PREHOD NA NOVI BAZI

Naj bo $\mathcal{A} : V \to W$ linearna preslikava. Spomnimo se, kako definiramo matriko linearne preslikave. Izberemo si bazi $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ in $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$. Vsak vektor $v_j \in B_V$ preslikamo s preslikavo $\mathcal{A}$ in sliko razvijemo po bazi B_W: $\mathcal{A} v_j = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots + a_{mj} w_m$. Matriko $A = \mathcal{A}_{B_W, B_V}$ dobimo tako, da koeficiente a_{ij} napišemo v stolpce: $A = [a_{ij}]$.

Matrika A ni odvisna samo od preslikave $\mathcal{A}$, ampak tudi od baz B_V in B_W. Recimo, da si zberemo še drugi dve bazi $B_V' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ in $B_W' = \{w_1', \dots, w_m'\}$ in definiramo matriko $A' = \mathcal{A}_{B_W', B_V'}$. Zanima nas, v kakšni zvezi sta A in A'.

Elemente iz baze B_V' lahko razvijemo po bazi B_V:

$$
\begin{aligned}
id(v_1') &= v_1' = p_{11} v_1 + p_{21} v_2 + \dots + p_{n1} v_n \\
id(v_2') &= v_2' = p_{12} v_1 + p_{22} v_2 + \dots + p_{n2} v_n \\
&\vdots \\
id(v_n') &= v_n' = p_{1n} v_1 + p_{2n} v_2 + \dots + p_{nn} v_n
\end{aligned}
$$

za neke $p_{ij} \in \mathbb{F}$

Matriko $P = [p_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ imenujemo prehodna matrika med bazama $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_V'$. Prehodno matriko torej dobimo tako, da elemente iz $\mathcal{B}_V'$ razvijemo po bazi $\mathcal{B}_V$ in koeficiente napišemo v stolpce. P je matrika, ki pripada identiteti glede na dve različni bazi $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_V'$: $P = id_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V'}$.

Od tod sledi, da je P obrnljiva in $P^{-1} = id_{\mathcal{B}_V', \mathcal{B}_V}$. Prepričajmo se, da je to res:

$$P \cdot P^{-1} = id_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V'} \cdot id_{\mathcal{B}_V', \mathcal{B}_V} = (id \circ id)_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V} = id_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V} = I$$
$$P^{-1} \cdot P = id_{\mathcal{B}_V', \mathcal{B}_V} \cdot id_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V'} = (id \circ id)_{\mathcal{B}_V', \mathcal{B}_V'} = id_{\mathcal{B}_V', \mathcal{B}_V'} = I$$

Če je $V = \mathbb{F}^n$ in je $\mathcal{B}_V$ standardna baza, potem so stolpci prehodne matrike $id_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V'}$ natanko elementi baze $\mathcal{B}_V'$.

Trditev: Naj $\mathcal{A}: V \to W$ linearna preslikava, naj bosta $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_V'$ bazi za V ter $\mathcal{B}_W$ in $\mathcal{B}_W'$ bazi za W in definirajmo matriki preslikave $\mathcal{A}$ glede na različne baze: $A = \mathcal{A}_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}$, $A' = \mathcal{A}_{\mathcal{B}_W', \mathcal{B}_V}$. Naj bosta $P = id_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V'}$ in $Q = id_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_W'}$ prehodni matriki. Potem velja:

$$\boxed{A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P}$$

Dokaz:
$$\begin{aligned}
Q^{-1}AP &= (id_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_W'})^{-1} \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V} \cdot id_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V'} \\
&= id_{\mathcal{B}_W', \mathcal{B}_W} \cdot (\mathcal{A} \circ id)_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V'} \\
&= id_{\mathcal{B}_W', \mathcal{B}_W} \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V'} \\
&= (id \circ \mathcal{A})_{\mathcal{B}_W', \mathcal{B}_V'} \\
&= \mathcal{A}_{\mathcal{B}_W', \mathcal{B}_V'} \\
&= A'
\end{aligned}$$

Opomba: $A' = id_{\mathcal{B}_W', \mathcal{B}_W} \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V} \cdot id_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_V'}$

Opomba: $\mathcal{A}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \cdot \mathcal{B}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}$

Primer: Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2$ naj bo dana s predpisom $\mathcal{A}(x,y,z) := (x,y)$. Določi matriko preslikave $\mathcal{A}$ glede na bazi $\{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\}$ za $\mathbb{F}^3$ in $\{(4,3),(3,2)\}$ za $\mathbb{F}^2$.

$$B_V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B_{V'} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Naj bo S standardna baza za $\mathbb{F}^3$ in S' standardna baza za $\mathbb{F}^2$. Potem je:

$$\mathcal{A}_{S',S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Po trditvi je $\mathcal{A}_{B',B} = id_{B',S'} \cdot \mathcal{A}_{S',S} \cdot id_{S,B}$.

