N-LINEARNE PRESLIKAVE

Primer: Skalarni produkt $\cdot$ slika iz $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ v $\mathbb{R}$.

Če fiksiramo $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, potem za poljubna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ in poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja $\vec{a} \cdot (\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\vec{a}\vec{x} + \beta\vec{a}\vec{y}$. Temu smo rekli linearnost skalarnega produkta v drugem faktorju.

Če fiksiramo $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, potem za vsaka $\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ in vsaka $\gamma, \sigma \in \mathbb{R}$ velja $(\gamma\vec{z} + \sigma\vec{w}) \cdot \vec{b} = \gamma\vec{z}\vec{b} + \sigma\vec{w}\vec{b}$. Temu smo rekli linearnost v drugem faktorju.

Ker je skalaren produkt linearen v 1. in 2. faktorju, pravimo, da je bilinearen.

Definicija: Naj bodo $V_1, V_2, \ldots, V_n, U$ vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Naj bo $f: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to U$ preslikava. Če fiksiramo elemente $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \ldots, v_{i-1} \in V_{i-1}, v_{i+1} \in V_{i+1}, \ldots, v_n \in V_n$, lahko definiramo preslikavo $f_i : V_i \to U$ s predpisom $f_i(x) = f(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n)$.

Preslikava $f: V_1 \times \ldots \times V_n \to U$ je n-linearna, kadar je preslikava $f_i: V_i \to U$, za vsak i, definirana s predpisom $f_i(x) = f(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, linearna, ne glede na to, kako smo izbrali fiksirane vektorje $v_1 \in V_1, \ldots, v_{i-1} \in V_{i-1}, v_{i+1} \in V_{i+1}, \ldots, v_n \in V_n$.

Če je $U = \mathbb{F}$, n-linearni preslikavi $V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{F}$ pravimo n-linearen funkcional.

Definicija: Preslikava $f: V^n \to U$ (kjer je $V^n = V \times V \times \ldots \times V$) je simetrična, kadar velja, da je $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$ za vsaka i, j in vse $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Preslikava $f: V^n \to U$ je antisimetrična, kadar za vsaka $i \neq j$ in vse $v_1, \ldots, v_n \in V$ velja $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$ $= -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$.

Primer:
$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Prej smo pokazali, da je f 2-linearna (bilinearna) preslikava. Ker slika v $\mathbb{R}$, je bilinearen funkcional.

Za vsaka $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ je $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, torej je skalarni produkt simetričen bilinearen funkcional.

Primer:
$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \times \vec{y}$$

Če fiksiramo $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, potem je $\vec{a} \times (\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \vec{a} \times \vec{x} + \beta \vec{a} \times \vec{y}$.

To pomeni, da je preslikava $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definirana s predpisom $f_2(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$, linearna.

Podobno je tudi preslikava $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definirana s predpisom $f_1(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{b}$, linearna.

f_1 in f_2 sta linearni za vsaka fiksirana $\vec{a}$ in $\vec{b}$, torej je f 2-linearna (oziroma bilinearna).

f slika v $\mathbb{R}^3$, torej ni funkcional.

Za vsaka $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, je $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$, torej je f antisimetrična.

Primer: $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \mapsto (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$

Fiksirajmo $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Potem imamo preslikavo $f_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom $f_1(\vec{x}) = (\vec{x} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

$$((\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\alpha\vec{x} \times \vec{b} + \beta\vec{y} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \alpha(\vec{x} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + \beta(\vec{y} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$\Rightarrow$ f_1 je linearna preslikava

Če fiksiramo $\vec{a}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, dobimo preslikavo $f_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom $f_2(\vec{y}) = (\vec{a} \times \vec{y}) \cdot \vec{c}$.

Če fiksiramo $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, dobimo preslikavo $f_3: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom $f_3(\vec{z}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{z}$.

Podoben račun kot prej bi pokazal, da sta tudi f_2 in f_3 linearni, ne glede na to, kako smo izbrali $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$\Rightarrow$ f je 3-linearen funkcional

Vemo, da je mešani produkt antisimetričen:
$f(x, y, z) = -f(y, x, z)$ in podobno, če zamenjamo katera druga dva faktorja.

Primer: $\mathcal{A}: \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}$
$$(A,B) \mapsto A\cdot B$$

Če fiksiramo A, je $A(\alpha B + \beta C) = \alpha AB + \beta AC$.
Če fiksiramo B, je $(\alpha A + \beta C)\cdot B = \alpha AB + \beta CB$.

$\Rightarrow \mathcal{A}$ je bilinearna preslikava

Ni niti simetrična niti antisimetrična, saj v splošnem velja $AB \neq BA$ in $AB \neq -BA$.

Z n-linearnimi preslikavami računamo podobno kot z množenjem.

