 0) \qquad (\lambda = 0)$$

Primer: $d = 1$

$$\Rightarrow p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda\, p(x_1, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow p(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

Primer: $d=2$

$$\Rightarrow p(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j$$

Homogen polinom ne definira preslikave $PV \to \mathbb{O}$, toda vseeno lahko definiramo množico ničel homogenega polinoma v PV.

Množico ničel $\{[x_1:\dots:x_n] \in PV \,;\, p(x_1,\dots,x_n)=0\}$ imenujemo projektivna algebraična množica.

Če je $n=3$ in p homogen polinom stopnje 2, jo imenujemo stožnica.

Torej je stožnica podana s kvadratno formo (homogenim polinomom stopnje 2):

$$q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$$

$$M = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow q(v) = v^T M v$$

Preslikava $\phi: V \times V \to \mathbb{O}$ je simetrična bilinearna forma na V, če je linearna v obeh faktorjih in je $\phi(x,y) = \phi(y,x)$ za vse $x,y \in V$.

Naj bo $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza vektorskega prostora V ($n=3$) in označimo $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$. Tedaj je $M = [a_{ij}]$ simetrična matrika in $q(v) = v^T M v$ kvadratna forma.

Če je $v \in V$ zapisan kot $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, potem je
$\Phi(v,v) = \Phi(\sum x_i e_i, \sum x_j e_j) = \sum x_i x_j a_{ij} = q(v)$.

Kako iz kvadratne forme q dobimo Φ?

$$\Phi(u+v, u+v) = \Phi(u,u) + 2\Phi(u,v) + \Phi(v,v)$$

$$q(u+v) = q(u) + q(v) + 2\Phi(u,v)$$

$$\Phi(u,v) = 2^{-1}(q(u+v) - q(u) - q(v)) \qquad (\text{char}(\mathbb{O}) \neq 2)$$

Torej lahko stožnico podamo na 3 načine:

- S kvadratno formo
- S simetrično matriko
- S simetrično bilinearno formo

Kvadratni formi $q_1, q_2 : V \to \mathbb{O}$ s pripadajočima matrikama M_1 in M_2 sta ekvivalentni, če obstaja obrnljiva matrika S, da je $M_2 = S M_1 S^T$.

Stožnici $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ sta ekvivalentni, če obstaja projektivnost $\vartheta : PV \to PV$, da je $\vartheta(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$.

Trditev: Če sta q_1 in q_2 ekvivalentni kvadratni formi, sta pripadajoči stožnici $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ ekvivalentni.

Dokaz: $\mathcal{S}_i = \{ \text{Lin}\{u\} ; q_i(u) = 0 \} = \{ \text{Lin}\{u\} ; u^T M_i u = 0 \}$

Obstaja obrnljiva matrika S, da je $M_2 = S M_1 S^T$.

$\mathcal{S}_1$ ekvivalentna $\mathcal{S}_2 \iff$ Obstaja linearna preslikava A, da je $\vartheta_A(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$

$$\mathrm{Lin}\{u\} \in \mathcal{V}_A(\mathcal{Y}_1) \iff \mathcal{V}_A^{-1}(\mathrm{Lin}\{u\}) \in \mathcal{Y}_1$$

$$\mathcal{V}_A^{-1}(\mathrm{Lin}\{u\}) = \mathcal{V}_{A^{-1}}(\mathrm{Lin}\{u\}) = \mathrm{Lin}\{A^{-1}u\}$$

$$\iff (A^{-1}u)^T M_1 A^{-1} u = 0$$

$$(A^{-1}u)^T M_1 A^{-1} u = u^T (A^{-1})^T M_1 A^{-1} u$$

Za $A = (S^T)^{-1}$ dobimo:

$$\mathrm{Lin}\{u\} \in \mathcal{Y}_2 \iff u^T M_2 u = 0$$

$$\iff u^T (A^{-1})^T u = 0$$

$$\iff \mathrm{Lin}\{u\} \in \mathcal{V}_A(\mathcal{Y}_1)$$

Sylvestrov izrek:

Vsaka kvadratna forma $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je ekvivalentna neki kvadratni formi oblike $q_{r,s}(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$.

Vsaka kvadratna forma $q: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ je ekvivalentna neki kvadratni formi oblike $q_r(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2$.

Stožnica je neizrojena, če je pripadajoča matrika maksimalnega ranga.

$\mathcal{O} = \mathbb{C}$:

rang M	kvadratna forma	stožnica
3	$x^2+y^2+z^2=0$	neizrojena stožnica ⟵
2	$x^2+y^2=0$	dve premici ($x \pm iy = 0$)
1	$x^2=0$	dvojna premica ($x=0$)

$\mathbb{O} = \mathbb{R}$:

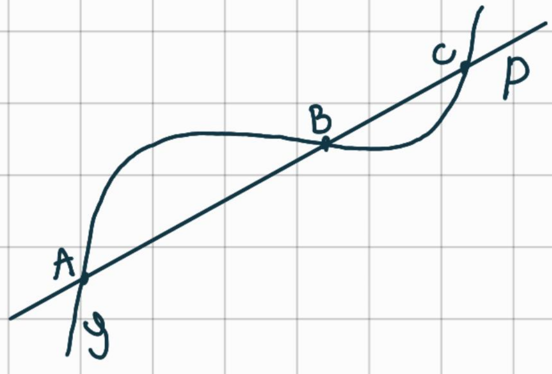
(r,s) $r>s$	kvadratna forma	stožnica
$(3,0)$	$x^2+y^2+z^2=0$	prazna množica
$(2,1)$	$x^2+y^2-z^2=0$	neizrojena stožnica ⟵
$(2,0)$	$x^2+y^2=0$	točka (z-os)
$(1,1)$	$x^2-y^2=0$	dve premici ($y=\pm x$)
$(1,0)$	$x^2=0$	dvojna premica ($x=0$)

Izrek: Presek neprazne neizrojene stožnice in projektivne premice vsebuje največ dve točki.

Če je $\mathbb{O}$ algebraično zaprt, je presek neprazen.

Dokaz: $\mathcal{S}$ ... neprazna neizrojena stožnica
p ... projektivna premica

Denimo, da $\mathcal{S} \cap p$ vsebuje točke A, B, C.