Poiščimo prehodni matriki $id_{S,B}$ in $id_{B',S'}$.

$$id_{S,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Za $id_{B',S'}$ najprej poiščemo $id_{S',B'}$.

$$id_{S',B'} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Upoštevamo, da je $id_{B',S'} = (id_{S',B'})^{-1}$.

$$\mathrm{id}_{B',S'} = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4\cdot 2-3\cdot 3}\cdot\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{bmatrix}$$

$$A_{B',B} = \overset{\mathrm{id}_{B',S'}}{\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{bmatrix}}\cdot\overset{A_{S',S}}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}\cdot\overset{\mathrm{id}_{S,B}}{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix}-2 & 3 & 0\\ 3 & -4 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-5 & -2 & 1\\ 7 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

Definicija: Matrika $A' \in \mathbb{F}^{m\times n}$ je ekvivalentna matriki $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, kadar obstajata obrnljivi matriki $Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$ in $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, da velja $A' = Q^{-1}\cdot A\cdot P$. Matriki, ki pripadata isti linearni preslikavi, sta torej ekvivalentni.

A' je ekvivalentna A, če obstajata obrnljivi matriki P in Q, da je $A' = Q^{-1}AP$. Oznaka $A' \sim A$

Trditev: $\sim$ je ekvivalenčna relacija

Dokaz: Refleksivnost:

$A = I^{-1}\cdot A\cdot I \Rightarrow A\sim A$

Simetričnost:

Če je $A\sim B$, je $A = Q^{-1}BP$ za neki obrnljivi P in Q.
Potem sta tudi P^{-1} in Q^{-1} obrnljivi in velja:

$B = QAP^{-1} = (Q^{-1})^{-1}AP^{-1} \Rightarrow B\sim A$

Tranzitivnost:
Če je $A \sim B$ in $B \sim C$ obstajajo obrljive matrike P, Q, R, S, da je $A = Q^{-1}BP$ in $B = S^{-1}CR$. Matriki RP in SQ sta potem obrljivi in velja:
$$A = Q^{-1}BP = Q^{-1}S^{-1}CRP = (SQ)^{-1} \cdot C \cdot (R \cdot P)$$
$\Rightarrow A \sim C$

Trditev: Matriki A in A' sta ekvivalentni natanko takrat, ko obstaja linearna preslikava $\mathcal{A}: V \to W$ med dvema vektorskima prostoroma, tako da sta A in A' obe matriki preslikave $\mathcal{A}$ (morda glede na različne baze).

Dokaz:
($\Leftarrow$) Že vemo

($\Rightarrow$) Naj bosta A in A' ekvivalentni $m \times n$ matriki.

Definirajmo linearno preslikavo $\mathcal{A}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ s predpisom $\mathcal{A}x = Ax$. Naj bo S_n standardna baza prostora $\mathbb{F}^n$ in S_m standardna baza prostora $\mathbb{F}^m$. Vemo, da preslikavi $\mathcal{A}$ glede na standardni bazi pripada matrika A.

$$\mathcal{A}_{S_m, S_n} = A$$

Ker sta A in A' ekvivalentni, obstajata obrljivi matriki $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ in $Q \in \mathbb{F}^{m \times m}$, da je $A' = Q^{-1}AP$.

Definirajmo $B_m := Q(S_m)$ in $B_n = Q(S_n)$. Q in P sta obrljivi matriki, torej sta njuni linearni preslikavi bijektivni na $\mathbb{F}^n$ oziroma $\mathbb{F}^m$, torej slikata baze v baze, zato je B_m baza za $\mathbb{F}^m$, B_n pa baza za $\mathbb{F}^n$.

$$\mathcal{A}_{B_m,B_n} = (id \circ \mathcal{A} \circ id)_{B_m,B_n} = id_{B_m,S_m} \cdot \mathcal{A}_{S_m,S_n} \cdot id_{S_n,B_n} =$$
$$= Q^{-1} \cdot A \cdot P = A'$$

elementi B_n so stolpci matrike P

Definicija: Naj bo $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. **Rang matrike A** je rang linearne preslikave $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$.
$$x \mapsto Ax$$

Jedro matrike A je jedro te linearne preslikave.
Slika matrike A je slika te linearne preslikave.

Oznaka: $\operatorname{rang} A$, $\ker A$, $\operatorname{im} A$

Trditev: Naj bo $\mathcal{A} : V \to W$ linearna preslikava in A matrika te preslikave glede na poljubni bazi. Potem je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \mathcal{A}$.

Dokaz: Naj bo $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ baza za V in naj bo $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ baza za W. Potem vemo, da sta

$$\Phi_n : \mathbb{F}^n \to V \qquad \text{in} \qquad \Phi_m : \mathbb{F}^m \to W$$
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mapsto a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \mapsto b_1 w_1 + \dots + b_m w_m$$

izomorfizma. Bazi B_V in B_W smo izbrali tako, da je $A = \mathcal{A}_{B_W,B_V}$. Matriko A identificiramo s preslikavo $A : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$.
$$x \mapsto Ax$$

Potem komutira diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{F}^m \\ \Phi_n \downarrow & & \downarrow \Phi_m \\ V & \xrightarrow[\mathcal{A}]{} & W \end{array}$$

Φ_n in Φ_m sta izomorfizma.

Φ_n bijekcija

$$\operatorname{im} A = \operatorname{im}(\Phi_m^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \Phi_n) = \operatorname{im}(\Phi_m^{-1} \circ \mathcal{A}) = \Phi_m^{-1}(\operatorname{im} \mathcal{A})$$
$$\Rightarrow \dim \operatorname{im} A = \dim \Phi_m^{-1}(\operatorname{im} \mathcal{A}) = \dim \operatorname{im} \mathcal{A}$$
$$\Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \mathcal{A} \qquad \square$$

Φ_m^{-1} izomorfizem

Posledica: Ekvivalentne matrike imajo enak rang.