Na primer, če je $\mathcal{A}: V\times W \to U$ bilinearna in $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}$, potem je:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) \overset{\text{linearnost v 1. faktorju}}{=}$$
$$= \alpha_1 \mathcal{A}(v_1, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) + \alpha_2 \mathcal{A}(v_2, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) \overset{\text{linearnost v 2. faktorju}}{=}$$
$$= \alpha_1\beta_1 \mathcal{A}(v_1, w_1) + \alpha_1\beta_2 \mathcal{A}(v_1, w_2) + \alpha_2\beta_1 (v_2, w_1) + \alpha_2\beta_2 \mathcal{A}(v_2, w_2)$$

TENZORJI

Linearni preslikavi smo priredili matriko. Na enak način n-linearni preslikavi priredimo tenzor.

Naj bo $\mathcal{A}: V\times W \to U$ bilinearna preslikava. Naj bo $\{v_1, \dots, v_m\}$ baza za V, $\{w_1, \dots, w_n\}$ baza za W in $\{u_1, \dots, u_p\}$ baza za U. Če sta $x \in V$, $y \in W$ poljubna, je $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$ in $y = \sum_{j=1}^n \beta_j w_j$ za neke $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{F}$.

$$\mathcal{A}(x,y) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j w_j\right) \overset{\text{linearnost}}{=}$$
$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \underbrace{\alpha_i \beta_j}_{\text{odvisno od } x,y} \underbrace{\mathcal{A}(v_i, w_j)}_{\text{neodvisno od } x,y}$$

Če poznamo $f(v_i, w_j)$ za vsaka i in j, bomo znali enolično izračunati $f(x,y)$ za vsaka $x \in V$ in $y \in W$.

Preslikava f je enolično določena z vektorji $f(v_i, w_j) \in U$ za $i = 1, \dots, m$ in $j = 1, \dots, n$.

Vektorje $f(v_i, w_j)$ razvijemo po bazi $\{u_1, \dots, u_p\}$. Za vsaka i, j obstajajo skalarji $a_{i,j,1}, \dots, a_{i,j,p}$, da je $f(v_i, w_p) = a_{ij1} u_1 + a_{ij2} u_2 + \dots + a_{ijp} u_p$.

Preslikava f je enolično določena s skalarji a_{ijk} za $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$.

Skalarje a_{ijk} napišemo v kvader velikosti $m \times n \times p$. Takemu kvadru skalarjev rečemo tenzor reda $m \times n \times p$.

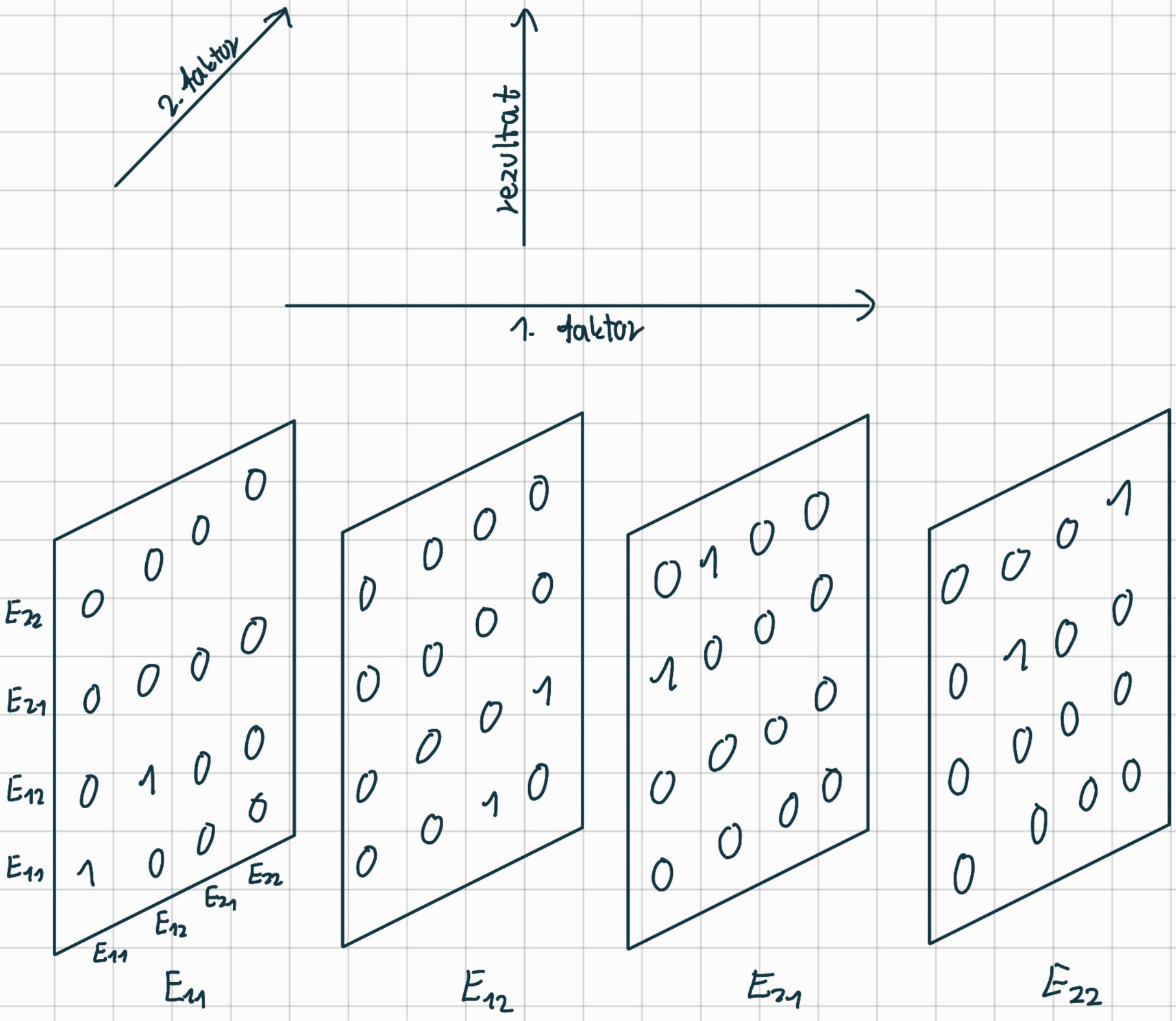
V kocko na mestu i, j, k napišemo a_{ijk}.