$\{C, A, B\}$ je projektivno ogrodje za p.

$\Rightarrow c = a + b$

Izberimo projektivno točko D in $d \in D$ tako, da je $\{a, b, d\}$ baza za V. Naj bo M matrika, ki pripada $\mathcal{Y}$ v bazi $\{a, b, d\}$.

$$M = \begin{bmatrix} \Phi(a,a) & \Phi(a,b) & \Phi(a,d) \\ & \vdots & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$C \in \mathcal{Y} \Rightarrow c^T M c = 0, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\| $$

$$[1\ 0\ 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\alpha$$

$$2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} M < 3$$

Naj bo O algebraično zaprt. Izberimo $A, B \in p$.

$$\Rightarrow p = A \oplus B = \operatorname{Lin}\{a, b\}$$

i) $q(B) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{Y} \Rightarrow p \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$

ii) $q(B) \neq 0 \Rightarrow \forall P \in p \setminus \{B\}$ lahko zapišemo kot $P = [1 : \lambda]$

Kot prej izberemo d, da je $\{a, b, d\}$ baza za V in M matrika za $\mathcal{Y}$ v tej bazi.

$$p' \in P \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow p'^T M p' = 0$$

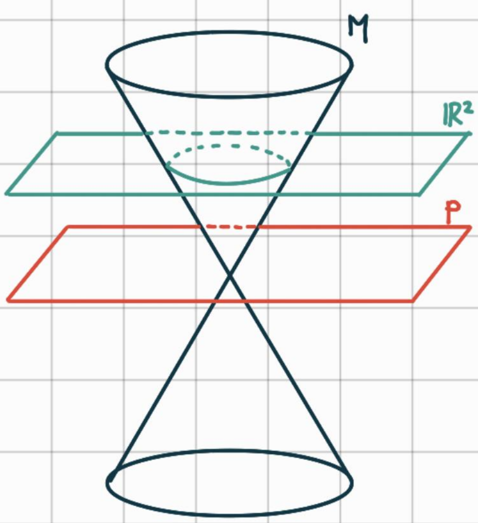
$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$m_{22}\lambda^2 + 2m_{12}\lambda + m_{11} = 0$$

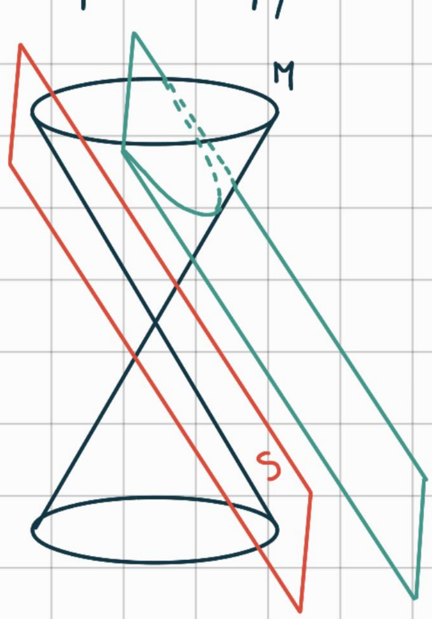
Enačba ima rešitev λ_0 in pripadajoča točka $\mathrm{Lin}\{a+\lambda_0 b\}$ leži na $\mathcal{S}$.

V realni projektivni ravnini je vsaka stožnica ekvivalentna stožnici s kvadratno formo $x^2+y^2-z^2=0$.

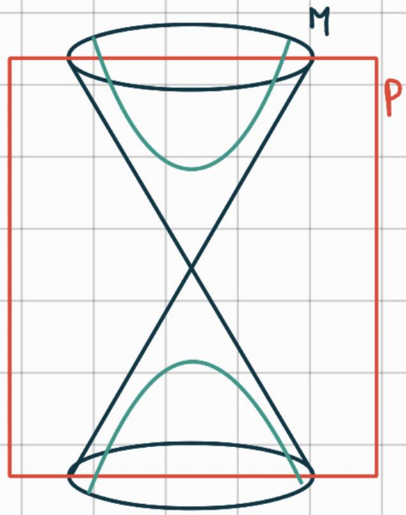
Če projektivna premica p ne seka stožnice, potem vložena ravnina $\mathbb{R}^2$ v $P\mathbb{R}^3$, ki je vzporedna s premico p, vsebuje celo stožnico. Presek je torej elipsa.



Če premica p seka stožnico v eni točki, je presek vložene ravnine, ki je vzporedna p, s stožnico $\mathcal{S}$, parabola.



Če premica p seka stožnico v dveh točkah, je presek vložene afine ravnine, ki je vzporedna p, s stožnico $\mathcal{Y}$, hiperbola.



Definicija: Tangenta na $\mathcal{Y}$ v točki $A \in \mathcal{Y}$ je projektivna premica p, da je $p \cap \mathcal{Y} = \{A\}$.

Definicija: Naj bo $A = \mathrm{Lin}\{a\} \in PV$ in $\mathcal{Y}$ stožnica v PV. Množico točk $p_A = \{\mathrm{Lin}\{b\} \,;\, \Phi(a,b) = 0\}$, imenujemo polara točke A glede na $\mathcal{Y}$.

Trditev: Če je $\mathcal{Y}$ neprazna neizrojena stožnica, je p_A projektivna premica.

Dokaz: Definirajmo $\varphi_a : V \to \mathbb{F}$, $\varphi_a(b) := \Phi(a,b)$.

Preslikava φ_a je linearni funkcional in $p_A = \ker \varphi_a$.

Ker je $\dim \ker \varphi_a = \dim V - \dim \operatorname{im} \varphi_a = 3 - 1 = 2$ (ker je Φ neizrojena), je p_A projektivna premica.

Trditev: Če je $A \in \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}$ neizrojena stožnica, je p_A tangenta na $\mathcal{Y}$ v A.

Dokaz: $A = \operatorname{Lin}\{a\} \in \mathcal{S} \Rightarrow \phi(a,a) = 0 \Rightarrow A \in p_A$

Naj bo $B \in \mathcal{S} \cap (p_A \setminus \{A\})$.

Izberimo $b \in B \setminus \{0\}$ in $c \in V$, da je $\{a,b,c\}$ baza za V.