Dokaz: Če je $A' \sim A$, potem A' in A pripadata isti linearni preslikavi $\mathcal{A}$. Po prejšnji trditvi je $\operatorname{rang} A' = \operatorname{rang} \mathcal{A} = \operatorname{rang} A$.

Posledica: Množenje z obrnljivo matriko z leve ali z desne ohranja rang.

Dokaz: Če je P obrnljiva, potem je $A \cdot P = I^{-1} \cdot A \cdot P$, torej je $A \cdot P \sim A$. Po prejšnji posledici je $\operatorname{rang} AP = \operatorname{rang} A$.
Dokaz, ko z obrnljivo matriko množimo z desne, je enak.

Izrek: Vsaka matrika $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je ekvivalentna neki matriki oblike $\begin{bmatrix} 1 \ddots 1 & 0 \\ 0 & 0 \ddots 0 \end{bmatrix}$, oziroma v bločni obliki $\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} & \end{array}$.

Pri tem je r enolično določen z matriko A in velja $r = \operatorname{rang} A$. Sledi tudi $\operatorname{rang} A \leq \min\{m, n\}$.

Dokaz: Naj bo $A \neq 0$, sicer izrek očitno velja.

Naj bo $\{w_1, \dots, w_r\}$ baza za $\operatorname{im} \mathcal{A}$. Po definiciji ranga sledi $r = \operatorname{rang} A$. Očitno sledi $r \leq m$. Iz dimenzijske enačbe $\dim \mathbb{F}^n = \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A$, $n = \dim \ker A + r$, sledi tudi $r \leq n$, torej je $r \leq \min\{m, n\}$.

Vektorji $\{w_1, \dots, w_r\}$ so lin. neodvisni, zato jih lahko dopolnimo do baze $\{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\} = \mathcal{B}_m$ za $\mathbb{F}^m$.

V dokazu dimenzijske enačbe smo pokazali, da obstaja baza $\mathcal{B}_n = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ za $\mathbb{F}^n$, da velja $Av_i = w_i$ za $i = 1, \dots, r$ in $Av_j = 0$ za $j > r$.

$$A_{B_m,B_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0\,0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0\,1 & 0 \\ & & 0\,0 & \\ 0 & 0 & & \cdots 0 \end{bmatrix}$$

r

Dokažimo še enoličnost r.

Recimo, da velja tudi $A \sim \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ za nek $s \leq \min\{m,n\}$.

Naj bo $X \in \mathbb{F}^{k \times \ell}$ poljuben in naj bodo $e_1, \dots, e_\ell$ standardna baza.

$$\operatorname{im} X = \operatorname{Lin}\{X \cdot e_1, \dots, X \cdot e_\ell\} = \operatorname{Lin}\{X^{(1)}, \dots, X^{(\ell)}\}$$

V našem primeru je $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \dim\left(\operatorname{im}\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$
$= \dim \operatorname{Lin}\{e_1, \dots, e_s\} = s.$

$$A \sim \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = s$$

$$\Rightarrow r = s$$

Dokazali smo tudi:

Trditev: Slika matrike je enaka linearni ogrinjači stolpcev.

Posledica: Matriki (iste velikosti) sta ekvivalentni natanko takrat, ko imata enak rang.

Dokaz:

($\Rightarrow$) Že vemo.

($\Leftarrow$) Naj bo $r = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A'$. Po izreku je $A \sim \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $A' \sim \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Zaradi tranzitivnosti relacije $\sim$ je $A \sim A'$.

Lema: Če je $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ obrnljiva, je tudi P^T obrnljiva.

Dokaz: $P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = I \quad / ^T$

$(P^{-1})^T \cdot P^T = P^T \cdot (P^{-1})^T = I$

$\Rightarrow P^T$ je obrnljiva in $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$.

Posledica: Za vsako matriko je rang A = rang A^T.

Dokaz: Naj bo r = rang A in $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Potem je $A \sim \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. To pomeni, da obstajata obrnljivi matriki $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ in $Q \in \mathbb{F}^{m \times m}$, da je:

$$A = Q^{-1} \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r \\ m-r \end{array} \end{array} \cdot P \quad / ^T$$

$$A^T = P^T \cdot \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \end{array} \cdot (P^{-1})^T = ((P^T)^{-1})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (Q^{-1})^T$$

$$\Rightarrow \text{rang } A^T = \text{rang} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & m-r \end{array} \\ \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \end{array} = \dim \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_r\} = r$$

Trditev: Za matriko $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ so enaka naslednja števila:

a) Največje možno število linearno neodvisnih stolpcev

b) Največje možno število linearno neodvisnih vrstic

c) rang A

Dokaz: Vemo, da je $\operatorname{im} A = \operatorname{Lin}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$. Naj bo r' število iz točke (a). Med stolpci iz $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ si lahko izberemo r' linearno neodvisnih stolpcev. Če ti stolpci ne bi tvorili baze za $\operatorname{Lin}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$, bi izbrano množico r' stolpcev dopolnili do baze z drugimi stolpci, saj so stolpci ogrodje za to linearno ogrinjačo. Dobili bi linearno neodvisno množico stolpcev, ki bi imela več kot r' elementov, kar je v protislovju z definicijo števila r'. Torej r' linearno neodvisnih stolpcev tvori bazo za $\operatorname{Lin}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$, ki je ravno $\operatorname{im} A$. $\Rightarrow r' = \text{rang } A$

Števili iz (a) in (c) sta torej enaki.

