1.1

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{\heartsuit, \Diamond\}$, $C = \{\star\}$

a) $\heartsuit \in B$

b) $\{(), \heartsuit\} \in \mathbb{1} \times B$

c) $((1, \heartsuit), \star) \in (A \times B) \times C$

d) $(1, (\heartsuit, \star)) \in A \times (B + C)$

e) $(1, \heartsuit, \star) \in A \times B \times C$

f) $(1, in_1(\heartsuit)) \in A \times (B + C)$

g) $in_1((1, \heartsuit)) \in A \times B + A \times C$

h) $\begin{pmatrix} B \to A \\ \heartsuit \mapsto 1 \\ \Diamond \mapsto 2 \end{pmatrix} \in A^B$

i) $(\emptyset \to A) \in A^{\emptyset}$

to je prazna preslikava
obstaja natanko ena

j) $\begin{pmatrix} B \to (A+C) \\ \heartsuit \mapsto in_1(1) \\ \Diamond \mapsto in_2(\star) \end{pmatrix} \in (A+C)^B$

k) $\begin{pmatrix} (A+B) \to C \\ x \mapsto \star \end{pmatrix} \in C^{A+B}$

nekaj $= \{\text{znj}\}$
$\mathbb{1} = \{()\}$

$\mathbb{1} \times B = \{((), \heartsuit), ((), \Diamond)\}$
$\emptyset \times B = \emptyset$

$B \xrightarrow{in_1^{B,C}} B + C$

število vseh preslikav iz B v A: $m(A)^{m(B)}$
vse preslikave iz B v A: A^B

isto za zmnožek in vsoto

Definirajmo preslikavo f. 1.2

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$\quad x \mapsto$ največji delitelj od x

Katero število bo prirejanje priredilo številu 666?
$f(666) = 666$

Ali je f dobro definirana funkcija?
- Ali je funkcija celovita/totalna (vsakemu elementu domene priredimo vsaj en element kodomene)?
- Ali je funkcija enolična (vsakemu elementu domene priredimo največ en element kodomene?
- $\Rightarrow$ Ali vsakemu elementu domene priredimo natanko en element kodomene?

$\rightsquigarrow$ Ne, ker $0 \in \mathbb{N}$, in največji delitelj od 0 ni definiran, zato f ni preslikava/funkcija.

$a \mid b$: obstaja k, da je $b = k \cdot a$

1.3

$$\min: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} x ; & \text{če } x \leq y \\ y ; & \text{če } y \leq x \end{cases}$$

$$\min(\pi, \sqrt[3]{31}) = \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} x ; & \text{če } x \leq y \\ y ; & \text{če } y \leq x \end{cases} \end{array}\right)(\pi, \sqrt[3]{31}) =$$
$$= \begin{cases} \pi ; & \text{če } \pi \leq \sqrt[3]{31} \\ \sqrt[3]{31} ; & \text{če } \sqrt[3]{31} \leq \pi \end{cases} =$$
$$= \sqrt[3]{31}$$

1.4

Definiramo funkcijo:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \min(f(0), f(1)) \end{aligned}$$

V ta funkcijski predpis vstavimo argument:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3-2x \end{aligned}$$

In izračunamo rezultat:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \min(f(0), f(1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3-2x \end{pmatrix} =$$

$$= \min\left(\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3-2x \end{pmatrix}(0), \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3-2x \end{pmatrix}(1) \right) =$$

$$= \min(3-2\cdot 0, 3-2\cdot 1) = 1$$

1.5

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} &\to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ f &\mapsto (n \mapsto f(n) + f(f(n))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} &\to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ g &\mapsto (k \mapsto g(k^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi(\chi(x \mapsto 2x+1))(7) = \\
&= \varphi(n \mapsto 2n+1 + 2(2n+1)+1)(7) = \\
&= \varphi(n \mapsto 6n+4)(7) = \\
&= (g \mapsto (k \mapsto g(k^2)))(n \mapsto 6n+4)(7) = \\
&= (k \mapsto (n \mapsto 6n+4)(k^2))(7) = \\
&= (k \mapsto 6k^2+4)(7) = \\
&= 298
\end{aligned}$$