Zapišimo M za $\mathcal{S}$ v bazi $\{a,b,c\}$.

$$M = \begin{bmatrix} \cancel{\phi(a,a)}^0 & \cancel{\phi(a,b)}^0 & \phi(a,c) \\ \cancel{\phi(b,a)}^0 & \cancel{\phi(b,b)}^0 & \phi(b,c) \\ \phi(c,a) & \phi(c,b) & \phi(c,c) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rang} M \leq 2$

$\Rightarrow \mathcal{S}$ je izrojena

$\Rightarrow \mathcal{S} \cap p_A = \{A\}$

Trditev: Za vsako $A \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ neizrojena stožnica, obstaja natanko ena tangenta na $\mathcal{S}$ v A.

Dokaz: Naj bo p neka tangenta na $\mathcal{S}$ v A.

$\Rightarrow p = \operatorname{Lin}\{a,b\}$, $a \in A$, $b \in B \in p \setminus \{A\}$

Poljubna točka $p \setminus \{A\}$ je oblike $\operatorname{Lin}\{\lambda a + b\}$.

Ker $\operatorname{Lin}\{\lambda a + b\} \notin \mathcal{S}$, je $0 \neq \phi(\lambda a + b, \lambda a + b)$.

$$0 \neq \phi(\lambda a + b, \lambda a + b) = \lambda^2 \overset{a \in \mathcal{S}}{\cancel{\phi(a,a)}} + 2\lambda\phi(a,b) + \phi(b,b) =$$

$= 2\lambda\phi(a,b) + \phi(b,b)$

$\lambda := -\phi(b,b)\cdot(2\phi(a,b))^{-1}$:

$\mathrm{Lin}\{\lambda a + b\} \in \mathcal{Y}$

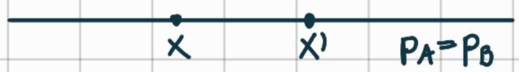
Torej je $\phi(a,b) = 0$, zato $\mathrm{Lin}\{b\} \in p_A$. Ker je tudi $A \in p_A$, je $p = p_A$.

Trditev: $A \in p_B \Leftrightarrow B \in p_A$

Dokaz: $A \in p_B \Leftrightarrow \phi(b,a) = 0 \Leftrightarrow \phi(a,b) = 0 \Leftrightarrow B \in p_A$

Trditev: $A \neq B \Rightarrow p_A \neq p_B$

Dokaz: Denimo, da je $p_A = p_B$.



$\forall X \in p_A = p_B : A, B \in p_X$

$\forall Y \in p_X : X \in p_Y, X' \in p_Y : p_Y = p_A = p_B = XX'$

Naj bo $Z \in p_A \cap p_X$.

$\Rightarrow p_A = p_Z = p_X$

$\Rightarrow AB = p_A = p_B$

$A \in p_A \Rightarrow A \in \mathcal{Y} \cap p_A \Rightarrow p_A$ tangenta na $\mathcal{Y}$ v A

$B \in p_B \Rightarrow B \in \mathcal{Y} \cap p_B \Rightarrow p_B$ tangenta na $\mathcal{Y}$ v B

$\Rightarrow A = B$

Trditev: Naj bo $\mathcal{Y}$ neprazna neizrojena stožnica. Tedaj je predpis $\tau : PV \to \{$projektivne premice v $PV\}$, $A \mapsto p_A$, bijektivna.

Dokaz: Injektivnost že vemo.

Naj bo p projektivna premica in $A, B \in p$.

Naj bo $C = p_A \cap p_B$. Ker $A, B \in p_C$, je $p = p_C$.

Definicija: Točka $\tau^{-1}(p)$ je **pol** projektivne premice p glede na stožnico $\mathcal{Y}$.

Geometrična konstrukcija polare:

Polaro točke A glede na neprazno neizrojeno stožnico $\mathcal{Y}$ dobimo z eno od spodnjih konstrukcij:

1) $A \in \mathcal{Y}$:

p_A je tangenta na $\mathcal{Y}$ v A.

2) $A \notin \mathcal{Y}$ in obstajata dve tangenti na $\mathcal{Y}$ skozi A:

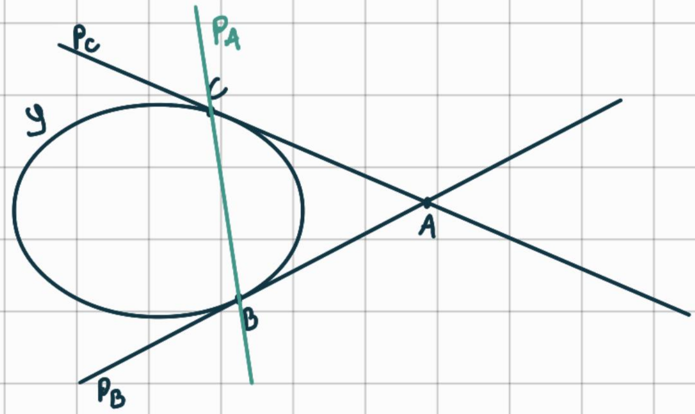
p_A je projektivna premica skozi dotikališči tangent.

3) $A \notin \mathcal{G}$ in ne obstajata tangenti na $\mathcal{G}$ skozi A:

Izberimo premici p_1 in p_2 skozi A, ki sekata $\mathcal{G}$ vsaka v dveh točkah. Naj bo $\mathcal{G} \cap p_i = \{B_i, C_i\}$. Naj bo D_i presek tangent na $\mathcal{G}$ v točkah B_i in C_i. Potem je $p_A = D_1D_2$.

Dokaz: 1) Že vemo.