Da sta enaki tudi števili iz (b) in (c), pa sledi iz enakosti rang A = rang A^T.

Kako rang izračunamo?

Spomnimo se, če matriko pomnožimo z obrnljivo matriko z leve ali desne, se rang ne spremeni. Pogledali si bomo, kaj se zgodi z matriko, če jo pomnožimo s posebnimi obrnljivimi matrikami.

1) $P_{pq} = [e_1 \quad \overset{p}{e_q} \quad \overset{q}{e_p} \quad e_n]$ je matrika, ki jo dobimo tako, da v identiteti zamenjamo p-ti in q-ti stolpec, kar je enako, kot če bi v identiteti zamenjali p-to in q-to vrstico. Taki matriki pravimo permutacijska matrika.

$P_{pq}^2 = I \Rightarrow P_{pq}$ je obrnljiva

Če je $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, je:

$$A \cdot P_{pq} = A \cdot [e_1, \dots, \overset{p}{e_q}, \dots, \overset{q}{e_p}, \dots, e_n] =$$
$$= [Ae_1, \dots, Ae_q, \dots, Ae_p, \dots, e_n] =$$
$$= [A^{(1)}, \dots, \underset{p}{\overset{\shortparallel}{A^{(q)}}}, \dots, \underset{q}{\overset{\shortparallel}{A^{(p)}}}, \dots, A^{(n)}]$$

Množenje matrike A s P_{pq} z desne torej v matriki A zamenja p-ti in q-ti stolpec.

Podobno dokažemo (ali pa upoštevamo enakosti $(P_{pq}A)^T = A^T \cdot P_{pq}^T$ in $P_{pq}^T = P_{pq}$), da se pri množenju z leve zamenjata p-ta in q-ta vrstica A.

2) Naj bo $p \in \{1, \dots, n\}$ in $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Definiramo $P_{\alpha,p} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow p$. $P_{\alpha,p}$ je obrnljiva in velja $(P_{\alpha,p})^{-1} = P_{\alpha^{-1},p}$.

Naj bo $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ poljubna matrika. Potem je:

$$
\begin{aligned}
A\cdot P_{\alpha,p} &= A\cdot[e_1, e_2, \dots, e_{p-1}, \alpha\cdot e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p_n}] = \\
&= [Ae_1, \dots, Ae_{p-1}, \alpha Ae_p, Ae_{p+1}, \dots, e_{p_n}] = \\
&= [A^{(1)}, \dots, A^{(p-1)}, \alpha A^{(p)}, A^{(p+1)}, \dots, A^{(n)}]
\end{aligned}
$$

Množenje s $P_{\alpha,p}$ z desne torej p-ti stolpec matrike A pomnoži z α, ostali stolpci pa se ne spremenijo.

Če bi s $P_{\alpha,p}$ pomnožili z leve, bi se p-ta vrstica matrike A pomnožila z α.

$$
P_{\alpha,p}\cdot A = (P_{\alpha,p}\cdot A)^{T^T} = (A^T\cdot P_{\alpha,p}^T)^T = \overbrace{(\underbrace{A^T\cdot P_{\alpha,p}}_{\text{p-ti stolpec matrike } A^T \text{ se pomnoži z } \alpha})^T}^{\text{p-ta vrstica matrike } A \text{ se pomnoži z } \alpha}
$$

3) Naj bosta $p, q \in \{1, \dots, n\}$ in $p \neq q$. Spomnimo se, da je elementarna matrika E_{pq} matrika, ki ima v presečišču p-te vrstice in q-tega stolpca 1, drugje pa 0. Naj bo $\alpha \in \mathbb{F}$ in definiramo matriko $P = I + \alpha\cdot E_{p,q}$.

$$
(I - \alpha E_{pq})(I + \alpha E_{pq}) = I + \cancel{\alpha E_{pq}} - \cancel{\alpha E_{pq}} - \alpha^2 \overset{0}{\overset{\parallel}{E_{pq}^2}} = I
$$

$\Rightarrow I + \alpha E_{p,q}$ je obrnljiva z inverzom $A - \alpha E_{p,q}$

$$
\begin{aligned}
A\cdot(I + \alpha E_{p,q}) &= A\cdot[e_1, \dots, e_{q-1}, e_q + \alpha\cdot e_p, e_{q+1}, \dots, e_n] = \\
&= [Ae_1, \dots, Ae_{q-1}, Ae_q + \alpha Ae_p, Ae_{q+1}, \dots, Ae_n] = \\
&= [A^{(1)}, \dots, A^{(q-1)}, A^{(q)} + \alpha\cdot A^{(p)}, A^{(q+1)}, \dots, A^{(n)}]
\end{aligned}
$$

Množenje z $I + \alpha E_{p,q}$ z desne q-temu stolpcu matrike A prišteje α-kratnik p-tega stolpca matrike A, ostali stolpci pa se ne spremenijo.