Primer: $f: \mathbb{F}^{2\times2} \times \mathbb{F}^{2\times2} \longrightarrow \mathbb{F}^{2\times2}$
$(A, B) \mapsto A \cdot B$

V vseh treh prostorih si izberemo bazo:
$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

$A(E_{11}, E_{11}) = E_{11} \cdot E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{11}$
$A(E_{11}, E_{12}) = E_{12}$
$A(E_{11}, E_{21}) = 0$
$A(E_{11}, E_{22}) = 0$
$A(E_{12}, E_{11}) = 0$
$A(E_{12}, E_{12}) = 0$
$A(E_{12}, E_{21}) = E_{11}$
$A(E_{12}, E_{22}) = E_{12}$
$A(E_{21}, E_{11}) = E_{21}$
$A(E_{21}, E_{12}) = E_{22}$
$A(E_{21}, E_{21}) = 0$
$A(E_{21}, E_{22}) = 0$
$A(E_{22}, E_{11}) = 0$
$A(E_{22}, E_{12}) = 0$
$A(E_{22}, E_{21}) = E_{21}$
$A(E_{22}, E_{22}) = E_{22}$

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \begin{cases} 0 & ; \text{ če } j \neq k \\ E_{il} & ; \text{ sicer} \end{cases}$$



Tenzorje fiksne velikosti $m \times n \times p$ seštevamo po komponentah in množimo s skalarji po komponentah. Množica vseh tenzorjev velikosti $m \times n \times p$ na ta način postane vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Pravimo mu tenzorski produkt prostorov $\mathbb{F}^m$, $\mathbb{F}^n$ in $\mathbb{F}^p$. Označimo ga $\mathbb{F}^m \otimes \mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^p$.

$$\dim \mathbb{F}^m \otimes \mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^p = m \cdot n \cdot k$$

Bazo zestavljajo vsi taki tenzorji, ki imajo en člen enak 1, ostale člene pa imajo enake 0.

Tenzor, ki ima na (i,j,k)-tem mestu enico in drugod ničle, označimo $e_i \otimes e_j \otimes e_k$. Splošen tenzor je potem oblike $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1} a_{ijk}\, e_i \otimes e_j \otimes e_k$.

Če sta V in W tenzorska prostora nad $\mathbb{F}$ z bazama $\{v_1, \dots, v_m\}$ in $\{w_1, \dots, w_n\}$, potem je tenzorski produkt prostorov V in W vektorski prostor dimenzije $m \cdot n$ z bazo, ki jo označimo $\{v_i \otimes w_j \,;\, i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\}$.

Najprej definiramo prostor vseh funkcij iz $V \times W$ v $\mathbb{F}$. To je ogromen vektorski prostor. Funkcije $V \times W \to \mathbb{F}$ identificiramo z zaporedji iz množice $\mathbb{F}^{V \times W} = U$*. V U definiramo podprostor U', generiran z vektorji oblike:

$(x, y+z) - (x,y) - (x,z)$, ← funkcija, ki $(x,y+z)$ slika v 1, ostale pa v 0

$(x+y, z) - (x,z) - (y,z)$,

$(\alpha x, y) - \alpha (x,y)$,

$(x, \alpha y) - \alpha (x,y)$

$U/U' \cong V \otimes W$

$v_i \otimes w_j \longleftrightarrow (v_i, w_j) + U'$

*Ta prostor ima bazo $V \times W$. Baza so vse funkcije, ki en par (v,w) slikajo v 1, ostale pa v 0.

$\mathbb{F}^{m \times n} \cong \mathbb{F}^m \otimes \mathbb{F}^n$

$e_i \otimes e_j \longleftrightarrow E_{ij}$

Če je $f: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to U$ n-linearna preslikava in je $\dim V_i = m_i$ za $i = 1, \ldots, n$ in $\dim U = p$, potem na enak način kot prej preslikavi f priredimo $(n+1)$-razsežno tabelo števil velikosti $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n \times p$, ki enolično določa f. Tej $(n+1)$-razsežni tabeli rečemo tenzor reda $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n \times p$. Take tenzorje seštevamo po komponentah in množimo s skalarjem po komponentah. Za ti operaciji tenzorji tvorijo vektorski prostor, ki ga označimo s $\mathbb{F}^{m_1} \otimes \mathbb{F}^{m_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{F}^{m_n} \otimes \mathbb{F}^p$. Dimenzija tega prostora je $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n \cdot p$.