2)

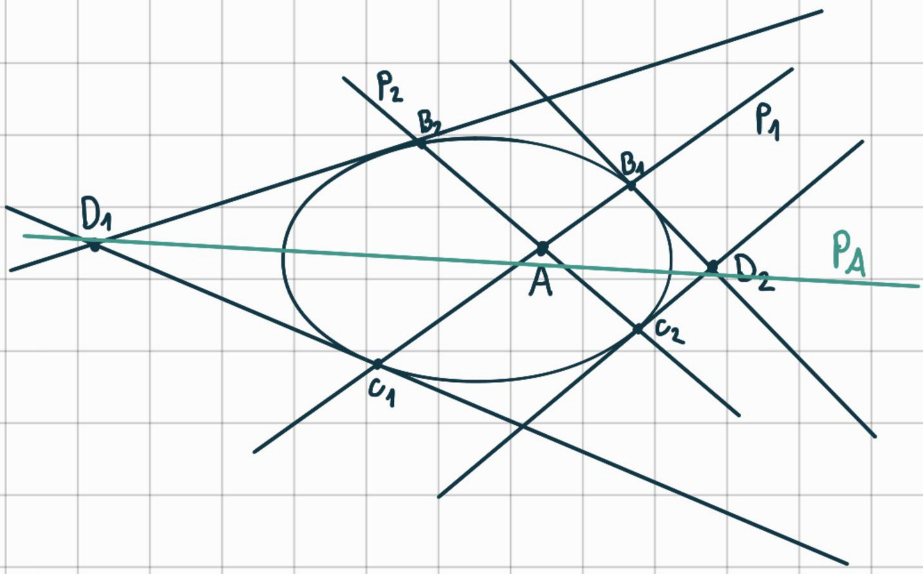


$A \in p_B, p_C$

$\Rightarrow B, C \in p_A$

$\Rightarrow p_A = BC$

3)



$D_1 \in p_{B_1}, p_{C_1} \Rightarrow p_{D_1} = B_1C_1 = p_1$

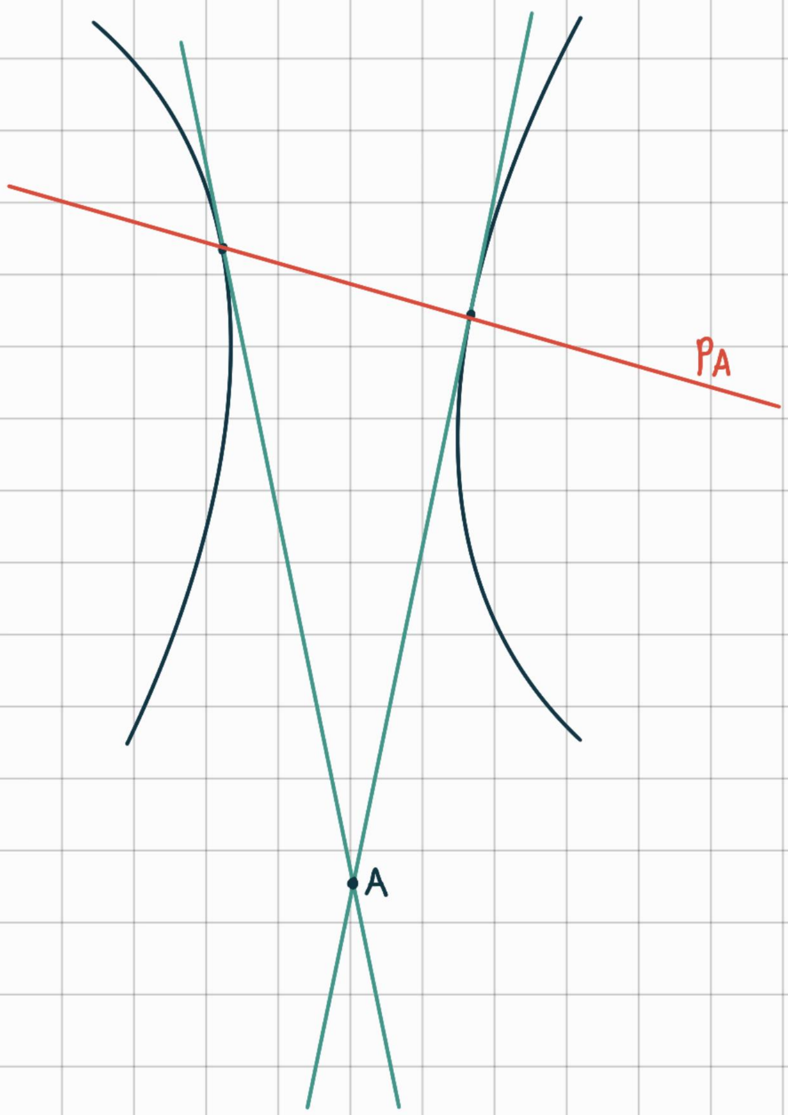
$D_2 \in p_{B_2}, p_{C_2} \Rightarrow p_{D_2} = B_2C_2 = p_2$

$\Rightarrow A \in p_{D_1}, p_{D_2}$

$\Rightarrow p_A = D_1 D_2$

Primer: Naj bo $\mathcal{S}$ stožnica v $\mathbb{R}^2$, podana z enačbo $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.

Za točko $A(x_0, y_0)$ poišči vse premice, ki gredo skozi A in so tangentne na $\mathcal{S}$.



$p_A \cap \mathcal{S}$ so točke, v katerih obstaja tangenta na $\mathcal{S}$, ki gre skozi A.

$\mathbb{R}^2$ vložimo v $P\mathbb{R}^3$ na nivo $z=1$, torej $(x,y) \mapsto [x:y:1]$.

Stožnica $\tilde{\mathcal{S}}$, za katero je $\tilde{\mathcal{S}} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \mathcal{S}$, je podana s kvadratno formo:

$$g(x,y,z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2$$

Matrika za $\tilde{\mathcal{S}}$ v standardni bazi:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Polara točke $[x_0 : y_0 : z_0]$ je $(x_0, y_0, z_0) M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$.

$$\Rightarrow axx_0 + b(x_0y + xy_0) + cyy_0 + d(x_0z + xz_0) + \\ + e(y_0z + yz_0) + fzz_0 = 0$$

$$p_A: axx_0 + b(x_0y + xy_0) + cyy_0 + d(x_0 + x) + e(y_0 + y) + f = 0$$

Trditev: Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica. Naj bo $A \notin \mathcal{S}$. Naj projektivna premica r skozi A seka $\mathcal{S}$ v točkah C in D. Naj bo $B = r \cap p_A$. Potem je A, B, C, D harmonična četverka.

Dokaz: $\mathcal{D}(A,B,C,D) = \mathcal{D}(D,C,B,A) = \lambda \overset{?}{=} -1$

$b = d + c$
$a = \lambda d + c$

Izberimo x, da je $\{c, d, x\}$ baza za V.