Množenje z $I+\alpha E_{p,q}$ z leve p-ti vrstici matrike A prišteje α-kratnik q-te vrstice matrike A, ostale vrstice pa se ne spremenijo.

$$(I+\alpha E_{p,q})\cdot A = \left((I+\alpha E_{p,q})\cdot A\right)^{TT} = \left(A^T\cdot (I+\alpha E_{p,q})^T\right)^T =$$
$$= \left(A^T\cdot (I+\alpha E_{q,p})\right)^T$$

Matrike iz (1), (2) in (3) so obrnljive, zato množenje z njimi z leve ali z desne ohranja rang.

Izrek: Z uporabo transformacij iz (1), (2) in (3) lahko iz matrike $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ postopoma predelamo matriko $A_0 = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}^{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, kjer je $r=\operatorname{rang} A$.

Dokaz: Z indukcijo na k bomo dokazali, da lahko dobimo neko matriko oblike
$$A_k = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & A_k' \end{bmatrix} \begin{array}{l} k \\ m-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \end{array}$$
za vsak $k\in\{0,1,\dots,r\}$.

Za $k=0$ je to očitno: Matrika A je take oblike.

Recimo, da smo dobili A_k ustrezne oblike za nek k.

Če je $A_k'=0$, potem je $\operatorname{rang} A_k = k$. Ker smo uporabljali transformacije (1), (2) in (3), ki ohranjajo rang, je tudi $\operatorname{rang} A = k$. Torej je $A_k = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}^{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in smo končali.

Če $A^{(k)} \neq 0$, potem ima $A^{(k)}$ vsaj en neničelni člen. Zamenjamo ustrezni vrstici in stolpca, da ta neničelni člen v matriki $A^{(k)}$ dobimo na križišču 1. vrstice in 1. stolpca (z uporabo transformacije (1)). 1. vrstico ali stolpec pomnožimo z inverzom tega člena, da dobimo 1. Od vseh ostalih vrstic matrike $A^{(k)}$ odštejemo ustrezne večkratnike 1. vrstice, da dobimo ničle v 1. stolpcu. Nato od vseh ostalih stolpcev odštejemo 1. stolpec in dobimo ničle v 1. vrstici matrike $A^{(k)}$. Dobili smo matriko oblike

$$\left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}^{k} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} 1 & 0\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{array} \end{array}\right].$$

Dobili smo matriko enake oblike kot na začetku k-tega koraka, le da ima eno enko več. Nadaljujemo s postopkom.

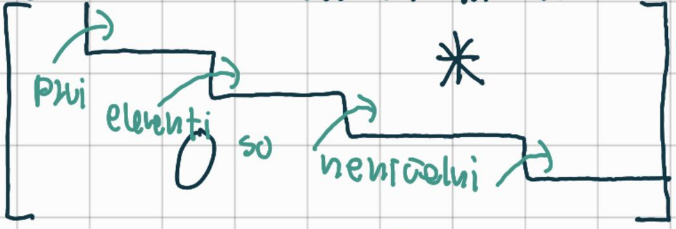
Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

Za računanje ranga je običajno dovolj, da transformacije izvajamo samo na vrsticah in na koncu dobimo matriko oblike



. Rang te matrike je število neničelnih vrstic.

REŠEVANJE SISTEMA LINEARNIH ENAČB

Radi bi rešili sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_m + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kjer so $a_{ij} \in \mathbb{F}$ in $b_i \in \mathbb{F}$ dani skalarji, $x_1, \ldots, x_n$ pa neznanke.

Definirajmo matriko sistema $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, vektor neznank

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ in vektor desnih strani $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Ta sistem enačb je potem ekvivalenten enačbi $A \cdot x = b$. Enačbam oblike $A \cdot x = b$ bomo zato pogosto rekli sistem enačb.

Sistem $Ax = b$ je homogen, če je $b = 0$. Sicer je nehomogen.

Sistem $Ax = b$ je protisloven, kadar je množica njegovih rešitev $\{x \in \mathbb{F}^n ; Ax = b\}$ prazna. Sicer je neprotisloven.

Definirajmo matriko $\hat{A} = [A \vdots b]$. Tej matriki rečemo razširjena matrika sistema.

Izrek (Kronecker-Capellijev izrek):
Sistem $Ax = b$ je neprotisloven (ima rešitev) natanko tedaj, ko je $\operatorname{rang} \hat{A} = \operatorname{rang} A$.

Dokaz: Rang matrike je maksimalno število linearno neodvisnih stolpcev, zato je vedno $\operatorname{rang} \hat{A} \geq \operatorname{rang} A$. Vemo tudi, da je $\operatorname{rang} A$ enak dimenziji zaloge vrednosti preslikave $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ s predpisom $x \mapsto Ax$. Vemo tudi, da je $\operatorname{im} A = \operatorname{Lin}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$, torej velja tudi $\operatorname{im} \hat{A} = \operatorname{Lin}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b\}$ in seveda tudi $\operatorname{im} A \subseteq \operatorname{im} \hat{A}$. *

Sistem $Ax = b$ je neprotisloven $\Leftrightarrow$ obstaja $x \in \mathbb{F}^n$, da je $Ax = b \Leftrightarrow b \in \operatorname{im} A \Leftrightarrow b \in \operatorname{Lin}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \Leftrightarrow$ $\operatorname{Lin}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b\} = \operatorname{Lin}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \Leftrightarrow$ $\operatorname{im} A = \operatorname{im} \hat{A} \overset{*}{\Leftrightarrow} \dim \operatorname{im} A = \dim \operatorname{im} \hat{A} \Leftrightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \hat{A}$.

