RELACIJE

Relacija med množicama A in B je podmnožica kartezičnega produkta. Če je $(x,y) \in R$, pišemo xRy in pravimo, da je x v relaciji z y. Najbolj pogost primer je, ko je $B=A$, v tem primeru pravimo, da je R relacija na množici A. V nadaljevanju bomo obravnavali samo relacije na neki množici A.

Relacija R na A je refleksivna, kadar je xRx za vsak $x \in A$.

Relacija R na A je simetrična, kadar iz xRy sledi yRx za vsak $x,y \in A$.

Relacija R na A je antisimetrična, kadar iz xRy in yRx sledi $x=y$ za vsak $x,y \in A$.

Relacija R na A je tranzitivna, kadar iz xRy in yRz sledi xRz za vsak $x,y,z \in A$.

Relacija delne urejenosti je relacija, ki je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna.

Primer: Relacija vsebovanosti na množici vektorskih podprostorov danega vektorskega prostora je delna urejenost.

Ekvivalenčna relacija je relacija, ki je refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Naj bo R relacija delne urejenosti na A. Če za elementa $x, y \in A$ velja xRy ali yRx, pravimo, da sta x in y primerljiva. Sicer pravimo, da sta neprimerljiva.

Primer: Če je A množica vektorskih podprostorov v $\mathbb{R}^2$, potem sta 0 in x-os primerljiva ($0 \subseteq x$-os), x-os in y-os pa nista primerljiva (nobena ni vsebovana v drugi).

Delna urejenost R na A je linearna urejenost, kadar sta vsaka dva elementa iz A primerljiva.

Naj bo R relacija delne urejenosti na A. Element $x \in A$ je maksimalen element za relacijo R, kadar iz xRy sledi $x = y$. Z drugimi besedami, v A ni večjih elementov kot x glede na R. Element $x \in A$ je minimalen element za relacijo R, kadar iz yRx sledi $x = y$. Z drugimi besedami, v A ni manjših elementa kot x glede na R.

Minimalni in maksimalni elementi ne obstajajo nujno. Če obstajajo, niso nujno enolični.

Element $x \in A$ je največji element za relacijo R delne urejenosti, kadar velja yRx za vsak $y \in A$. Element $x \in A$ je najmanjši element za relacijo R delne urejenosti, kadar velja xRy za vsak $y \in A$.

Najmanjši in največji elementi ne obstajajo nujno. Če obstajajo, so enolični.

Največji element je nujno maksimalen. Najmanjši element je nujno minimalen. Obrat v splošnem ne velja.

Primer: Naj bo V vektorski prostor in $M \subseteq V$ poljubna množica. Rekli smo, da je $\operatorname{Lin} M$ najmanjši vektorski podprostor prostora V, ki vsebuje M. To pomeni, da je $\operatorname{Lin} M$ vektorski podprostor, $M \subseteq \operatorname{Lin} M$ in če je U nek drug podprostor v V, za katerega je $M \subseteq U$, je $\operatorname{Lin} M \subseteq U$.

Naj bo A množica vseh vektorskih podprostorov prostora V, ki vsebujejo M. Množico A lahko delno uredimo z inkluzijo: $U_1 \subseteq U_2$, če je U_1 podmnožica od U_2.

Potem je $\operatorname{Lin} M$ najmanjši element množice A za relacijo vsebovanosti.

EKVIVALENČNA RELACIJA IN KVOCIENTNE MNOŽICE

Naj bo $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici A. Če je $a \in A$ poljuben element, množico $[a]_\sim = \{x \in A;\ x \sim a\}$ imenujemo ekvivalenčni razred elementa a. Kadar je jasno, za katero relacijo gre, pišemo samo $[a]$ namesto $[a]_\sim$. Elementu a pravimo predstavnik ekvivalenčnega razreda $[a]$.