Matrika za $\mathcal{S}$ v tej bazi:

$$M = \begin{bmatrix} \phi(c,c) & \phi(c,d) & \phi(c,x) \\ \phi(d,c) & \phi(d,d) & \phi(d,x) \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \phi(c,d) & * \\ \phi(c,d) & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Ker je $\mathcal{Y}$ neizrojena, je rang $M = 3$, zato je $\phi(c,d) \neq 0$.

Ker je $B \in p_A$, je $\phi(a,b) = 0$.

$$0 = \phi(a,b) = \phi(\lambda d + c, d + c) = \lambda \phi(d,d) + \lambda \phi(d,c) + \phi(c,d) + \phi(c,c) =$$

$$= (\lambda + 1) \phi(c,d)$$

Ker je $\phi(c,d) \neq 0$, je $\lambda = -1$.

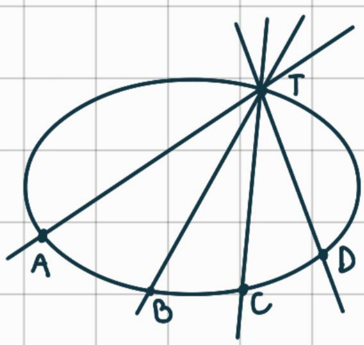
Steineov izrek:

Naj bodo A, B, C, D različne točke na neizrojeni stožnici $\mathcal{Y}$ in $T \in \mathcal{Y}$ poljubna točka.

Potem je $D(\overline{TA}, \overline{TB}, \overline{TC}, \overline{TD})$ neodvisno od točke T.

Opomba: Če je $T = A$, je $\overline{TA}$ tangenta na $\mathcal{Y}$ v A.

Dokaz:



Ker premica seka neizrojeno stožnico v največ dveh točkah, nobena trojica izmed A, B, C, D ne leži na hiperravnini (premici).

Torej je $\{D, A, B, C\}$ projektivno ogrodje projektivne ravnine:

$d = a + b + c$

Za $t \in T \setminus \{0\}$ je $t = xa + yb + zc$, saj je $\{a, b, c\}$ baza.

Matrika za $\mathcal{S}$ v bazi $\{a, b, c\}$:

$$M = \begin{bmatrix} \cancel{\phi(a,a)} & \phi(a,b) & \phi(a,c) \\ \phi(b,a) & \cancel{\phi(b,b)} & \phi(b,c) \\ \phi(c,a) & \phi(c,b) & \cancel{\phi(c,c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Matrika M se spremeni, če vzamemo druge vektorje za A, B, C, D:

$$d' = a' + b' + c'$$
$$\parallel$$
$$\lambda d = \lambda(a + b + c) = \lambda a + \lambda b + \lambda c$$

$$\Rightarrow a' = \lambda a,\ b' = \lambda b,\ c' = \lambda c$$

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha' & \beta' \\ \alpha' & 0 & \gamma' \\ \beta' & \gamma' & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha' = \phi(a', b') = \lambda^2 \alpha$$
$$\beta' = \phi(a', c') = \lambda^2 \beta$$
$$\gamma' = \phi(b', c') = \lambda^2 \gamma$$

$$\Rightarrow \frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\lambda^2 \beta}{\lambda^2 \gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$D = [1:1:1] \in \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow (1\ 1\ 1) M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha+\gamma\\ \beta+\gamma\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2(\alpha+\beta+\gamma) = 0$$

$$\overset{k(\mathbb{F})\neq 2}{\Rightarrow} \alpha+\beta+\gamma = 0$$

$$T = [x:y:z] \in \mathcal{Y}$$

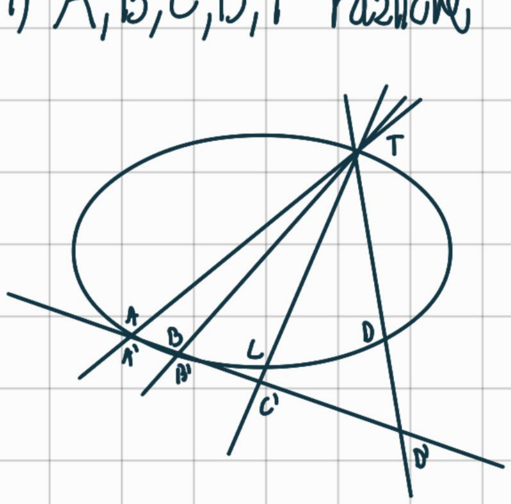
$$\Rightarrow (x\ y\ z)M\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x\ y\ z)\begin{pmatrix}\alpha y+\beta z\\ \alpha x+\gamma z\\ \beta x+\gamma y\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha xy + \beta xz + \alpha xy + \gamma yz + \beta xz + \beta xz + \gamma yz = 0$$

$$\Rightarrow \alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$$

1) A, B, C, D, T različne točke:



Dvorazmerje šopa računamo na premici AB:

$$A = [1:0:0]$$
$$B = [0:1:0]$$

$$C' = AB \cap CT = [x:y:0] \qquad (c' = *(x,y,z) + *(0,0,1))$$
$$D' = AB \cap DT = [x-z : y-z : 0]$$

Če je $x=0$, je $B=[0:1:0]$, $C=[0:0:1]$, $T=[0:y:z]$, torej so kolinearne, kar pa ne gre, ker premica seka stožnico v največ 2 točkah.

Torej $x \neq 0$ in podobno $y \neq 0$ in $z \neq 0$.

Če $x=y$, je $C=[0:0:1]$, $D=[1:1:1]$, $T=[x:x:y]$, torej so kolinearne kar spet ne gre.

Torej $x \neq y$ in podobno $x \neq z$ in $y \neq z$.