Homogen sistem je vedno neprotisloven (rešljiv). Rešitve homogenega sistema $Ax = 0$ so natanko jedro matrike A.

$x = 0$ je vedno rešitev homogenega sistema $Ax = 0$.

Kdaj je to edina rešitev? $\Leftrightarrow$ A je injektivna $\Leftrightarrow$ $\ker A = 0$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang} A = n$.

Če želimo, da ima sistem $Ax = 0$ samo trivialno rešitev $x = 0$, mora torej veljati $m \geq n$, torej mora biti enačb vsaj toliko kot neznank.

V splošnem je rešitev homogenega sistema množica $\ker A$. To je vektorski podprostor prostora $\mathbb{F}^n$ dimenzije $n - \operatorname{rang} A$.

Rešitev homogenega sistema $Ax = 0$ je torej vektorski podprostor dimenzije $n - \operatorname{rang} A$.

Trditev: Recimo, da je nehomogen sistem $Ax = b$ neprotisloven in naj bo $v \in \mathbb{F}^n$ ena od njegovih rešitev. (Tej rešitvi pravimo *partikularna rešitev sistema*.) Potem je množica rešitev sistema $Ax = b$ enaka afinemu podprostoru $v + \ker A = \{v + u;\ u \in \ker A\}$.

Dokaz: Recimo najprej, da je $x = v + u$ za nek $u \in \ker A$. Potem je $Ax = A(v+u) = Av + Au = b + 0 = b$.

Naj bo x poljubna rešitev sistema $Ax = b$. Potem je $Ax = b = Av$. $\Rightarrow A(x - v) = 0 \Rightarrow x - v \in \ker A \Rightarrow x - v = u$ za nek $u \in \ker A \Rightarrow x = v + u$ za nek $u \in \ker A$.

Kako rešitve poiščemo? Postopek, ki ga bomo povedali, se imenuje Gaussova eliminacija.

$[A \,\vdots\, b]$ $\Updownarrow$

Če je P obrnljiva matrika, potem je sistem $Ax = b$ ekvivalenten sistemu $PAx = Pb$. $\Leftrightarrow$ $[PA \,\vdots\, Pb] = P[A \,\vdots\, b]$

Rešitve sistema se torej ne spremenijo, če razširjeno matriko sistema z leve pomnožimo z obrnljivo matriko. Rešitve se torej ne spremenijo, če na $\hat{A}$ izvajamo operacije na vrsticah kot pri računanju ranga. Zamenjamo lahko poljubni vrstici, poljubno vrstico lahko pomnožimo z neničelnim skalarjem in poljubni vrstici lahko prištejemo večkratnik neke druge vrstice. Lahko tudi menjamo stolpce matrike A, ne pa b, vendar moramo pri tem preimenovati spremenljivke. (Če zamenjamo prvi in drugi stolpec, moramo tudi zamenjati x_1 in x_2.)

Z uporabo teh operacij matriko $\hat{A}$ predelamo v matriko

$$\hat{A}' = \left[\begin{array}{c|c|c} \overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}^{r} & * & \begin{matrix} b_1' \\ \vdots \\ b_r' \end{matrix} \\ \hline \underbrace{0}_{r} & \underbrace{0}_{n-r} & \begin{matrix} b_{r+1}' \\ \vdots \\ b_m' \end{matrix} \end{array}\right] \begin{matrix} \}\, r \\ \\ \}\, m-r \end{matrix}$$

Naj bodo $x_1', \dots, x_n'$ nove spremenljivke. (To so $x_1, \dots, x_n$, ampak morda v drugem vrstnem redu, če smo morda menjali stolpce.)

Sistem $A'x' = b'$ je torej:

$$\begin{aligned}
x_1' + a_{1,r+1}' x_{r+1}' + \dots + a_{1,n}' x_n' &= b_1' \\
x_2' + a_{2,r+1}' x_{r+1}' + \dots + a_{2,n}' x_n' &= b_2' \\
&\vdots \\
x_r' + a_{r,r+1}' x_{r+1}' + \dots + a_{r,n}' x_n' &= b_r' \\
0 &= b_{r+1}' \\
&\vdots \\
0 &= b_m'
\end{aligned}$$

Če je eden od b_{r+1}' do b_m' različen od 0, potem sistem ni rešljiv (kar se sklada tudi s Kronecker-Capellijevim izrekom).