Iz LMN vemo, da velja:

Izrek: Ekvivalenčna relacija razdeli množico A na unijo paroma disjunktnih ekvivalenčnih razredov.

Dva elementa sta ekvivalentna natanko takrat, ko ležita v istem ekvivalenčnem razredu.

Velja tudi obrat izreka:

Izrek: Če obstaja družina podmnožic $\{A_i;\ i \in I\}$ množice A, da za $i \neq j$ velja $A_i \cap A_j = \emptyset$ in je $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, potem obstaja ekvivalenčna relacija $\sim$ na A, da so podmnožice A_i natanko ekvivalenčni razredi za relacijo $\sim$.

$$x \sim y :\Leftrightarrow \text{obstaja } i \in I, \text{ da sta } x, y \in A_i$$

Množico vseh ekvivalenčnih razredov množice A glede na relacijo $\sim$ imenujemo kvocientna ali faktorska množica množice A po relaciji $\sim$ in jo označimo $A/\sim$.

$A/_\sim := \{[a]_\sim ; a \in A\}$

Preslikava $q : A \to A/_\sim$, $a \mapsto [a]_\sim$ se imenuje kvocientna preslikava.

Kvocientna preslikava je vedno surjektivna.

Primer: Na $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ definiramo relacijo $\sim$: $(m,n) \sim (p,q) \iff mq = np$

To je ekvivalenčna relacija, kar je enostavno preveriti.

Ekvivalenčni razredi $[(m,n)]$ so vsi pari (p,q), za katere je $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. Ekvivalenčni razredi so racionalna števila. Pišemo $\frac{m}{n} = [(m,n)]$. Torej je $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/_\sim$.

Primer: Na množici vseh usmerjenih daljic v $\mathbb{R}^3$ definiramo, da sta usmerjeni daljici v relaciji $\sim$, kadar eno od njiju dobimo z vzporednim premikom druge. To je tudi ekvivalenčna relacija. Ekvivalenčni razredi so vektorji.

Primer: Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $\equiv$ relacija na $\mathbb{Z}$, definirana s predpisom $a \equiv b \iff n \mid a-b$. Tudi to je ekvivalenčna relacija.

$[a] = \{x \in \mathbb{Z} ; a$ in x imata enak ostanek pri deljenju z $n\}$

Ekvivalenčni razredi so ostanki pri deljenju z n.

$\mathbb{Z}/_\equiv = \mathbb{Z}_n$

To je primer kvocientne grupe.

Primer: Na $\mathbb{R}^2$ definiramo relacijo $(x,y) \sim (z,w) \iff y = w$. To je ekvivalenčna relacija. Ekvivalenčni razredi so vodoravne premice.

Izrek: Naj bo $f: A \to B$ preslikava. Na A definiramo relacijo $\sim$ s predpisom $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. Potem velja:

1) $\sim$ je ekvivalenčna relacija.

2) Naj bo $q: A \to A/\sim$ kvocientna preslikava. Obstaja natanko ena preslikava $p: A/\sim \to B$, za katero komutira diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & B \\ & A/\sim \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Torej $f = p \circ q$. Definiramo jo s predpisom $p([a]) = f(a)$.

3) Preslikava p je injektivna in $Z_p = Z_f$.

Izrek poznamo iz LMN. Glavna stvar v izreku je dokaz, da je s predpisom $p([a]) = f(a)$ preslikava p dobro definirana. Sliko $p([a])$ ekvivalenčnega razreda smo morali definirati s pomočjo predstavnika ekvivalenčnega razreda. Treba je pokazati, da če vzamemo drug predstavnik $b \in [a]$, dobimo enak rezultat.

USKLAJENOST OPERACIJE Z EKVIVALENČNO RELACIJO

Definicija: Naj bo $\sim$ ekvivalenčna relacija na A in $\circ$ operacija na A. Pravimo, da je operacija $\circ$ usklajena z ekvivalenčno relacijo $\sim$, kadar iz $a \sim b$ in $c \sim d$ sledi $a \circ c = b \circ d$.