$$r(f(x \mapsto 2x+1))(7) =$$
$$= r(g \mapsto (k \mapsto g(k^2))(x \mapsto 2x+1))(7) =$$
$$= r(k \mapsto 2k^2+1)(7) =$$
$$= (n \mapsto 2n^2+1 + 2(2n^2+1)^2+1)(7) =$$
$$= (n \mapsto 6n^2+4)(7) = (n \mapsto 8n^4+10n^2+4)(7)$$
$$= 298 \quad // \quad 19702$$

1.6

Naj bo A množica.

Koliko preslikav $A \to 1$? Ena.
Koliko preslikav $1 \to A$? $m(A)$

MOČ MNOŽIC!

1.7

$$A \times A \longrightarrow A \times A \times A$$
$$(x, y) \mapsto (x, x, y)$$

$$C^A \longrightarrow C^{A \times B}$$
$$f \mapsto \begin{pmatrix} A \times B \to C \\ (a,b) \mapsto f(a) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^A \longrightarrow A^A \\ f \mapsto id_A \end{array}\right\} \text{konst.}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^A \longrightarrow A^A \\ f \mapsto f \end{array}\right\} id_{A^A}$$

$$A^A \longrightarrow A^A$$
$$f \longrightarrow f \circ f$$

(0 x kompozitum = identiteta)

IZOMORFIZMI

$\mathbb{N}_{SL} = \{$nič, ena, dve, tri, ...$\}$
$\mathbb{N}_{EN} = \{$zero, one, two, three, ...$\}$

$\mathbb{N}_{SL} \cong \mathbb{N}_{EN}$

Realna števila so dedekindov poln urejen obseg.

automorfizem – izomorfizem iz množice v sebe
= simetrija

7.8

$\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto x$

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto x+1$

$\mathbb{R} \cong (0,1)$

bomo delali pri analizi

$1 + \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rccccc}
\mathbb{N} = & 0 & 1 & 2 & 3 & \\
& \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
1 + \mathbb{N} = & in_1(()) & in_2(0) & in_2(1) & in_2(2) & \cdots \\
& \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
f : 1 + \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\
in_1(()) &\mapsto 0 \\
in_2(n) &\mapsto n+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g : \mathbb{N} &\to 1 + \mathbb{N} \\
0 &\longmapsto in_1(()) \\
m &\longmapsto in_2(m-1), \text{ če } m \neq 0
\end{aligned}$$

$$f(g(0)) = f(in_1(0)) = 0$$

$$f(g(m \neq 0)) = f(in_2(m-1)) = m-1+1 = m$$

$$g(f(in_1(0))) = g(0) = in_1(0)$$

$$g(f(in_2(n))) = g(n+1) = in_2(n+1-1) = in_2(n)$$

$$\mathbb{N} + \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$$

$$f : \mathbb{N}+\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$in_1(n) \mapsto -n$$
$$in_2(n) \mapsto n+1$$

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}+\mathbb{N}$$
$$k \mapsto \begin{cases} in_1(-k) & ; \ k \leq 0 \\ in_2(k-1) & ; \ k > 0 \end{cases}$$

$$g \circ f = id_{\mathbb{N}+\mathbb{N}}$$

$$(g \circ f)(in_1(n)) = g(f(in_1(n))) = g(-n) = in_1(-(-n)) = in_1(n)$$

$$(g \circ f)(in_2(n)) = g(f(in_2(n))) = g(n+1) = in_2(n+1-1) = in_2(n)$$

$$f \circ g = id_{\mathbb{Z}}$$

$$(f \circ g)(k) = f(g(k)) =$$

$$= f\left(\begin{cases} in_1(-k) ; & k \leq 0 \\ in_2(k-1) ; & k > 0 \end{cases}\right) =$$

$$= \begin{cases} f(in_1(-k)) ; & k \leq 0 \\ f(in_2(k-1)) ; & k > 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} k ; & k \leq 0 \\ k ; & k > 0 \end{cases} =$$

$$= k$$

1.9

a) ✓

b) //

c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto (x+y, x-y)$

(u, v)