Če je $b_{r+1}' = \dots = b_m' = 0$, je sistem rešljiv. Rešitve so: $x_{r+1}' = \alpha_1, \dots, x_n' = \alpha_{n-r}$ so poljubni parametri iz $\mathbb{F}$. Ostale neznanke izračunamo:

$$\begin{aligned}
x_1' &= b_1' - a_{1,r+1}' \alpha_1 - \dots - a_{1,n}' \alpha_{n-r} \\
x_2' &= b_2' - a_{2,r+1}' \alpha_1 - \dots - a_{2,n}' \alpha_{n-r} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$x_r' = b_r' - a_{r,r+1}'\alpha_1 - \dots - a_{r,n}'\alpha_{n-r}$$

V vektorski obliki dobimo:

$$x' = b' - \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{1,r+1}' \\ a_{2,r+1}' \\ \vdots \\ a_{r,r+1}' \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{1,r+2}' \\ a_{2,r+2}' \\ \vdots \\ a_{r,r+2}' \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \dots - \alpha_{n-r} \cdot \begin{bmatrix} a_{1,n}' \\ a_{2,n}' \\ \vdots \\ a_{r,n}' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

partikularna rešitev enačbe $A'x' = b'$

baza za ker A

V praksi ponavadi ne menjamo stolpcev in izvajamo elementarne operacije le na vrsticah razširjene matrike. Dobimo razširjeno matriko oblike:

Sistem je rešljiv, ko so tukaj same 0

Sistem potem rešujemo od spodaj navzgor.

Primer:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -1 \\ 8x_2 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 10 \\ 9x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 12x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 7 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -8x \\ -9x \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -9 & -18 & -27 & 18 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & 16 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ /:(-9) \\ /:(-8) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} - \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sistem je rešljiv.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -2 \end{aligned} \Rightarrow x_3 = \alpha_1,\ x_4 = \alpha_2 \text{ parametra}$$

$x_2 = -2 - 2\alpha_1 - 3\alpha_2$ nesemo v 1. enačbo:

$$x_1 - 4 - 4\alpha_1 - 6\alpha_2 + 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = -1$$

$$x_1 = 3 + \alpha_1 + 2\alpha_2$$

Rešitve so:

$x_1 = 3 + \alpha_1 + \alpha_2$

$x_2 = -2 - 2\alpha_1 - 3\alpha_2$

$x_3 = \alpha_1$

$x_4 = \alpha_2$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ poljubna parametra

V vektorski obliki:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+\alpha_1+\alpha_2 \\ -2-2\alpha_1-3\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

partikularna rešitev

baza jedra matrike A

Pogosto rešujemo več sistemov $Ax_1 = b_1$, $Ax_2 = b_2, \ldots, Ax_k = b_k$, kjer so matrike sistema enake, desne strani pa so različne. Te sisteme lahko rešujemo hkrati.

Definiramo razširjeno matriko $[A \vdots b_1\ b_2 \ldots b_k]$ in jo prevedemo v matriko oblike:

Dobimo sisteme oblike $A'x_1=b_1'$, $A'x_2=b_2'$, ..., $A'x_k=b_k'$. Te sisteme rešujemo od spodaj navzgor vsakega posebej.

Na ta način iščemo inverz matrike.

Naj bo $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ poljubna obrnljiva matrika. Inverz matrike A je taka matrika $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, da je $A\cdot B = I$. (Vemo, da je desni inverz matrike tudi levi inverz.)

Po stolpcih: $A\cdot\left[B^{(1)}\ B^{(2)} \dots B^{(n)}\right] = \left[E_1\ E_2 \dots E_n\right]$

Iskanje inverza matrike A je ekvivalentno reševanju sistema enačb $A\cdot B^{(1)}=E_1$, $A\cdot B^{(2)}=E_2$, ..., $A\cdot B^{(n)}=E_n$, kjer so $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)}$ iskani stolpci.

Napišemo razširjeno matriko $[A \vdots e_1\ e_2 \dots e_n] = [A \vdots I]$. Če je matrika A obrnljiva, potem je ranga n. V tem primeru samo z operacijami na vrsticah (zamenjava dveh vrstic, množenje vrstice z neničelnim skalarjem, prištevanje večkratnika ene vrstice drugi) lahko razširjeno matriko prevedemo na matriko oblike $[I \vdots B]$. Sistem, ki ga predstavlja matrika $[I \vdots B]$, je ekvivalenten sistemu, ki ga predstavlja matrika $[A \vdots I]$, torej je $B = A^{-1}$.

Če matrika A ni obrnljiva, bomo ugotovili, da sistem, ki ga predstavlja $[A \vdots I]$, ni rešljiv. A bo ekvivalentna neki matriki, ki bo imela v zadnji vrstici same ničle.

Primer: Poišči $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \ /:(-3) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right] \ /\cdot(-3) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

PODOBNOST MATRIK

Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem prostora V (linearna preslikava iz V v V). Običajno v V izberemo eno bazo B in napišemo matriko $\mathcal{A}_{B,B}$. (Torej ne izberemo dveh različnih baz B_1, B_2 in napišemo matriko $\mathcal{A}_{B_1,B_2}$.)

Zakaj je to smiselno?

1) Če je $B_1 \neq B_2$, potem je $id_{B_1,B_2} \neq I$.

2) Če je $B_1 \neq B_2$, potem je $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})_{B_1,B_2} \neq \mathcal{A}_{B_1,B_2} \cdot \mathcal{B}_{B_1,B_2}$. $\neq$

Imejmo endomorfizem $\mathcal{A}: V \to V$ in bazi B in B'. Endomorfizmu priredimo matriki $A = \mathcal{A}_{B,B}$ in $A' = \mathcal{A}_{B',B'}$. Vemo, da je $\mathcal{A}_{B',B'} = id_{B',B} \cdot \mathcal{A}_{B,B} \cdot id_{B,B'}$. Prehodno matriko $id_{B,B'}$ označimo s P. Potem je $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Definicija: Kvadratna matrika $A' \in \mathbb{F}^{n\times n}$ je **podobna** matriki $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, kadar obstaja obrnljiva matrika $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, da je $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

(Ekvivalentnost: $A, A' \in \mathbb{F}^{n\times m}$, obstajata obrnljivi matriki $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$, da je $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.)