Recimo, da je operacija $\circ$ usklajena z ekvivalenčno relacijo $\sim$. Potem na kvocientni množici $A/\sim$ lahko definiramo operacijo: $[a] \bullet [b] = [a \circ b]$

Operacijo na $A/\sim$ smo definirali s pomočjo predstavnikov ekvivalenčnih razredov, zato moramo preveriti, če je dobro definirana.

Če je $[a]=[a']$ in $[b]=[b']$, moramo preveriti, ali je $[\underbrace{a\circ b}_{=[a]\circ[b]}] = [\underbrace{a'\circ b'}_{=[a']\circ[b']}]$.

Če je $[a]=[a']$ in $[b]=[b']$, potem je $a\sim a'$ in $b\sim b'$. Ker je operacija $\circ$ usklajena z ekvivalenčno relacijo $\sim$, od tod sledi, da je $a\circ b \sim a'\circ b'$, torej $[a\circ b]=[a'\circ b']$.

Operacija na $A/\sim$ je torej dobro definirana.

Primer: Vemo že, da je na $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ definirana ekvivalenčna relacija, da je $(m,n)\sim(p,q) \Leftrightarrow mq=np$, in da je $(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})/\sim = \mathbb{Q}$.

Na $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ vpeljemo operaciji $+$ in $\cdot$ s predpisoma:

$(m,n)+(p,q)=(mq+np,nq)$

$(m,n)\cdot(p,q)=(mp,nq)$

Preverimo, da sta ti dve operaciji usklajeni z relacijo $\sim$.

Naj bo $(m,n)\sim(m',n')$ in $(p,q)\sim(p',q')$. To pomeni, da je $mn'=nm'$ in $pq'=qp'$.

$(m,n)\cdot(p,q)=(mp,nq)$, $(m',n')\cdot(p',q')=(m'p',n'q')$

$nq\cdot m'p'=(nm')\cdot(qp')=(mn')\cdot(pq')=mp\cdot n'q'$

$\Rightarrow (mp,nq)\sim(m'p',n'q')$

$\Rightarrow$ produkt je usklajen z $\sim$

$(m,n)+(p,q)=(mq+np,nq)$, $(m',n')+(p',q')=(m'q'+n'p',n'q')$

Dokazali bi radi, da sta ti dve vrsti v relaciji $\sim$, torej, da je $(mq+np)\cdot(n'q') = (m'q'+n'p')(nq)$.

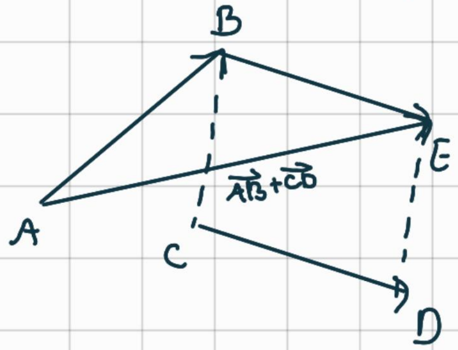
$\Leftrightarrow mqn'q' + npn'q' = m'q'nq + n'p'nq$

$\Rightarrow mn'qq' = m'nqq'$, $pq'nn' = p'qnn'$

Zgornja enakost velja, torej je tudi seštevanje usklajeno z $\sim$.

Zaradi usklajenosti operacij $+$ in $\cdot$ z relacijo $\sim$ lahko racionalna števila seštevamo in množimo na običajen način.

Primer: Naj bo A množica vseh usmerjenih daljic. Usmerjeni daljici sta v relaciji $\sim$, kadar eno dobimo tako, da drugo vzporedno premaknemo. Vemo že, da je $\sim$ ekvivalenca in da je $A/\sim$ množica vektorjev. Usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ seštejemo tako, da $\overrightarrow{CD}$ premaknemo tako, da začetek premaknjene usmerjene daljice sovpada z B. Označimo končno točko te premaknjene daljice z E. Definiramo $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}$.