$u = x+y$, $v = x-y$

$2x = u+v$ $\quad y = \frac{u-v}{2}$

$x = \frac{u+v}{2}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$

d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$(x, y) \mapsto (x+y, x-y)$

$\cancel{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$

$\cancel{(u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)}$

ni izomorfizem

$\sin(a) = \sin a$

$f(x) = fx$

$in_1(()) = in_1()$

$f((x, y)) = f(x, y)$

a) Izomorfizem med množico strogo naraščajočih zaporedij realnih števil in množico zaporedij pozitivnih realnih števil.

Naj bo A množica strogo naraščajočih zaporedij realnih števil in naj bo B množica zaporedij pozitivnih realnih števil.

$$f: A \to B$$
$$a \mapsto (e^{a_0}, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_{n-1}, \dots$$

Ker je a strogo naraščajoče zaporedje, je $a_n - a_{n-1} > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, poleg tega pa je tudi $e^{a_0} > 0$, zato je prirejeno zaporedje zaporedje pozitivnih realnih števil.

$$g: B \to A$$
$$b \mapsto (\ln b_0, b_1 + \ln b_0, \dots, \sum_{i=1}^{n} b_i + \ln b_0, \dots)$$

Dobljeno zaporedje je strogo naraščajoče, saj je vsak $b_i > 0$, i-ti člen pa je za b_i večji od prejšnjega.

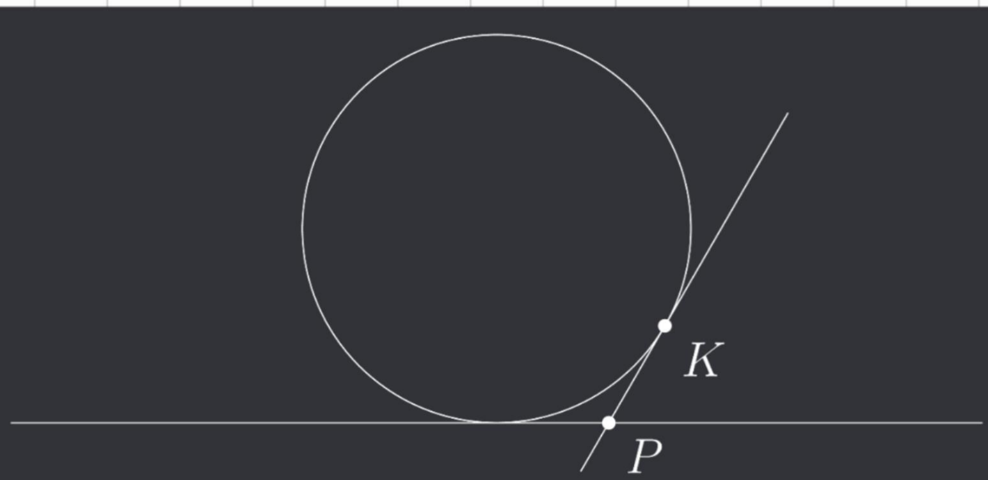
$$\begin{aligned}
(f \circ g)(b) &= f(g(b)) = \\
&= f(g((b_0, b_1, \dots, b_n, \dots))) \\
&= f((\ln b_0, b_1 + \ln b_0, \dots, \sum_{i=1}^{n} b_i + \ln b_0, \dots)) = \\
&= (e^{\ln b_0}, (b_1 + \ln b_0) - \ln b_0, \dots, (\sum_{i=1}^{n} b_i + \ln b_0) - (\sum_{i=1}^{n-1} b_i + \ln b_0), \dots) = \\
&= (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = \\
&= b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(a) &= g(f(a)) = \\
&= g(f((a_0, a_1, \dots, a_n, \dots))) = \\
&= g((e^{a_0}, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_{n-1}, \dots)) = \\
&= (\ln e^{a_0}, (a_1 - a_0) + \ln e^{a_0}, \dots, \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i-1}) + \ln e^{a_i}, \dots) = \\
&= (a_0, a_1, \dots, (a_n - a_0) + a_0, \dots) = \\
&= (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = \\
&= a
\end{aligned}$$