LASTNOSTI ANTISIMETRIČNIH N-LINEARNIH PRESLIKAV

Naj bo $f: V^n \to U$ antisimetrična n-linearna preslikava. Predpostavimo še, da je $2 \neq 0$ v $\mathbb{F}$ ($\Leftrightarrow \mathbb{F}$ ne vsebuje $\mathbb{Z}_2$). Potem velja:

(1) Če je $v_i = v_j$ za neka $i \neq j$, potem je $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Dokaz: $f(v_1, \ldots, \overset{i}{v_i}, \ldots, \overset{j}{v_j}, \ldots, v_n) \overset{\text{antisimetričnost}}{=}$
$$= -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \overset{\text{enaka sta}}{=}$$
$$= -f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot f(v_1, \ldots, v_n) = 0 \quad \text{ker } 2 \neq 0$$
$$\Rightarrow f(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

(2) $f(v_1, \ldots, \overset{i}{v_i + \alpha v_j}, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, \overset{i}{v_i}, \ldots, v_n)$ za vse $i \neq j$ in vse $\alpha \in \mathbb{F}$

Dokaz: $f(v_1, \ldots, v_i + \alpha v_j, \ldots, v_n) \overset{\text{n-linearnost}}{=}$
$$= f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \alpha \cdot \underbrace{f(v_1, \ldots, \overset{i}{v_j}, \ldots, \overset{j}{v_j}, \ldots, v_n)}_{= 0 \text{ po } (1)}$$

(3) Če je $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$, potem je $f(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_2}) = s(\pi) \cdot f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Dokaz: Z indukcijo na število transpozicij, ki jih potrebujemo za zapis π kot produkt transpozicij.

Če je π transpozicija, to sledi iz definicije antisimetričnosti in dejstva, da je znak transpozicije enak -1.

Predpostavimo, da je π produkt m transpozicij in da trditev velja za vse permutacije, ki jih lahko zapišemo kot produkt $m-1$ transpozicij.

Naj bo $\pi = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_m$ in $\rho = \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_m$, kjer so τ_i transpozicije. Naj bo $\rho = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1' & \cdots & i_n' \end{pmatrix}$ in $\pi = \tau_1 \circ \rho$.

$$f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) = -f(v_{i_1'}, \ldots, v_{i_n'}) \overset{\text{I.P.}}{=} -s(\rho) \cdot f(v_1, \ldots, v_n) =$$
$$= s(\tau_1) \cdot s(\rho) \cdot f(v_1, \ldots, v_n) = s(\tau_1 \circ \rho) \cdot f(v_1, \ldots, v_n) =$$
$$= s(\pi) \cdot f(v_1, \ldots, v_n)$$

DEFINICIJA IN LASTNOSTI DETERMINANTE

Najprej naj bo $2 \neq 0$ v $\mathbb{F}$. Naj bo $f: \mathbb{F}^{n \times n} = (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ antisimetrična n-linearna preslikava.

$$f(A) = f(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}) =$$
$$= f(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, \ldots,$$
$$a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n) =$$
$$= \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n,n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$$

Primer: $n=2$: $f(a_{11}e_1 + a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2) =$
$$= a_{11}a_{12} f(e_1, e_1) + a_{11}a_{22} f(e_1, e_2) +$$
$$+ a_{21}a_{12} f(e_2, e_1) + a_{21}a_{22} f(e_2, e_2)$$

Če je $i_j = i_k$ za neka $j \neq k$, je $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0$, ker je f antisimetrična in $2 \neq 0$.

V zadnji vsoti so torej neničelni kvečjemu tisti členi, kjer je $(i_1, \ldots, i_n)$ permutacija števil od 1 do n, torej takrat, ko obstaja permutacija π, da je $i_1 = \pi(1)$, $i_2 = \pi(2)$, ..., $i_n = \pi(n)$.

$$\Rightarrow f(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} f(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)}) \overset{\text{lastnost 3}}{=}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} \cdot f(e_1, \dots, e_n) =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\pi \in S_n} s(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} \right)}_{\text{neodvisno od } f} \cdot \underbrace{f(I)}_{\text{neodvisno od } A}$$

Definicija: Naj bo $\mathbb{F}$ poljubno polje. Preslikavo $\det : \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{F}$, definirano s predpisom $\det(A) = \det[a_{ij}] =$
$= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi)\, a_{\pi(1),1}\, a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n}$, imenujemo **determinanta**.

Oznaka: $\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Primer: $n = 2$

$S_2 = \{id, (12)\}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = s(id) \cdot a_{11} \cdot a_{22} + s((12)) \cdot a_{21} \cdot a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

To je običajna 2×2 determinanta.

Primer: $n = 3$

$S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

To je običajna 3×3 determinanta.