Operacija $+$ je usklajena z relacijo $\sim$, zato lahko vektorje seštevamo na običajen način.

KVOCIENTNE GRUPE ABELOVIH GRUP

Naj bo $(G,+)$ abelova grupa in H njena podgrupa. Na G definiramo relacijo $\sim$ s predpisom $a\sim b :\Leftrightarrow a-b\in H$.

Trditev: $\sim$ je ekvivalenčna relacija na G.

Dokaz: Refleksivnost:

$a - a = 0 \in H$, ker podgrupa vedno vsebuje enoto.
$\Rightarrow a \sim a \quad \forall a \in G$

Simetričnost:

Naj bo $a \sim b$. Potem je $a - b \in H$. Podgrupa je zaprta za invertiranje, zato je $-(a-b) = b - a \in H$.
$\Rightarrow b \sim a$

Tranzitivnost:

Naj bo $a \sim b$ in $b \sim c$. Potem je $a - b \in H$ in $b - c \in H$. Podgrupa je zaprta za seštevanje, zato $(a-b) + (b-c) = a - c \in H$. $\Rightarrow a \sim c$ $\square$

Opomba: Če je $(G, \cdot)$ poljubna (ne nujno komutativna) grupa in H njena podgrupa, potem je s predpisom $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ definirana ekvivalenčna relacija na G.

Trditev: Operacija $+$ na G je usklajena z ekvivalenčno relacijo.

Dokaz: Naj bo $a \sim a'$ in $b \sim b'$. To pomeni, da je $a - a' \in H$ in $b - b' \in H$. Potem je $a - a' + b - b' \in H$, ker je H zaprta za seštevanje.

$$\overset{\text{komutativnost}}{=} a + b - a' - b' = a + b - (a' + b')$$

Dobili smo, da je $(a+b)-(a'+b') \in H$, torej je tudi $a+b \sim a'+b'$. $\square$

Opomba: Če $(G,\cdot)$ ni komutativna grupa in $H \leq G$, potem množenje ni nujno usklajeno z relacijo $\sim$ iz prejšnje opombe. Kaj naredimo v tem primeru, se bomo učili pri algebri 2.

Izrek: 1) Na kvocientni množici $G/\sim$ lahko definiramo operacijo s predpisom $[a]+[b]=[a+b]$. Potem je $(G/\sim,+)$ Abelova grupa. Pravimo ji kvocientna ali faktorska grupa grupe G po podgrupi H in namesto $G/\sim$ pišemo G/H in namesto ekvivalenčnega razreda $[a]$ pišemo $a+H$.

2) Kvocientna preslikava $q: G \to G/H$, $a \mapsto a+H$ je homomorfizem grup.

Dokaz: 1) Operacija $+$ na G je po prejšnji trditvi usklajena z ekvivalenčno relacijo $\sim$. Zato je operacija $+$ na $G/\sim$ dobro definirana.

Da je $(G/\sim,+)$ Abelova grupa, preverimo z računom.

Asociativnost:

$$([a]+[b])+[c]=[a+b]+[c]=[(a+b)+c]=$$
$$=[a+(b+c)]=[a]+[b+c]=[a]+([b]+[c])$$

Komutativnost:

$$[a]+[b]=[a+b]=[b+a]=[b]+[a]$$

Enota:

$[a]+[0]=[a+0]=[a]$
$\Rightarrow [0]$ je enota

Inverz:

$[a]+[-a]=[a+(-a)]=[0]$
$\Rightarrow [-a]=-[a]$

2) $q(a+b)=[a+b]=[a]+[b]=q(a)+q(b)$
$\Rightarrow$ q je homomorfizem grup $\square$

Zakaj $[a]$ označimo z $a+H$?