$\mathcal{D}(A,B,C',D')$:

$$c' = \tilde{a} + \tilde{b}$$
$$d' = \lambda \tilde{a} + \tilde{b}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-z \\ y-z \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{x-z}{x} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{y-z}{y} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad / \cdot \frac{y}{y-z}$$

$$\mathcal{D}(A,B,C',D') = \frac{x-z}{x} \cdot \frac{y}{y-z}$$

Spomnimo se:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad / \cdot xy$$
$$\alpha xy + \beta xy + \gamma xy = 0$$

$$-: \ \beta(xz - xy) + \gamma(yz - xy) = 0$$
$$\beta x(z-y) + \gamma y(z-x) = 0$$

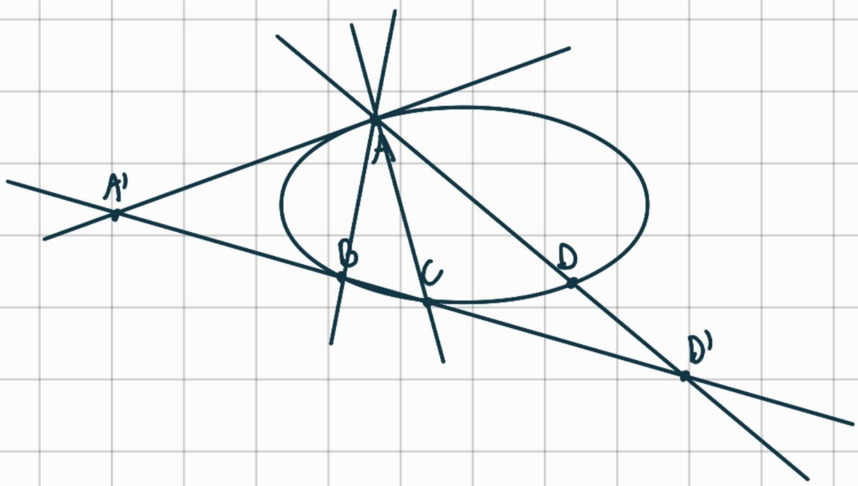
$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{y(z-x)}{x(z-y)} = -\frac{y(x-z)}{x(y-z)}$$

$\Rightarrow \mathcal{D}(TA, TB, TC, TD) = \mathcal{D}(A, B, C', D') = -\frac{\beta}{\gamma}$

To je neodvisno od izbire točke T in vektorjev a, b, c.

2) T je ena izmed točk A, B, C, D:

BŠS: $T = A$



Dvorazmerje sopa računamo na premici BC:

$B = [0:1:0]$
$C = [0:0:1]$

$D' = BC \cap AD = [0:1:1]$

$A' = BC \cap p_A = [0:-\beta:\alpha]$

$p_A: (1\,0\,0)M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$

$(1\,0\,0)\begin{pmatrix}\alpha y+\beta z\\ *\\ *\end{pmatrix} = 0$

$\alpha y + \beta z = 0$

$\mathcal{D}(A', B, C, D')$:

$$\tilde{c} = a' + \tilde{b}$$
$$d' = \lambda a' + \tilde{b}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} + \frac{\alpha+\beta}{\beta} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

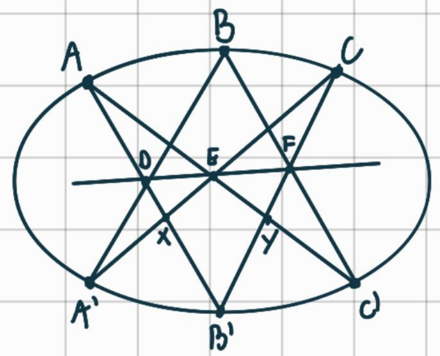
$$\mathcal{D}(AA, AB, AC, AD) = \mathcal{D}(A', B, C, D') = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overset{\alpha+\beta+\gamma=0}{=} \frac{\beta}{-\gamma}$$

Definicija: Naj bo $\mathcal{Y}$ neprazna, neizrojena stožnica in $A, B, C, D \in \mathcal{Y}$ različne točke. **Dvorazmerje** $\mathcal{D}(A,B,C,D)$ je enako dvorazmerju $\mathcal{D}(TA, TB, TC, TD)$, kjer je $T \in \mathcal{Y}$ poljuben.

Pascalov izrek:

Naj bodo A, B, C, A', B', C' različne točke na neizrojeni stožnici $\mathcal{Y}$. Potem so $D = AB' \cap A'B$, $E = AC' \cap A'C$ in $F = BC' \cap B'C$ kolinearne.

Dokaz:



$$\mathcal{D}(A,B,C,B') \overset{\text{na } \mathcal{Y}}{=} \mathcal{D}(A'A, A'B, A'C, A'B') \overset{\text{na } AB'}{=} \mathcal{D}(A, D, X, B')$$

$$= \mathcal{D}(\underline{EA}, ED, \underline{EX}, \underline{EB'})$$

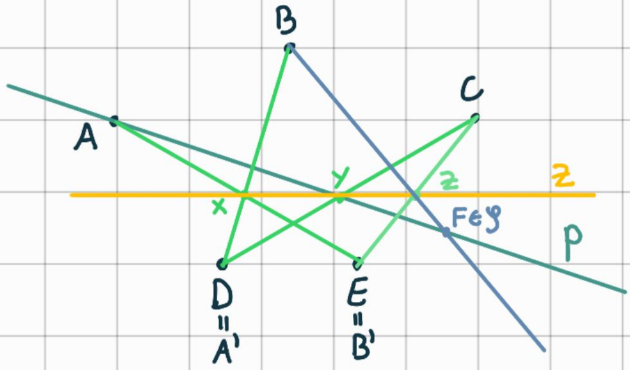
$$\mathcal{D}(A,B,C,B') \overset{\text{na } \mathcal{Y}}{=} \mathcal{D}(C'A, C'B, C'C, C'B') \overset{\text{na } CB'}{=} \mathcal{D}(Y, F, C, B)$$

$= \mathcal{D}(EY, EF, EC, EB')$

$\Rightarrow ED = EF$

$\Rightarrow D, E, F$ so kolinearne

Primer: Konstruiraj stožnico, ki gre skozi točke A, B, C, D, E.



Skozi A potegnemo premico p, ki ne gre skozi B, C, D, E.

Iščemo presek premice p z iskano stožnico.