Na začetku smo pokazali:

Trditev: Če je $2 \neq 0$ v $\mathbb{F}$ in je $f : \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{F}$ antisimetričen n-linearen funkcional, potem je $f(A) = \det A \cdot f(I)$ za vsak $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

Primer: Mešani produkt je determinanta. Trditev nam pove, da je vsak trilinearen antisimetričen funkcional na $\mathbb{R}^3$ večkratnik mešanega produkta, torej preslikave $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ v $\mathbb{R}$, ki slika $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \mapsto (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$.

Trditev: Če je $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, je
$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

Dokaz: Členi $a_{1,\sigma(1)}, \ldots, a_{n,\sigma(n)}$ in členi $a_{\sigma^{-1}(1),1}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(n),n}$ so isti, le v drugem vrstnem redu.

$$\Rightarrow a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n} \quad \text{za vsak } \sigma$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma)\, a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n} \overset{\pi = \sigma^{-1}}{=}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi^{-1})\, a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} \overset{s(\pi^{-1}) = s(\pi)}{=} \sum_{\pi \in S_n} s(\pi)\, a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} =$$

$$= \det A$$

Posledica: $\det A = \det A^T$

Iz definicije očitno sledi tudi:

Če ima matrika en stolpec ničeln ali eno vrstico ničelno, potem je determinanta matrike enaka 0.

Spomnimo se:

Matrika $A = [a_{ij}]$ je **zgornje trikotna**, če je $a_{ij} = 0$ za vse i in j, za katere je $i > j$. Matrika je **spodnje trikotna**, če je $a_{ij} = 0$ za vse i in j, za katere je $i < j$.

Trditev: Determinanta zgornje trikotne matrike je enaka produktu njenih diagonalnih členov. Isto velja za spodnje trikotne matrike.

Dokaz: Zaradi simetrije trditev dokažimo le za zgornje trikotne matrike. Za spodnje je dokaz enak.

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} s(\pi)\, a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$$

Ker je matrika A zgornje trikotna, je $a_{ij} = 0$ če $i > j$. $\Rightarrow a_{\pi(i),i} = 0$ če je $\pi(i) > i$.

Če za katerikoli $i \in \{1, \dots, n\}$ velja $\pi(i) > i$, je torej produkt $a_{\pi(1),1}\, a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n} = 0$.

V vsoti iz definicije determinante bodo torej neničelni kvečjemu tisti členi, kjer je $\pi(i) \leq i$ za vsak i.

$\pi(1) \leq 1 \Rightarrow \pi(1) = 1$ ker je π permutacija

$\pi(2) \leq 2$ in $\pi(2) \neq 1 \Rightarrow \pi(2) = 2$

$\vdots$

$\pi(i) = i$ za vsak i, oziroma $\pi = id$

$$\det A = \cancelto{1}{s(id)}\, a_{1,1}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$
$$\det A = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

Posledica: Determinanta diagonalne matrike je produkt diagonalnih členov.

Trditev in posledico lahko s podobnim dokazom posplošimo tudi na bločno trikotne (in diagonalne) matrike.

Če so $A_1, A_2, \dots, A_k$ kvadratne matrike poljubnih velikosti, je:

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & A_k \end{bmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \ldots \cdot \det A_k$$

← bločno zgornje trikotna matrika

Enaka formula velja tudi za bločno spodnje trikotne matrike in za bločno diagonalne matrike.

Trditev: Determinanta je n-linearen antisimetričen funkcional.

Dokaz: Antisimetričnost:

Naj bo B matrika, ki jo dobimo tako, da v A zamenjamo prvi in drugi stolpec, in naj bo $\tau = (1\ 2)$.

$$\det B = \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) \cdot b_{\pi(1),1} b_{\pi(2),2} \cdots b_{\pi(n),n} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) \cdot a_{\pi(1),2} a_{\pi(2),1} a_{\pi(3),3} \cdots a_{\pi(n),n} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) \cdot a_{\pi(\tau(1)),1} a_{\pi(\tau(2)),2} \cdots a_{\pi(\tau(n)),n} \overset{g = \pi \circ \tau}{=}$$

$$= \sum_{g \in S_n} s(g\tau)\, a_{g(1),1} a_{g(2),2} \cdots a_{g(n),n} =$$

$$\overset{s(\tau)}{=} -1 \cdot \sum_{g \in S_n} a_{g(1),1} a_{g(2),2} \cdots a_{g(n),n} =$$

$$= -\det A$$

Isti dokaz pokaže, da se determinanti spremeni predznak, če zamenjamo poljubna dva stolpca.

n-linearnost:

Fiksirajmo stolpce $A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}$ matrike A in naj bo $A^{(i)} = \beta b + \gamma c$, kjer je $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & \beta b_1 + \gamma c_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & \beta b_n + \gamma c_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(i-1),i-1} \cdot (\beta b_{\pi(i)} + \gamma c_{\pi(i)}) \cdot a_{\pi(i+1),i+1} \cdots =$$

$$= \beta \cdot \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(i-1),i-1} \cdot b_{\pi(i)} \cdot a_{\pi(i+1),i+1} \cdots a_{\pi(n),n} +$$

$$+ \gamma \cdot \sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(i-1),i-1} \cdot c_{\pi(i)} \cdot a_{\pi(i+1),i+1} \cdots a_{\pi(n),n} =$$

$$= \beta \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} +$$

$$+ \gamma \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & c_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & c_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \quad \square$$

Posledica: Če nekemu stolpcu matrike prištejemo večkratnik nekega drugega stolpca, se determinanta ne spremeni. Enako velja za vrstice.