Kaj je $[a]$? $x\in[a] \Leftrightarrow x\sim a \Leftrightarrow x-a\in H \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-a=h$ za nek $h\in H \Leftrightarrow x=a+h$ za nek $h\in H \Rightarrow$
$\Rightarrow [a]=\{a+h;\ h\in H\}$
$\Rightarrow$ Množica vseh elementov, ki jih dobimo, ko a-ju prištejemo nek element iz H

Primer: $H=\{0\} \Rightarrow [a]=\{a\}$
$\Rightarrow$ Kvocientna preslikava $a\mapsto[a]$ je izomorfizem.
$\Rightarrow G/\{0\}\cong G$

Primer: $H=G \Rightarrow [a]=G$ za vsak $a\in G$
$\Rightarrow G/G$ vsebuje en sam element
$\Rightarrow G/G$ je trivialna grupa

Primer: $G=\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 1$, $H=n\mathbb{Z}=\{na;\ a\in\mathbb{Z}\}$
(H večkratniki števila n)

$n\mathbb{Z}$ je podgrupa grupe $(\mathbb{Z},+)$

Kaj so ekvivalenčni razredi?

$x \in [a] \iff x-a \in n\mathbb{Z} \iff n \mid x-a \iff$ x in a imata enak ostanek pri deljenju z $n \iff x \equiv a \pmod{n}$

Kvocientna grupa $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ je torej grupa ostankov pri deljenju z n.

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0],[1],\dots,[n-1]\} = \mathbb{Z}_n$$

Pogosto v $\mathbb{Z}_n$ namesto $[a]$ pišemo kar a.

Seštevanje na kvocientni grupi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ je enako že znanemu seštevanju na $\mathbb{Z}_n$.

Če sta G, H množici in $f: G \to H$ preslikava, potem je na G s predpisom $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ definirana ekvivalenčna relacija. Poleg tega obstaja natanko ena preslikava $p: G/\sim \to H$, da diagram komutira:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "q"'] & H \\ & G/\sim \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

(kvocientna preslikava)

Preslikava p je definirana s predpisom $p([x]) = f(x)$ in je injektivna, in $Zp = Zf$.

Kaj nam ta izrek pove v primeru, ko sta $(G,+)$, $(H,\cdot)$ grupi Abelova grupa in f homomorfizem grup? Kaj je relacija $\sim$?

$$x \sim y \iff f(x) = f(y) \quad / \, f(y)^{-1} \iff f(x)f(y)^{-1} = 1$$
$$\underset{f \text{ homomorfizem}}{\iff} f(x)\cdot f(-y) = 1 \underset{f \text{ homomorfizem}}{\iff} f(x-y) = 1 \iff x-y \in \ker f$$

To pomeni, da je $G/\sim \; = G/\ker f$. to smo definirali samo v primeru, ko je G Abelova

Izrek: Naj bosta $(G,+), (H,\cdot)$ grupi, G Abelova, in naj bo $f: G \to H$ homomorfizem grup. Potem obstaja natanko en homomorfizem grup $p: G/\ker f \to H$, da komutira diagram:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & H \\
& G/\ker f \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

(kvocientna preslikava)

Homomorfizem p je definiran s predpisom $p([x]) = p(x+\ker f) = f(x)$. Poleg tega je p injektiven in $\operatorname{im} p = \operatorname{im} f$.

Dokaz: Vse smo že povedali in dokazali pri izreku iz LMN. Dokazati je treba le, da je p homomorfizem grup.

$$p([x]+[y]) \overset{\text{def seštevanja}}{=} p([x+y]) \overset{\text{izrek}}{=} f(x+y) \overset{f \text{ homo}}{=} f(x)\cdot f(y) \overset{\text{izrek}}{=} p([x])\cdot p([y])$$ □

Opomba: Pri Algebri 2 se bomo naučili, da lahko vedno definiramo kvocientno grupo $G/\ker f$ in da izrek velja tudi v primeru, ko G ni komutativen.