$f \circ g = id_A$
$g \circ f = id_B$

$\Rightarrow$ izomorfizma

b) Izomorfizem med premico in krožnico brez ene točke



Premik premice je izomorfizem, ki premico preslika v premico. Premico premaknemo tako, da se krožnice dotika v eni točki. Tej točki na premici recimo P_0, tej točki na krožnici pa K_0. Izberemo poljubno točko P na premici. Narišemo tangenti na krožnico skozi to točko. Ena tangenta je premica sama, druga pa se dotika krožnice v točki K. Točka P naj se slika v točko K. Izberimo poljubno točko K na krožnici. Narišemo tangento na krožnico skozi to točko. Tangenta je lahko vzporedna premici, če je izbrana točka K_0, ki jo že znamo slikati na premico, ali pa točka na nasprotni strani krožnice. Slednja točka naj se ne slika nikamor – to naj bo točka, ki krožnici manjka. Za vse ostale točke K, pa obstaja natanko ena točka P, ki se po prej napisanem slika v K. Če torej rečemo, da se še K slika v P, imamo bijekcijo med premico in krožnico brez ene točke.

1.11

$A + B \cong B + A$

a

$A+B \to B+A$
$in_1(x) \mapsto in_2(x)$
$in_2(x) \mapsto in_1(x)$

$B+A \to A+B$
$in_1(x) \mapsto in_2(x)$
$in_2(x) \mapsto in_1(x)$

Priporočeno je, da so povsod imena spremenljivk različna. Ista imena bomo obžalovali, ko bomo izomorfizem prevajali.

$$(A+B)+C \cong A+(B+C)$$ ⓑ

$(A+B)+C \to A+(B+C)$	$A+(B+C) \to (A+B)+C$
$in_1(in_1(a)) \mapsto in_1(a)$	$in_1(a) \mapsto \dots$
$in_1(in_2(b)) \mapsto in_2(in_1(b))$	$in_2(in_1(b)) \mapsto \dots$
$in_2(c) \mapsto in_2(in_2(c))$	$in_2(in_2(c)) \mapsto \dots$

Če bi bili natančni:

zunanji $in_1 : A+B \to (A+B)+C \quad \sim \quad in_1^{A+B,B}$

notranji $in_1 : A \to A+B \quad \sim \quad in_1^{A,B}$

$$A \times (B+C) \cong A \times B + A \times C$$ ⓒ

$A \times (B+C) \to A\times B + A \times C$	$A\times B + A\times C \to A \times (B+C)$
$(a, in_1(b)) \mapsto in_1(a,b)$	$in_1(x,y) \longmapsto (x, in_1(y))$
$(a, in_2(c)) \mapsto in_2(a,c)$	$in_2(x,z) \longmapsto (x, in_2(z))$

$\emptyset = \{\}$

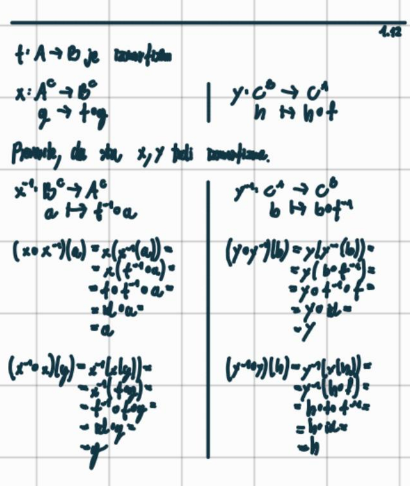
$1 = \{()\}$

$2 = \{0, 1\}$ (pri analizi)

$2 = \{\bot, \top\}$ (pri logiki)

$\bot$ - neresnica

$\top$ - resnica


1.12

$f: A \to B$ je izomorfizem

$x: A^C \to B^C$, $g \mapsto f \circ g$ | $y: C^B \to C^A$, $h \mapsto h \circ f$

Pokaži, da sta x, y tudi izomorfizma.