Dokaz: To v primeru, ko je $2 \neq 0$ sledi iz prejšnje trditve in dejstva, da za poljubno antisimetrično n-linearno preslikavo f velja:

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_n)$$
za vse $j \neq i$ in vse $\alpha \in \mathbb{F}$

Če je $2=0$, to dokažemo z računom, pri čemer vsoto $\sum_{\pi \in S_n} s(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$ razdelimo na vsoto po sodih in vsoto po lihih permutacijah.

Iz trditve o večlinearnosti in antisimetričnosti sledi:

1) Determinanti se spremeni predznak, če zamenjamo dve vrstici ali dva stolpca.

2) Determinanta se pomnoži s skalarjem c, če neko vrstico ali stolpec pomnožimo s c.

3) Determinanta se ne spremeni, če nekemu stolpcu prištejemo večkratnik nekega drugega stolpca. Enako za vrstice.

Determinanto torej lahko izračunamo tako, da na matriki izvajamo elementarne operacije na vrsticah ali stolpcih, enako kot pri računanju ranga, in matriko prevedemo na zgornje trikotno matriko. Determinanta te je produkt diagonalnih členov.

Primer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) = 6$$

Posledica: $n \times n$ matrika A je obrnljiva $\iff \det A \neq 0$

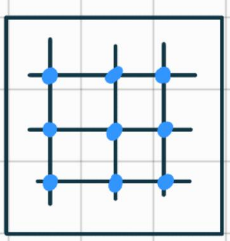
Dokaz: Pri računanju ranga smo pokazali, da matriko A lahko z elementarnimi operacijami na vrsticah in stolpcih prevedemo na matriko $A_0 = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \ddots 1}^{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Pri elementarnih operacijah se determinanta pomnoži z neničelnim skalarjem. $\Rightarrow$ Obstaja $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, da je $\det A = c \cdot \det A_0$.

$\det A \neq 0 \iff \det A_0 \neq 0 \iff r = n \iff \operatorname{rang} A = n \iff$
$\iff A$ je obrnljiva. $\square$

Definicija: Naj bo $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ in $k \in \{1, 2, \dots, \min\{n, m\}\}$.
Minor reda k matrike A je determinanta podmatrike, ki jo dobimo, da si v A izberemo k vrstic in stolpcev, podmatriko pa sestavljajo členi na križiščih teh vrstic in stolpcev.

Primer: $k = 3$



Determinanta podmatrike iz označenih členov je minor reda 3.

Minorji reda 1 so členi matrike, minor reda n matrike $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ pa je $\det A$.

Glavni minor je minor, kjer si izberemo istoležne vrstice in stolpce.

Vodilni minor je minor, kjer si izberemo prvih k vrstic in stolpcev.

Izrek: Rang neničelne matrike $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ je enak najvišjemu redu neničelnih minorjev te matrike.

Dokaz: Naj bo $r = \operatorname{rang} A$. Potem v A obstaja r linearno neodvisnih stolpcev. Ti stolpci tvorijo matriko $B \in \mathbb{F}^{m\times r}$, ki je ranga r. V B zato obstaja r linearno neodvisnih vrstic, ki jih zložimo v matriko $C \in \mathbb{F}^{r\times r}$, ki je še vedno ranga r. $\Rightarrow$ C je obrnljiva $\Rightarrow$ $\Rightarrow \det C \neq 0$, po konstrukciji pa je C minor matrike A.

Pokazati moramo še, da so vsi minorji reda k, kjer je $k > r$, enaki 0. Recimo, da to ni res. Potem obstaja podmatrika $D \in \mathbb{F}^{k\times k}$ matrike A, da je $\det D \neq 0$. $\Rightarrow D$ je obrnljiva $\Rightarrow \operatorname{rang} D = k \Rightarrow$ stolpci v D so linearno neodvisni. Ustrezni stolpci v matriki A so potem tudi linearno neodvisni, kar je v protislovju s pogojem, da je $k > \operatorname{rang} A$. $\square$

MULTIPLIKATIVNOST DETERMINANTE

Izrek: Determinanta je multiplikativen funkcional. To pomeni, da je za vsaki matriki $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ velja $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Dokaz: Samo v primeru, ko je $2 \neq 0$.