KVOCIENTNI VEKTORSKI PROSTORI

Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ in W njegov vektorski podprostor. $(V,+)$ je Abelova grupa in $(W,+)$ njena podgrupa, zato lahko definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$ s predpisom $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in W$ in kvocientno Abelovo grupo V/W. Na V/W bi radi definirali še množenje s skalarji tako, da bo V/W vektorski prostor.

Trditev: Množenje s skalarji na V je usklajeno z ekvivalenčno relacijo $\sim$. To pomeni: če je $x \sim y$ in $\alpha \in \mathbb{F}$, potem je $\alpha x \sim \alpha y$.

Dokaz: Naj bo $x \sim y$. Potem je $x-y \in W$. Ker je W vektorski podprostor, je zaprt za množenje s skalarji, zato je $\alpha(x-y) \in W$, torej $\alpha x - \alpha y \in W$, torej $\alpha x \sim \alpha y$. □

Posledica: Na V/W je s predpisom $\alpha\cdot[x]=[\alpha x]$ dobro definirano množenje s skalarji.

Dokaz: Dokazati je treba, da iz $[x]=[y]$ sledi $[\alpha x]=[\alpha y]$. Če je $[x]=[y]$, potem je $x\sim y$. Po trditvi je $\alpha x\sim\alpha y$, torej je $[\alpha x]=[\alpha y]$. $\square$

Trditev: Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ in W njegov podprostor. Na V/W definiramo operaciji s predpisoma $[x]+[y]=[x+y]$ in $\alpha\cdot[x]=[\alpha x]$. Potem velja:

1) V/W je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Rečemo mu *kvocientni ali faktorski vektorski prostor prostora V po podprostoru W.*
2) Kvocientna preslikava $q: V\to V/W$, $x\mapsto[x]$ je linearna.

Dokaz: 1) Vemo že, da sta operaciji dobro definirani in da je $(V/W,+)$ Abelova grupa. Preverimo še ostale aksiome za vektorski prostor:

$$\alpha([x]+[y])=\alpha[x+y]=[\alpha(x+y)]\overset{V\text{ vektorski}}{=}[\alpha x+\alpha y]=[\alpha x]+[\alpha y]=\alpha[x]+\alpha[y]$$
$$(\alpha+\beta)[x]=[(\alpha+\beta)x]=[\alpha x+\beta x]=[\alpha x]+[\beta x]=\alpha[x]+\beta[x]$$
$$\alpha(\beta[x])=\alpha[\beta x]=[\alpha(\beta x)]=[(\alpha\beta)x]=(\alpha\beta)\cdot[x]$$
$$1\cdot[x]=[1\cdot x]=[x]$$

2) Vemo že, da je kvocientna preslikava homomorfizem grup $(V,+)\to(V/W,+)$. Preverimo še homogenost:

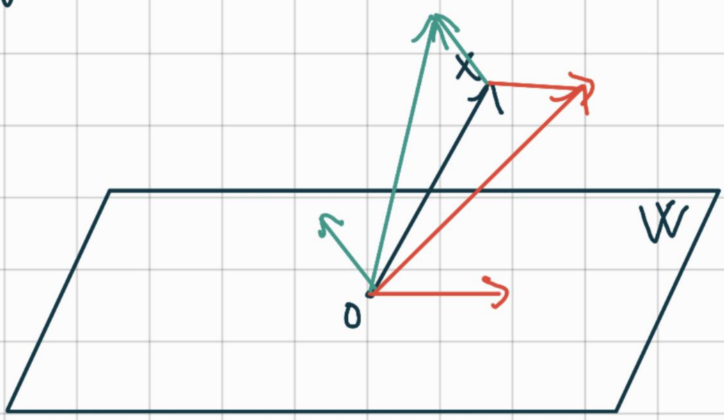
$$q(\alpha\cdot x)=[\alpha x]\overset{\text{def množenja}}{=}\alpha\cdot[x]=\alpha\cdot q(x)$$ $\square$

Kaj so ekvivalenčni razredi?