- Konstruiramo $X = AE \cap BD$.
- Konstruiramo $Y = CD \cap p$ $(AC' = p)$.
- Z leži na premici XY (Pascalov izrek).
- $Z = XY \cap CE$
- $C' = p \cap BZ$

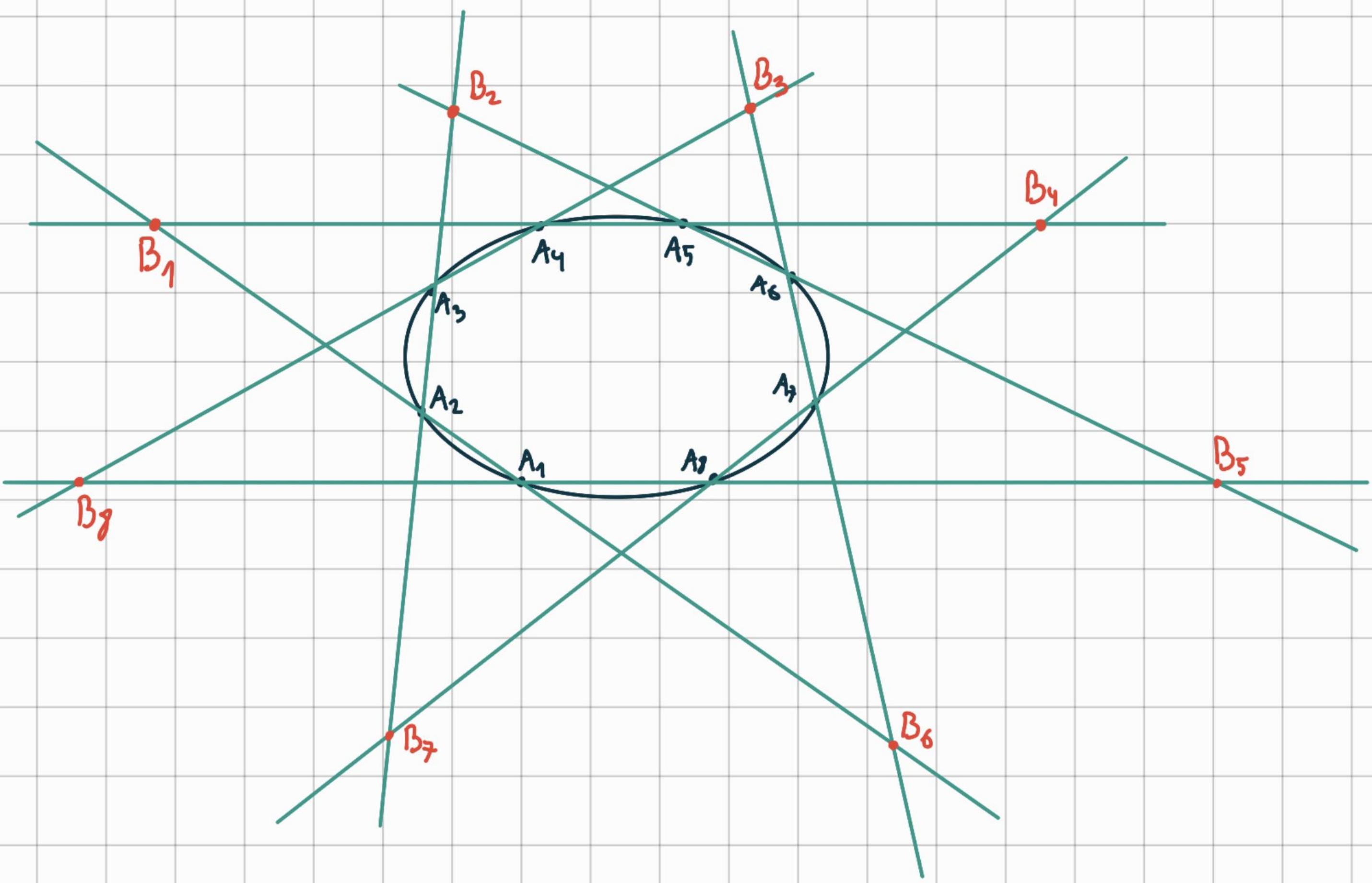
Obrat Pascalovega izreka / Braikenridge-Maclavirov izrek:

Naj bodo A, B, C, A', B', C' take točke v projektivni ravnini, da so $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ kolinearne. Potem A, B, C, A', B', C' ležijo na stožnici.

Opomba: Stožnica je lahko izrojena.

Dokaz: Naj bo $\mathcal{S}$ stožnica, ki gre skozi točke A, B, C, A', B'. Po prejšnjem primeru točka C' leži na $\mathcal{S}$.

Izrek: Naj bodo $A_1, \dots, A_8$ točke na neizrojeni stožnici $\mathcal{S}$ in naj bo $B_i = A_iA_{i+1} \cap A_{i+3}A_{i+4}$ (mod 8). Tedaj $B_1, \dots, B_8$ ležijo na stožnici $\check{\mathcal{S}}$.



Dokaz: Točke B_8, B_1 in $X = A_2A_3 \cap A_5A_8$ so kolinearne:

Označimo $A = A_5$, $B = A_3$, $C = A_1$, $A' = A_2$, $B' = A_8$, $C' = A_4$.

$\Rightarrow X = AB' \cap A'B$, $B_1 = AC' \cap A'C$, $B_8 = BC' \cap B'C$

$\overset{\text{Pascal}}{\Rightarrow} X, B_1, B_8$ so kolinearne.

Označimo $A=B_8$, $B=B_2$, $C=B_4$, $A'=B_7$, $B'=B_1$, $C'=B_5$.

$\Rightarrow X = AB' \cap A'B$, $A_8 = AC' \cap A'C$, $A_5 = BC' \cap B'C$

$\overset{\text{Pascal}}{\Longrightarrow} X, A_8, A_5$ so kolinearne.

$\overset{\text{B.M.}}{\Longrightarrow} B_1, B_2, B_4, B_5, B_7, B_8$ ležijo na stožnici $\mathcal{S}_1$.

Enako dobimo, da $B_2, B_3, B_5, B_6, B_8, B_1$ ležijo na stožnici $\mathcal{S}_2$.

Enako dobimo, da $B_4, B_5, B_7, B_8, B_2, B_3$ ležijo na stožnici $\mathcal{S}_3$.

Ker velja $B_2, B_4, B_5, B_7, B_8 \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, je $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_3$.

$B_1 \in \mathcal{S}_1$, $B_3 \in \mathcal{S}_3$

$\Rightarrow$ Vsaj 7 točk leži na stožnici $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$.