Naj bo $f : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ preslikava, definirana s predpisom $f(v_1, \dots, v_n) = \det[Av_1, \dots, Av_n]$.

f je n-linearen antisimetričen funkcional na $\mathbb{F}^n$, za vse $v_1, \dots, v_n$ velja: (ker $2 \neq 0$)

$$f(v_1, \dots, v_n) = \det[v_1, \dots, v_n] \cdot f(e_1, \dots, e_n)$$

$$\det[Av_1, \dots, Av_n] = \det[v_1, \dots, v_n] \cdot \det[\underset{A^{(1)}}{\underset{\parallel}{Ae_1}}, \dots, Ae_n].$$

Za vsak i naj bo $v_i = B^{(i)}$. Dobimo:

$$\underbrace{\det[AB^{(1)}, \dots, AB^{(n)}]}_{\det(AB)} = \underbrace{\det[B^{(1)}, \dots, B^{(n)}]}_{\det B} \cdot \underbrace{\det[A^{(1)}, \dots, A^{(n)}]}_{\det A}$$

Če $2=0$, z elementarnimi operacijami matriko $\begin{bmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{bmatrix}$ prevedemo na $\begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{bmatrix}$ in upoštevamo formulo za determinanto bločno trikotne matrike.

Posledica: $\det(AB) = \det(BA)$ za vse $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$

Posledica: Če je A obrnljiva, je $\det A \neq 0$ in $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Dokaz: $AA^{-1} = I$

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \det(A^{-1})$$

Posledica: Podobni matriki imata enako determinanto.

Dokaz: $\det(P^{-1}AP) = (\det P)^{-1} \det A \det P = \det A$

Zaradi te posledice je dobra naslednja definicija.

Definicija: Determinanta endomorfizma $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ je $\det A$, kjer je A matrika, ki pripada $\mathcal{A}$ glede na poljubno bazo prostora V $(A = \mathcal{A}_{B_V, B_V})$.
Oznaka: $\det \mathcal{A}$

RAZVOJ DETERMINANTE

Naj bo $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ in $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Naj bo A_{ij} podmatrika matrike A, ki jo dobimo tako, da v A zbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

Označimo $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$, kar imenujemo **poddeterminanta** matrike A.

Matriki $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ rečemo **prirejenka** matrike A.

Primer: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_{11} = (-1)^2 \cdot \det A_{11} = 2$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_{12} = (-1)^3 \cdot \det A_{12} = -1$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_{13} = (-1)^3 \cdot \det A_{13} = -1$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_{21} = (-1)^3 \cdot \det A_{21} = 1$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_{22} = (-1)^4 \cdot \det A_{22} = 1$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_{23} = (-1)^5 \cdot \det A_{23} = 1$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_{31} = 1$$

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_{32} = -2$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{a}_{33} = 1$$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Izrek: Za vsako matriko $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ velja:

1) $\det A = a_{1j}\widetilde{a}_{1j} + a_{2j}\widetilde{a}_{2j} + \dots + a_{nj}\widetilde{a}_{nj}$ za vsak j (razvoj po j-tem stolpcu)

2) $\det A = a_{i1}\widetilde{a}_{i1} + a_{i2}\widetilde{a}_{i2} + \dots + a_{in}\widetilde{a}_{in}$ za vsak i (razvoj po i-ti vrstici)

Dokaz: Zaradi enakosti $\det A = \det(A^T)$ lahko enakost dokažemo samo za stolpce.

1. poseben primer:

$$A^{(j)} = e_j$$

$$\det\left[A^{(1)}, \dots, A^{(j-1)}, e_j, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}\right] =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} s(\pi)\, a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} =$$

če $i \neq j$, je $a_{ij} = 0$
$a_{jj} = 1$

$$= \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi(j)=j}} s(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(j-1),j-1} \cdot a_{\pi(j+1),j+1} \cdots a_{\pi(n),n} =$$

$$= \det A_{jj} = \widetilde{a}_{jj}$$

To velja za vsak j.

2. poseben primer:

$A^{(i)} = e_j$ za $i \neq j$

Razvijemo po i-tem stolpcu in upoštevamo 1. poseben primer.

$$\det[A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, e_j, A^{(i+1)}, \dots, A^{(j)}, \dots, A^{(n)}] =$$

$$= -\det[A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(i+1)}, e_j, A^{(i+2)}, \dots, A^{(n)}] =$$

$$= \det[A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(i+1)}, A^{(i+2)}, e_j, \dots, A^{(n)}] =$$

$$= \dots =$$

$$\begin{array}{cccc} & j-1 & j & j+1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$= (-1)^{j-i} \cdot \det[A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(j)}, e_j, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}] =$$

Iz te matrike zbrišemo j-ti stolpec in vrstico, torej iz originalne matrike zbrišemo i-ti stolpec in j-to vrstico

1. poseben primer

$$= (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ji} =$$

$$= \tilde{a}_{ji}$$

To velja za vse i in j.