$y\in[x]\Leftrightarrow y\sim x\Leftrightarrow y-x\in W\Leftrightarrow y-x=w$ za nek $w\in W\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y=x+w$ za nek $w\in W$

$\Rightarrow [x] = \{x+w;\ w \in W\} = x + W$

Podobno kot pri grupah označimo množico $\{x+w;\ w \in W\}$ z $x+W$. Torej je $[x] = x+W$.



$x+W$:
Množica, ki jo dobimo tako, da podprostor W premaknemo za vektor x. Pravimo ji afin podprostor.

Primer: Afini podprostori v $\mathbb{R}^3$ so premice in ravnine in točke. Če je W premica, je $\mathbb{R}^3/W$ vektorski prostor vseh premic, ki so vzporedne W. Podobno, če je W ravnina, potem je $\mathbb{R}^3/W$ množica vseh ravnin, ki so vzporedne W. Na primer, če je $W = \{(x,y,0);\ x,y \in \mathbb{R}\}$, je $\mathbb{R}^3/W$ vektorski prostor vodoravnih ravnin. Seštevamo jih tako, da seštevamo njihove z koordinate. Enako velja za množenje s skalarjem.

Kaj je enota v V/W? $[0] = 0 + W = W$.

Izrek: Naj bosta V in U vektorska prostora nad istim poljem $\mathbb{F}$ in naj bo $A: V \to U$ linearna preslikava. Potem obstaja natanko ena linearna preslikava $\bar{A}: V/\ker A \to U$, da komutira diagram:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[dr, "q"'] & U \\ & \mathcal{A}/\ker\mathcal{A} \arrow[u, "\bar{\mathcal{A}}"'] \end{tikzcd}$$

Preslikava $\bar{\mathcal{A}}$ je definirana s predpisom $\bar{\mathcal{A}}(x+\ker\mathcal{A}) = \mathcal{A}(x)$.
Velja je, da je $\bar{\mathcal{A}}$ injektivna in $\operatorname{im}\bar{\mathcal{A}} = \operatorname{im}\mathcal{A}$.

Dokaz: Vse sledi iz enakega izreka za grupe, dokazati pa je treba le, da je $\bar{\mathcal{A}}$ homogena.

$$\bar{\mathcal{A}}(\alpha[x]) = \bar{\mathcal{A}}([\alpha x]) = \mathcal{A}(\alpha x) \overset{\mathcal{A}\text{ je linearna}}{=} \alpha\mathcal{A}x = \alpha\bar{\mathcal{A}}([x])$$

Posledica: $V/\ker\mathcal{A} \cong \operatorname{im}\mathcal{A}$

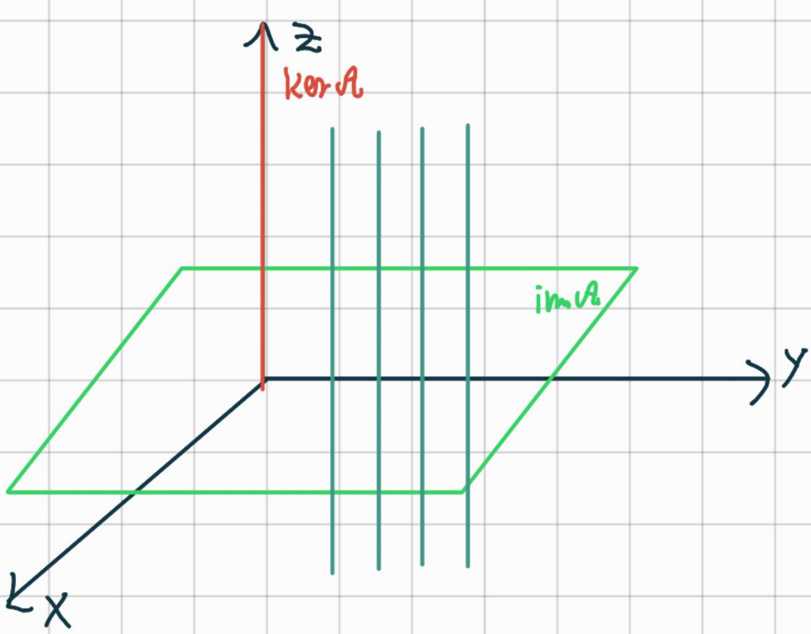
Dokaz: U zamenjamo z $\operatorname{im}\mathcal{A}$ in uporabimo izrek.