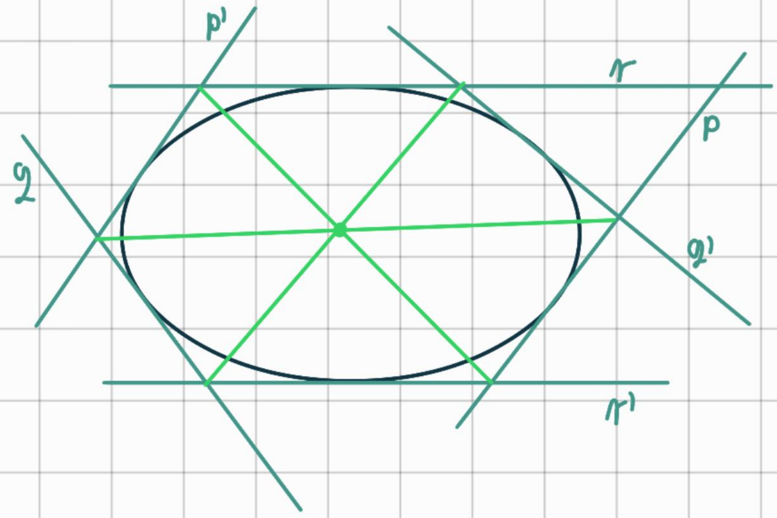
(Zavrtimo in podobno dobimo, da vse točke razen ene ležijo na skupni stožnici.)

$\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_1$ vsebuje vsaj 5 točk.

$\Rightarrow \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3$

Brianchonov izrek:

Naj bodo p, q, r, p', q', r' različne tangente na neizrojeno stožnico. Označimo $A = p \cap q'$, $B = q \cap r'$, $C = r \cap p'$, $A' = p' \cap q$, $B' = q' \cap r$, $C' = r' \cap p$. Potem se premice AA', BB', CC' sekajo v skupni točki.



Dokaz: Naj bo p tangenta na $\mathcal{S}$ v točki P, ..., r' tangenta na $\mathcal{S}$ v točki R'.

Po Pascalovem izreku so točke $X = PQ' \cap P'Q$, $Y = PR' \cap P'R$ in $Z = QR' \cap Q'R$ kolinearne.

Premica PQ' je polara točke A, $P'Q = p_{A'}$.

Ker $X \in p_A \cap p_{A'}$, $A, A' \in p_X$, je $p_X = AA'$.

Enako dobimo, da je $p_Y = CC'$, $p_Z = BB'$.

$T = AA' \cap BB' \Rightarrow T \in p_X \cap p_Z \Rightarrow XZ = p_T$
$S = AA' \cap CC' \Rightarrow S \in p_X \cap p_Y \Rightarrow XY = p_S$

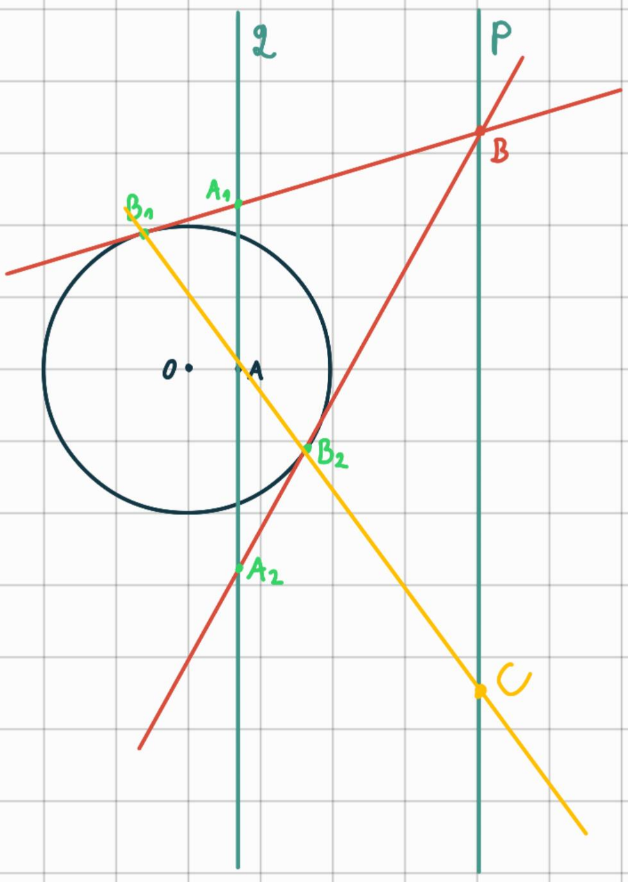
Ker so X, Y, Z kolinearne, je $p_T = p_S$ in zato $T = S$.

Trditev: Naj bo S^1 enotska krožnica v $\mathbb{R}^2$, A točka znotraj krožnice S^1, ki ni $(0,0)$, p polara točke A glede na $\mathcal{S}_1$, $q \parallel p$, da je $A \in q$, in $B \in p$ poljubna točka.

Presečišča tangent iz B na S^1 s premico q označimo z A_1, A_2.

Potem je A razpolovišče daljice $A_1 A_2$.

Dokaz: Sliko zavrtimo, da je $A \in (0, \infty) \times \{0\}$.



$A(a,0) \Rightarrow p_A: y = \frac{1}{a}$

Označimo dotikališča tangent z B_1 in B_2.

Velja $p_B = B_1B_2$. Ker je $B \in p_A$, je $A \in p_B$.

i) $p_B = q$:

$\Rightarrow B$ leži na x-osi.

$\Rightarrow A_1$ in A_2 sta zrcalni sliki preko x-osi.

$\Rightarrow A$ razpolavlja daljico A_1A_2.

ii) $p_B \neq q$:

Označimo $C = B_1B_2 \cap p$. Torej $C \in p_A \cap p_B$, zato $p_C = AB$.

$$\mathcal{D}(B_1, B_2, A, C) = -1$$

(konstrukcija harmonične četverke s pomočjo stožnice)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(B_1, B_2, A, C) = -1 \\
&\quad \| \\
&\mathcal{D}(BB_1, BB_2, BA, BC) \\
&\quad \|^{\text{na } q} \\
&\mathcal{D}(A_1, A_2, A, \infty) \\
&\quad \| \\
&\mathcal{D}(A_2, A_1, \infty, A) = -1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow A$ razpolavlja daljico A_1A_2.