Splošen primer:

$$A^{(j)} = a_{1j} e_1 + a_{2j} e_2 + \dots + a_{nj} e_n$$

Zaradi n-linearnosti je:

$$\det A =$$

$$= \det[A^{(1)}, \dots, A^{(j-1)}, a_{1j} e_1 + \dots + a_{nj} e_n, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}] =$$

$$= a_{1j} \det[A^{(1)}, \dots, A^{(j-1)}, e_1, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}] +$$

$+ a_{2j} \det [A^{(1)}, \dots, A^{(j-1)}, e_2, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}] +$

$+ \dots + a_{nj} \det [A^{(1)}, \dots, A^{(j-1)}, e_n, A^{(j+1)}, \dots, A^{(n)}] =$

2. poleden primer

$= a_{1j} \tilde{a}_{1j} + a_{2j} \tilde{a}_{2j} + \dots + a_{nj} \tilde{a}_{nj}$ $\square$

Primer: $A = \begin{bmatrix} 1^{+} & 0^{-} & -1^{+} \\ 1^{-} & 1^{+} & 1^{-} \\ 0^{+} & -1^{-} & 0^{+} \end{bmatrix}$

Determinanto razvijmo po 1. vrstici.

$$\det A = 1 \cdot \tilde{a}_{11} - 0 \cdot \tilde{a}_{12} + (-1) \cdot \tilde{a}_{13} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3$$

Primer: $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0^{+} & 1^{-} & 0^{+} & 0^{-} \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0^{+} & 0^{-} & 2^{+} \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) = 14$$

Razvoj po i-ti vrstici: $\det A = a_{i1} \tilde{a}_{i1} + a_{i2} \tilde{a}_{i2} + \dots + a_{in} \tilde{a}_{in}$
Razvoj po j-tem stolpcu: $\det A = a_{1j} \tilde{a}_{1j} + a_{2j} \tilde{a}_{2j} + \dots + a_{nj} \tilde{a}_{nj}$

Izrek: Za vsako kvadratno matriko $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ velja:
$$A \tilde{A}^T = \tilde{A}^T A = (\det A) \cdot I$$

Dokaz: $\det A = a_{i1} \tilde{a}_{i1} + a_{i2} \tilde{a}_{i2} + \dots + a_{in} \tilde{a}_{in}$

$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ so elementi i-te vrstice matrike A
$\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{in}$ so elementi i-tega stolpca matrike $\tilde{A}^T$

Po definiciji produkta matrik od tod sledi, da je člen v $A\tilde{A}^T$, ki leži na križišču i-te vrstice in i-tega stolpca enak $\det A$.

Če bi gledali razvoj po stolpcih, bi dobili, da so vsi diagonalni členi matrike $\tilde{A}^T A$ enaki $\det A$.

Naj bo $i \neq j$. Oglejmo si $\det[A^{(1)}, \dots, \overset{j}{A^{(i)}}, \dots, \overset{i}{A^{(i)}}, \dots, A^{(n)}]$.
Ker imamo dva stolpca enaka, je determinanta enaka 0.

Po razvoju po j-tem stolpcu je ta determinanta enaka:
$\tilde{a}_{1j} a_{1i} + \tilde{a}_{2j} a_{2i} + \dots + \tilde{a}_{nj} \cdot a_{ni}$

$a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ so elementi i-tega stolpca A
$\tilde{a}_{1j}, \tilde{a}_{2j}, \dots, \tilde{a}_{nj}$ so elementi j-te vrstice $\tilde{A}^T$

Ta vsota je torej člen v $\tilde{A}^T A$ na križišču j-te vrstice in i-tega stolpca.

Matrika $\tilde{A}^T A$ ima ničle povsod, razen na diagonali.

Podobno s pomočjo razvoja neke matrike z dvema enakima vrsticama po ustrezni vrstici ugotovimo, da ima $A\tilde{A}^T$ ničle izven diagonale.

$$\Rightarrow A\tilde{A}^T = \tilde{A}^T A = \begin{bmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{bmatrix} = (\det A) \cdot I$$

Posledica: Če je $\det A \neq 0$, potem je A obrnljiva (to že vemo) in lahko izračunamo inverz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T$$

Dokaz: $A\tilde{A}^T = \tilde{A}^T A = \det A \cdot I \quad / : \det A$

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T \cdot A = I$$

Primer: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Uporaba pri reševanju sistemov enačb:

Imejmo sistem enačb $Ax = b$, kjer je $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ in $b \in \mathbb{F}^n$.
Ta sistem ima enolično rešitev $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ je obrnljiva.
Rešitev je v tem primeru $x = A^{-1} \cdot b$.

To napišimo po komponentah. Naj bo $A = [a_{ij}]$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$
in $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

j-ta komponenta vektorja $A^{-1}b$

$$x_j = (A^{-1}b)_j = \left(\frac{1}{\det A}\tilde{A}^T b\right) = \frac{1}{\det A}(\hat{A}^T b) =$$

$$= \frac{1}{\det A}\left(\tilde{a}_{1j} b_1 + \tilde{a}_{2j} b_2 + \ldots + \tilde{a}_{nj} \cdot b_n\right) =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \det\left[A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}\right]$$

Dokazali smo:

Izrek (Cramerjeva formula): Naj bo $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ obrnljiva matrika in $b \in \mathbb{F}^n$. Rešitev sistema $Ax = b$ je potem enolična in sicer enaka $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, kjer je:

$$x_j = \frac{\det\left[A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}\right]}{\det A}$$

za vsak $j = 1, \ldots, n$.

Primer:
$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Rešitev:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

če $ae - bd \neq 0$.