Vsaki podobni matriki sta tudi ekvivalentni (vzamemo $Q = P$), obratno pa v splošnem ne velja.

Kot pri ekvivalentnosti velja:

Trditev: Podobnost je ekvivalenčna relacija.

Trditev: Kvadratni matriki sta podobni natanko takrat, ko pripadata istemu endomorfizmu nekega vektorskega prostora, morda glede na dve različni bazi. ($\mathcal{A}_{B,B}$, $\mathcal{A}_{B',B'}$)

Zanima nas, kakšna je najbolj enostavna (najlepša) matrika, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ prostora V. Torej, kakšna je najbolj enostavna matrika oblike $\mathcal{A}_{B,B}$, kjer je B baza prostora V.

Ni vsaka matrika podobna matriki oblike $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$.

Morda pa je matrika podobna neki diagonalni matriki. Videli bomo, da to ni vedno res (je pa skoraj res).

Definicija: Endomorfizem $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ **se da diagonalizirati**, kadar obstaja taka baza B prostora V, da je matrika $\mathcal{A}_{B,B}$ diagonalna.

Primer: Naj bo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dokažimo, da se ta matrika ne da diagonalizirati. (To bo lažje, ko bomo znali izračunati lastne vrednosti.)

Recimo, da je $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$ za neko obrnljivo matriko P in diagonalno matriko D.

$$D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

Enačba $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$ je ekvivalentna $P \cdot A = D \cdot P$.

$$\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

$0 = a \cdot c \quad \Rightarrow \quad a = 0 \vee c = 0$

$c = a \cdot d$

$0 = b \cdot e \quad \Rightarrow \quad b = 0 \vee e = 0$

$e = b \cdot f$

Če je $a = 0$, potem je $c = a \cdot d = 0$. V vsakem primeru je $c = 0$.
Če je $b = 0$, potem je $e = b \cdot f = 0$. V vsakem primeru je $e = 0$.

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & f \end{bmatrix}$ ni obrnljiva, torej smo dobili protislovje, torej se matrike A ne da diagonalizirati.

Recimo, da se endomorfizem $\mathcal{A} : V \to V$ diagonalizira v bazi $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ in je $A = \mathcal{A}_{B,B}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Oglejmo si $\mathcal{A} v_i$, kjer je $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\mathcal{A} v_i = a_{ii} \cdot v_i$$

Endomorfizem $\mathcal{A}$ torej vektorje iz baze B slika v večkratnike samih sebe.

Definicija: Naj bo $\mathcal{A}: V \to V$ endomorfizem. Vektor $v \neq 0$ je **lastni vektor endomorfizma $\mathcal{A}$**, kadar obstaja $\lambda \in \mathbb{F}$, da je $\mathcal{A}v = \lambda \cdot v$. λ je **lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$ za lastni vektor v**.

Lastna vrednost je enolično določena z lastnim vektorjem.

Če je $\mathcal{A}v = \lambda v$ in $\mathcal{A}v = \mu v$, potem je $\lambda v = \mu v$, torej $(\lambda - \mu) \cdot v = 0$. Ker je $v \neq 0$, je potem $\lambda = \mu$.

Lastni vektor **ni** enolično določen z lastno vrednostjo.

Če je v lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ, je za vsak $\alpha \neq 0$, tudi $\alpha \cdot v$ lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ.

* definicija seštevanja preslikav

⊕ $\mathcal{A} - \lambda id$ je endomorfizem končnorazsežnega prostora V (dim. enačba)

Kako poiščemo lastne vrednosti endomorfizma?

λ je lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ obstaja $v \neq 0$, da je $\mathcal{A}v = \lambda v$ $\Leftrightarrow$ obstaja $v \neq 0$, da je $\mathcal{A}v - \lambda v = 0$ $\Leftrightarrow$ obstaja $v \neq 0$, da je $\mathcal{A}v - \lambda \cdot id(v) = 0$ $\overset{*}{\Leftrightarrow}$ obstaja $v \neq 0$, da je $(\mathcal{A} - \lambda id)(v) = 0$ $\Leftrightarrow$ obstaja $v \neq 0$, da je $v \in \ker(\mathcal{A} - \lambda id)$ $\Leftrightarrow$ $\ker(\mathcal{A} - \lambda id) \neq \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} - \lambda id$ ni injektivna $\overset{\oplus}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{A} - \lambda \cdot id$ ni bijektivna

Naj bo A matrika endomorfizma $\mathcal{A}$ glede na poljubno bazo prostora V ($A = \mathcal{A}_{B_V, B_V}$). Potem $\mathcal{A} - \lambda id$ ni bijektiven $\Leftrightarrow$ matrika $A - \lambda I$ ni obrnljiva.

Imeti moramo torej orodje, ki nam pove, kdaj matrika ni obrnljiva. To bodo determinante.