Primer: $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \mapsto (x,y,0)$

$\operatorname{im}\mathcal{A}$ = ravnina z enačbo $z=0$

$\ker\mathcal{A} = \{(x,y,z);\ x=y=0\}$ = z-os



Ekvivalenčni razredi v $\mathbb{R}^3/\ker\mathcal{A}$ so navpične premice.

Po posledici je $\mathbb{R}^3/\ker\mathcal{A} \cong \operatorname{im}\mathcal{A}$. Vektorski prostor vseh navpičnih premic je izomorfen ravnini $z=0$. Izomorfizem navpično premico slika v presečišče te premice z ravnino $z=0$.

Od zdaj naprej predpostavimo, da je V končnorazsežen.

Posledica: $\dim V/\ker\mathcal{A} = \dim V - \dim\ker\mathcal{A}$

Dokaz: Po prejšnji posledici je $V/\ker\mathcal{A} \cong \operatorname{im}\mathcal{A}$, zato je $\dim V/\ker\mathcal{A} = \dim\operatorname{im}\mathcal{A}$. Po dimenzijski enačbi je $\dim\operatorname{im}\mathcal{A} = \dim V - \dim\ker\mathcal{A}$.

Posledica: Če je $V = V_1 \oplus V_2$, potem je $V/V_1 \cong V_2$ in $V/V_2 \cong V_1$.

Dokaz: Vsak vektor iz V lahko na enoličen način zapišemo v obliki $x = x_1 + x_2$, kjer je $x_1 \in V_1$ in $x_2 \in V_2$.

Definiramo preslikavo $\mathcal{P}: V \to V_2$ s predpisom $\mathcal{P}(x_1+x_2) = x_2$. Ker je zapis vektorja iz V v usoto obliki x_1+x_2, kjer je $x_1 \in V_1$ in $x_2 \in V_2$, je ta preslikava dobro definirana. Tej preslikavi pravimo projekcija na V_2 vzdolž V_1.

Linearnost lahko preverimo sami.

$\operatorname{im}\mathcal{P} = V_2$, saj vsak vektor $x_2 \in V_2$ lahko zapišemo kot $x_2 = 0 + x_2$, kjer je $0 \in V_1$, in potem je $\mathcal{P}x_2 = x_2$. $\mathcal{P}$ je surjektivna.

$\ker\mathcal{P} = \{x_1+x_2 \in V_1 \oplus V_2;\ x_2 = 0\} = V_1$

Po prejšnji posledici je $V/V_1 = V/\ker\mathcal{P} \cong \operatorname{im}\mathcal{P} = V_2$.

Drugo enakost dokažemo na enak način. $\square$

Posledica: Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ in W njegov podprostor. Potem je V/W končnorazsežen in $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

Dokaz: Vemo, da v V obstaja direktni komplement podprostora W. Obstaja torej podprostor U, za katerega je $V = W \oplus U$. Po prejšnji posledici je $V/W \cong U$. Torej je $\dim V/W = \dim U$. Vemo tudi, da je $\dim V = \dim (W \oplus U) = \dim W + \dim U$. Torej je $\dim U = \dim V - \dim W$, torej $\dim V/W = \dim V - \dim W$. $\square$