$x^{-1}: B^C \to A^C$, $a \mapsto f^{-1} \circ a$ | $y^{-1}: C^A \to C^B$, $b \mapsto b \circ f^{-1}$

$(x \circ x^{-1})(a) = x(x^{-1}(a)) = x(f^{-1}\circ a) = f \circ f^{-1} \circ a = id \circ a = a$

$(y \circ y^{-1})(b) = y(y^{-1}(b)) = y(b \circ f^{-1}) = b \circ f^{-1} \circ f = b \circ id = b$

$(x^{-1} \circ x)(g) = x^{-1}(x(g)) = x^{-1}(f \circ g) = f^{-1} \circ f \circ g = id \circ g = g$

$(y^{-1} \circ y)(h) = y^{-1}(y(h)) = y^{-1}(h \circ f) = h \circ f \circ f^{-1} = h \circ id = h$

$A^{\mathbb{1}} \cong A$ (d)

$f : A^{\mathbb{1}} \to A$
$\quad k \mapsto k()$

$g : A \to A^{\mathbb{1}}$
$\quad a \mapsto (() \mapsto a)$

$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(() \mapsto a) = (() \mapsto a)() = a$
$(g \circ f)(() \mapsto a) = g(f(() \mapsto a)) = g(a) = () \mapsto a$

$A^{\mathbb{2}} \cong A \times A$ (e)

$f : A^{\mathbb{2}} \to A \times A$
$\quad k \mapsto (f(\perp), f(\top))$

$g : A \times A \to A^{\mathbb{2}}$
$\quad (a, b) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \perp \mapsto a \\ \top \mapsto b \end{smallmatrix}\right)$

$(f \circ g)(a, b) = f\left(\begin{smallmatrix} \perp \mapsto a \\ \top \mapsto b \end{smallmatrix}\right) = (a, b)$
$(g \circ f)(k) = g(f(\perp), f(\top)) = \left(\begin{smallmatrix} \perp \mapsto f(\perp) \\ \top \mapsto f(\top) \end{smallmatrix}\right) = k$

$A^{\emptyset} \cong \mathbb{1}$ (f)

$f : A^{\emptyset} \to \mathbb{1}$
$\quad k \mapsto ()$

$g : \mathbb{1} \to A^{\emptyset}$
$\quad () \mapsto (\emptyset \to A)$

$(f \circ g)() = f(\emptyset \to A) = ()$
$(g \circ f)(k) = g() = (\emptyset \to A) = k$

$A^{(B+C)} \cong A^B \times A^C$ (g)

$f : A^{(B+C)} \longrightarrow A^B \times A^C$
$\quad h \longmapsto ((b \mapsto h(in_1(b)),\ c \mapsto h(in_2(c))$

$$g : A^B \times A^C \longrightarrow A^{(B+C)}$$
$$k \longmapsto \begin{pmatrix} in_1(b) \mapsto (pr_1(k))(c) \\ in_2(c) \mapsto (pr_2(k))(c) \end{pmatrix}$$

$$(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$$ b

$$f : (A \times B)^C \longrightarrow A^C \times B^C$$
$$h \longmapsto ((c \mapsto pr_1(h(c))), (c \mapsto pr_2(h(c))))$$

$$g : A^C \times B^C \longrightarrow (A \times B)^C$$
$$(k, l) \longrightarrow (c \longrightarrow (k(c), l(c)))$$